गणित

(छठी श्रेणी के लिए)

D4C2N9

ਸਮੱਗਰ ਸਿੱਖਿਆ ਅਭਿਆਨ

ਪੜ੍ਹੋ ਸਾਰੇ ਵਧੋ ਸਾਰੇ

ਸਿੱਖਿਆ ਅਤੇ ਭਲਾਈ ਵਿਭਾਗ, ਪੰਜਾਬ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਉਪਰਾਲਾ

पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड

साहिबज़ादा अजीत सिंह नगर

© पंजाब सरकार

प्रथम संस्करण : 2021-22........................ 24,000 प्रतियाँ

All right including those of translation, reproduction
and annotation etc. are reserved by the
Punjab Government

संयोजक : **प्रितपाल सिंह क्थूरिया**
विषय विशेषज्ञ, पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड

कवर चित्र : **मनजीत सिंह ढिल्लों**
आटिस्ट, पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड

चेतावनी

1. कोई भी एजेंसी-होल्डर अधिक पैसे लेने के उद्देश्य से पाठ्य-पुस्तकों पर जिल्दसाज़ी नहीं कर सकता। (एजेंसी-होल्डरों के साथ हुए समझौते की धारा नं. 7 के अनुसार)
2. पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड द्वारा मुद्रित तथा प्रकाशित पाठ्य-पुस्तकों के जाली और नकली प्रकाशन, (पाठ्य-पुस्तकों) की छपाई, प्रकाशन, स्टॉक करना, जमाखोरी या बिक्री आदि करना भारतीय दंड प्रणाली के अन्तर्गत ग़ैरकानूनी जुर्म है।
   (पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड की पाठ्य-पुस्तकें बोर्ड के 'वाटर मार्क' वाले कागज़ के ऊपर ही मुद्रित की जाती हैं।)

ਸਮੱਗਰ ਸਿੱਖਿਆ ਅਭਿਆਨ
ਪੜ੍ਹੋ ਸਾਰੇ ਵਧੋ ਸਾਰੇ
ਸਿੱਖਿਆ ਅਤੇ ਭਲਾਈ ਵਿਭਾਗ, ਪੰਜਾਬ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਉਪਰਾਲਾ

ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਵਿਕਰੀ ਲਈ ਨਹੀਂ ਹੈ।

सचिव, पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड, विद्या भवन फेज़-8, साहिबज़ादा अजीत सिंह नगर 160062 द्वारा प्रकाशित तथा **मैसः मिकाडो ऑफसैट प्रिंटर्ज़, जालन्धर** द्वारा मुद्रित ।

प्राथमिक क्रियाओं की दोहराई
(+, −, ×, ÷)

जिस प्रकार किसी भी भवन को बनाने से पहले उसकी नींव की मज़बूती की जाँच कर लेना ज़रूरी है, जिसके ऊपर उस ढाँचे का निर्माण होना होता है। ठीक इस उद्देश्य के साथ, आओ! इस अध्याय में हम अपने पूर्व ज्ञान को सुदृढ़ करें और यदि कोई कमी है तो उसको दूर करें। आओ हम पिछली कक्षा में संख्याओं पर की गई प्राथमिक क्रियाओं की दोहराई करें और शेष कमी को पूरा करें।

प्रश्नावली (जोड़)

1. निम्नलिखित को हल करें।

(a) 5999 + 1233 = ____

(b) 5219 + 3899 = ____

(c) 2009 + 7788 = ____

(d) 112 + 2709 = ____

(e) 3486 + 4306 = ____

(f) 506 + 909 = ____

2. हल करें और रिक्त स्थान भरें:–

(a) 305 + 289 = ☐

(b) 2186 + 476 = ☐

(c) 332 + 4097 + 81 = ☐

(d) 77777 + 7777 + 777 + 77 + 7 = ☐

3. रिक्त स्थान भरें:–

(a) 4 9 3 + 3 0 9 = 8 ☐ 2

(b) 2 6 3 6 + 5 9 9 = ☐ 2 3 ☐

(c) 9 7 3 9 + 6 5 2 8 = ☐ ☐ 2 6 ☐

4. बताए अनुसार हल करें और रिक्त स्थान भरें:–

(a) 2017 + 928 + 74 = 3 ☐ ☐ 9

(b) 5077 + 537 + 98 = ☐ 7 1 ☐

(c) 3344 + 403 + 37 = ☐ ☐ 8 4

5. एक क्रिकेट मैच के दौरान विराट ने 129 रन बनाए और धवन ने 97 रन बनाए। दोनों ने मिलकर कितने रन बनाए?

प्रश्नावली (घटाव)

1. निम्नलिखित को हल करो:-

(a) 532 − 289 = ______
(b) 643 − 478 = ______
(c) 912 − 289 = ______
(d) 604 − 467 = ______
(e) 7800 − 471 = ______
(f) 10000 − 9999 = ______

2. निम्नलिखित को हल करो:-

(a) 795 – 199 = ...
(b) 996 – 848 = ...
(c) 776 – 499 = ...

3. रिक्त स्थान भरो-

(a)

	4	□	6
−	2	7	□
	□	2	7

(b)

	3	□	6	8
−	□	7	4	5
	1	6	□	3

(c)

	3	□	6	0
−	□	8	9	4
	0	2	□	6

4. 807 लीटर घनत्व वाली पानी की टंकी में से यदि 196 लीटर पानी प्रयोग कर लिया जाए तो टंकी में कितना पानी बचा होगा?

5. निम्नलिखित को हल करो:-

(a) 2048 + 3088 – 4017 = ...
(b) 48 + 37 – 23 + 49 – 63 = ...
(c) –103 + 63 + 36 – 37 + 269 = ...

प्रश्नावली (गुणन)

1. निम्नलिखित को हल करो:-

(a) 7 × 0 = ...
(b) 6 × 1 = ...
(c) 9 × 1 = ...
(d) 71547×1 = ...

(e) 963 × 0 = ... (f) 23 × 47 × 0 × 32 = ...

(g) 1× 1 = ... (h) 0 × 0 = ...

2. रिक्त स्थान भरो:-

(a) 20 × 30 = ... (b) 40 × 300 = ...

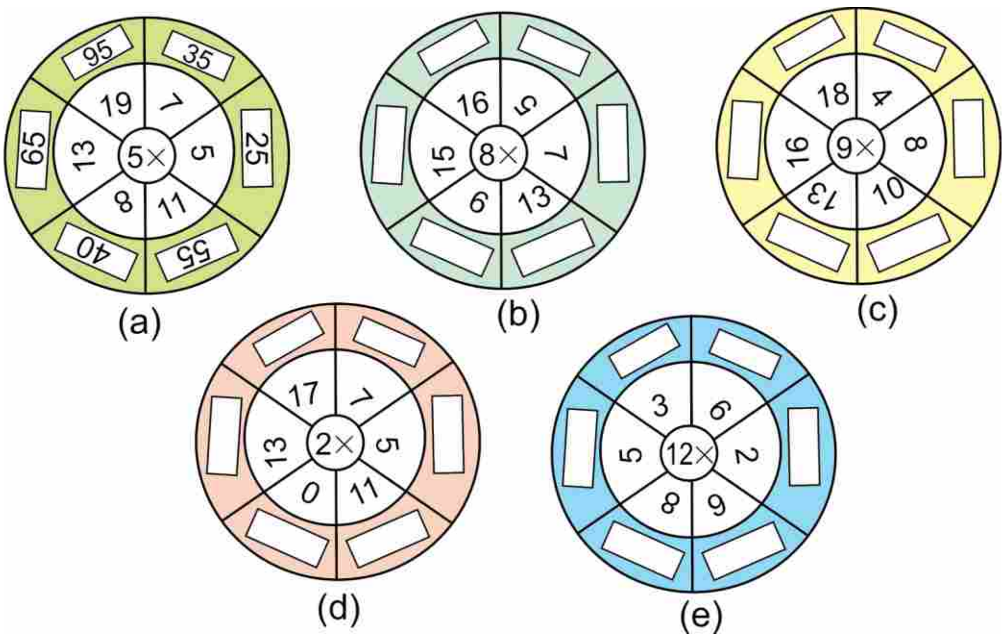
(c) 40 × 2000= .... (d) 90 × 9000 = ...

(e) 800 × 700 = ... (f) 12 × 200 = ...

(g) 8 × 11000 = ... (h) 7 × 1200 = ...

3. (a) 309 × 42 (b) 567 × 56 (c) 407 × 43 (d) 165 × 14

4. रिक्त स्थान भरो:-



4. यदि ईशा प्रत्येक महीने ₹48290 की बचत करती हो तो 2 साल बाद उसके पास कितनी राशि होगी?

6. सुरेन्द्र ने ऑडीटोरियम के लिए 15346 कुर्सियाँ खरीदीं। यदि प्रत्येक कुर्सी का मूल्य ₹398 हो तो सुरेन्द्र ने कितनी राशि अदा की?

7. एक डेयरी पर हर रोज़ 448 लीटर दूध की बिक्री होती है। 4 सप्ताह में कितने दूध की बिक्री होगी?

8. गुणनफल पता करो:-

(a) 3125 × 533 (b) 2391 × 236

(c) 4332 × 805 (d) 9219 × 78

(e) 473 × 999 (f) 234 × 11

प्रश्नावली (भाग)

1. रिक्त स्थान भरें:–

(a)	725 ÷ 1	=	....	(b)	725 ÷ 725	=	....
(c)	0 ÷ 725	=	....	(d)	823 ÷ 1	=	....
(e)	823 ÷ 823	=	....	(f)	0 ÷ 823	=	....
(g)	0 ÷ 99999	=	....	(h)	.... ÷ 35	=	0
(i)	87450 ÷ .... = 1			(j)	8129 ÷	=	8129

2. निम्नलिखित में भागफल और शेष पता करो।

(a) 1652 ÷ 7 (b) 5893 ÷ 6 (c) 7406 ÷ 6

(d) 11982 ÷ 5 (e) 28359 ÷ 12 (f) 12321 ÷ 11

3. निम्नलिखित को हल करो। (भागफल और शेष पता करो)

(a) 714 ÷ 7 (b) 618 ÷ 6 (c) 2416 ÷ 8

(d) 142114 ÷ 7 (e) 1384 ÷ 6 (f) 17126 ÷ 8

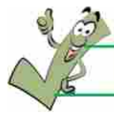
(g) 2107 ÷ 9 (h) 3046 ÷ 13 (i) 27661 ÷ 12

4. रिक्त स्थान भरो। (याद करो: भाज्य = भाजक × भागफल + शेष)

	भाज्य	भाजक	भागफल	शेष
उदाहरण	138	11	12	6
(a)	158	13	12	☐
(b)	2168	☐	135	8
(c)	1689	14	☐	9
(d)	1414	14	☐	0
(e)	90	☐	12	6

5. 3 अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या को 2 अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या से भाग करो। भागफल तथा शेष पता करो।

6. किसी फैक्ट्री (कारखाने) में 21 दिन में 936243 क्लिप बनाए जाते हैं। एक दिन में कितने क्लिप बनाए जाते हैं?



उत्तरमाला

प्रश्नावली (जोड़)

1. (a) 7232 (b) 9118 (c) 9797 (d) 2821 (e) 7792 (f) 1415

2. (a) 594 (b) 2662 (c) 4510 (d) 86415

3. (a) 0 (b) 3, 5 (c) 1, 6, 7

4. (a) 0, 1 (b) 5, 2 (c) 3, 7

5. 226

प्रश्नवाली (घटाव)

1. (a) 243 (b) 165 (c) 623 (d) 137 (e) 7329 (f) 1

2. (a) 596 (b) 148 (c) 277

3. (a) $\begin{array}{r} 4\ 0\ 6 \\ -\ 2\ 7\ 9 \\ \hline 1\ 2\ 7 \\ \hline \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 3\ 3\ 6\ 8 \\ -\ 1\ 7\ 4\ 5 \\ \hline 1\ 6\ 2\ 3 \\ \hline \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} 3\ 1\ 6\ 0 \\ -\ 2\ 8\ 9\ 4 \\ \hline 0\ 2\ 6\ 6 \\ \hline \end{array}$

4. 611 लीटर

5. (a) 1119 (b) 48 (c) 228

प्रश्नावली (गुणन)

1. (a) 0 (b) 6 (c) 9 (d) 71547

(e) 0 (f) 0 (g) 1 (h) 0

2. (a) 600 (b) 12000 (c) 80000 (d) 810000

(e) 560000 (f) 2400 (g) 88000 (h) 8400

3. (a) 12978 (b) 31752 (c) 17501 (d) 2310

4. (b)
$8 \times 5 = 40$
$8 \times 7 = 56$
$8 \times 13 = 104$
$8 \times 6 = 48$
$8 \times 15 = 120$
$8 \times 16 = 128$

(c)
$9 \times 4 = 36$
$9 \times 8 = 72$
$9 \times 10 = 90$
$9 \times 13 = 117$
$9 \times 16 = 144$
$9 \times 18 = 162$

(d)	2 × 7 = 14		(e)	12 × 6 = 72	
	2 × 5 = 10			12 × 2 = 24	
	2 × 11 = 22			12 × 9 = 108	
	2 × 0 = 0			12 × 8 = 96	
	2 × 13 = 26			12 × 5 = 60	
	2 × 17 = 34			12 × 3 = 36	

5. 11,58,960

6. 61,07,708

7. 12544

8. (a) 1665625 (b) 564276 (c) 3487260

(d) 719082 (e) 472527 (f) 2574

प्रश्नावली (भाग)

1. (a) 725 (b) 1 (c) 0 (d) 823

(e) 1 (f) 0 (g) 0 (h) 0

(i) 87450 (j) 1

2. (a) भागफल = 236 ; शेष = 0 (b) भागफल = 982 ; शेष = 1

(c) भागफल = 1234; शेष = 2 (d) भागफल = 2396 ; शेष = 2

(e) भागफल = 2363 ; शेष = 3 (f) भागफल = 1120 ; शेष = 1

3. (a) भागफल = 102; शेष = 0 (b) भागफल = 103; शेष = 0 (c) भागफल = 302; शेष = 0

(d) भागफल = 20302; शेष = 0 (e) भागफल = 230, शेष = 4 (f) भागफल = 2140; शेष= 6

(g) भागफल = 234; शेष =1 (h) भागफल = 234; शेष = 4 (i) भागफल = 2305; शेष = 1

4. (a) 2 (b) 16 (c) 120

(d) 101 (e) 7

5. भागफल = 10 ; शेष = 9

6. 44583

G3H9U8

अपनी संख्याओं को जानना

1

(KNOWING OUR NUMBERS)

उद्देश्य

इस अध्याय में आप सीखेंगे :

(i) अंकों को भारतीय और अंतर्राष्ट्रीय प्रणाली के अनुसार पढ़ना और लिखना।

(ii) दैनिक जीवन में आने वाली गणितीय समस्याओं को हल करना।

(iii) मूल गणितीय गतिविधियाँ करना और उन्हें दैनिक जीवन में प्रयोग में लाना।

(iv) अंकों में तुलना करना।

(v) गणितीय समस्याओं को हल करने के लिए कोष्ठकों (बरैकटों) का प्रयोग करना।

(vi) हिंदू-अरबी संख्याकन प्रणाली के साथ-साथ रोमन अंक प्रणाली का प्रयोग करना।

1.1 भूमिका (Introduction)

पिछली कक्षाओं में हम संख्याओं के साथ कार्य करने का आनंद प्राप्त कर चुके हैं। हम इनके साथ योग, व्यवकलन (घटाने), गुणा और भाग की संक्रियाएं भी कर चुके हैं। हम संख्या अनुक्रमों में प्रतिरूपों को देख चुके हैं और संख्याओं के साथ अनेक रुचिपूर्ण बातें कर चुके हैं। इस अध्याय में, हम कुछ समीक्षा और पुनरावलोकन के साथ इन रुचिपूर्ण बातों पर और आगे कदम बढ़ाएँगे।

1.2 कुछ मूल धारणाएँ

*** प्राकृतिक संख्याएँ :** हम अपने बचपन से ही संख्याओं 1, 2, 3, 4........ का प्रयोग गिनने और हिसाब लगाने के लिए करते आए हैं। इन संख्याओं को प्राकृतिक संख्या कहा जाता है। जो कुछ भी प्रकृति में मौजूद है, हम इन संख्याओं का प्रयोग गिनने में करते हैं, इसलिए इन्हें गिनने योग्य संख्याएं या प्राकृतिक संख्याएँ कहा जाता है।

- पहली और सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या "1" है।
- किसी भी प्राकृतिक संख्या में 1 जोड़ने पर अगली प्राकृतिक संख्या प्राप्त हो जाती है।
- सबसे बड़ी प्राकृतिक संख्या संभव नहीं है।
- प्राकृतिक संख्या के समूह को अंग्रेज़ी के अक्षर 'N' से दर्शाया जाता है।

*** अंक :** किसी भी संख्या को दर्शाने के लिए हम संकेत 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 का प्रयोग करते है, इन संकेतों को अंक कहा जाता है।

1.3 संख्याओं की तुलना (Comparing Numbers)

किसी भी दो संख्याओं की तुलना करते समय निम्नलिखित बातों को याद रखें-

पग 1 : यदि दी गई संख्याओं में अंकों की गिनती बराबर न हो तो कम अंकों वाली संख्या छोटी संख्या होती है।

पग 2 : यदि अंकों की गिनती बराबर हो तो

(a) बाई तरफ से पहले अंक की तुलना करेंगे, जिस संख्या में यह अंक बड़ा होगा, वह संख्या बड़ी होगी।

(b) यदि पहले स्थान वाले अंक बराबर हों तो बायीं तरफ से दूसरे स्थान वाले अंक की तुलना करेंगे, बड़े अंक वाली संख्या बड़ी होगी।

(c) इस विधि को तब तक जारी रखेंगे जब तक एक ही स्थानीय मूल्य वाले अलग-अलग अंक न मिल जाएँ।

(d) दो से अधिक संख्याओं की तुलना के लिए इस विधि को जारी रखेंगे।

उदाहरण 1 . **निम्नलिखित संख्याओं की तुलना करें:-**

(a) 235 और 1023 (b) 47321 और 39874 (c) 56398 और 56412

हल :

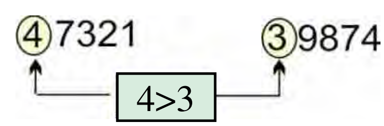
(a) 235 तीन अंकों वाली संख्या है

और 1023 चार अंकों वाली संख्या है।

इसलिए, ज़्यादा अंकों वाली संख्या बड़ी है।

इसलिए, संख्या 1023, संख्या 235 से बड़ी है।

(b) <u>4</u>7321 एक पाँच अंकों वाली संख्या है।

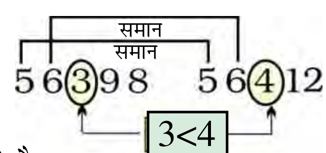


<u>3</u>9874 एक पाँच अंकों वाली संख्या है।

बायीं तरफ से पहला अंक 4 और 3 है और 4>3

इसलिए 47321, संख्या 39874 से बड़ी है।

(c) 56398 एक पाँच अंकों की संख्या है।



56412 भी एक पाँच अंकों की संख्या है।

हम देखते हैं कि बायीं ओर से दोनों संख्याओं के पहले दो अंक एक जैसे है।

दोनों संख्याएँ 56 से प्रारंभ होती है। बायीं ओर से तीसरा अंक 3 और 4 हैं जो कि अलग-अलग हैं 3<4

इसलिए संख्या 56412, संख्या 56398 से बड़ी है।

उदाहरण 2. **निम्नलिखित संख्याओं में सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्या पता करें।**

1903, 9301, 1930, 9031, 9310

हल : दी गई संख्याएं

1903, 9301, 1930, 9031, 9310 चार अंकों वाली हैं।

आओ! प्रत्येक संख्या की बायीं ओर से अंकों की तुलना करें।

दो संख्याओं में बाएँ तरफ से पहला अंक 1 है जबकि बाकी संख्याओं में 9 है।

सबसे छोटी संख्या 1903 और 1930 में से होगी। सबसे बड़ी संख्या 9301, 9031 और 9310 में से होगी। बायीं ओर से दूसरे और तीसरे अंक की तुलना करने पर हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि 1903 सबसे छोटी और 9310 सबसे बड़ी संख्या होगी।

1.3.1 अंकों के स्थानांतरण से नई संख्याओं का बनना (Making Different numbers by shifting digits)

ज़रा सोचें, यदि किसी संख्या में अंकों का स्थान बदल दिया जाए। उदाहरण के लिए एक संख्या 327 लेते हैं तो हम अंकों का स्थान बदलकर 6 अलग-अलग संख्याएँ बना सकते हैं।

जैसे 327, 372, 237, 273, 732, 723

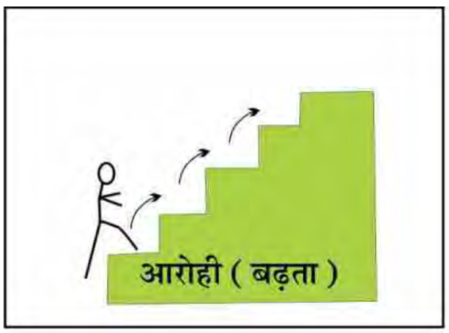
क्या आप इन 6 संख्याओं में से सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्या पहचान सकते है?

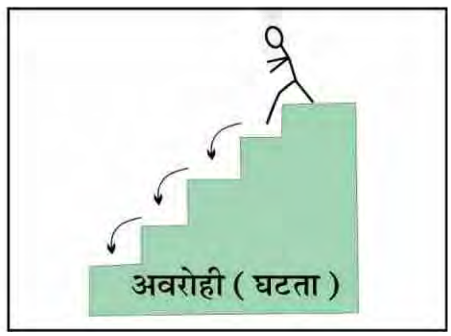
अंक 2, 3, और 5 का प्रयोग करके सारी संभव संख्याएँ बनाने का प्रयत्न करो।

अंक 3, 5, 7, 9 का प्रयोग करके, बिना पुनरावृत्ति 4 अंकों वाली सभी संख्याएँ बनाने की कोशिश करें। इनमें से सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्या लिखें।

1.3.2 आरोही और अवरोही क्रम (बढ़ता और घटता क्रम) (Ascending (Increasing) and Descending (Decreasing order)

(आरोही) बढ़ते क्रम का अर्थ है संख्याओं को सबसे छोटी से सबसे बड़ी के क्रम में व्यवस्थित करना।





(अवरोही) घटते क्रम का अर्थ है संख्याओं को सबसे बड़ी से छोटी के क्रम में व्यवस्थित करना।

उदाहरण 3. **संख्याएँ 653, 1135, 47629, 2546, 7320 को बढ़ते क्रम में लिखें।**

हल : दी गई संख्याओं में से 3 अंकों वाली संख्या सबसे छोटी और 5 अंकों वाली संख्या सबसे बड़ी संख्या होगी। सबसे छोटी संख्या (653) से आगे की संख्या 1135 है, अगली चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या 2546 है और इससे अगली संख्या 7320 है।

इसलिए बढ़ते क्रम में : 653, 1135, 2546, 7320, 47629.

उदाहरण 4. **अंकों की पुनरावृत्ति किए बिना, दिए गए अंकों का प्रयोग करके 4 अंकों की सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्या बनाओ?**

(a) 2, 3, 1, 7 **(b) 4, 9, 0, 2**

हल : (a) दिए गए अंक = 2, 3, 1, 7

सबसे पहले दिए गए अंकों को बढ़ते और घटते क्रम में अपनी दिशा अनुसार व्यवस्थित करें।

आरोही (बढ़ते) क्रम में लिखने पर = 1, 2, 3, 7

अब चार अंकों की सबसे छोटी संख्या = 1237

चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 7321

(b) दिए गए अंक : 4, 9, 0, 2

बढ़ते क्रम में लिखने पर = 0, 2, 4, 9

अब, चार अंकों की सबसे छोटी संख्या = 2049

अब, चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 9420

ध्यान देने योग्य बात यह है कि 0249, चार अंकों वाली संख्या नहीं है क्योंकि (शून्य) ज़ीरो जब बायीं ओर से पहले स्थान पर होती है, अर्थपूर्ण नहीं है। इसलिए 0249 एक तीन अंकों वाली संख्या है।

उदाहरण 5. किसी एक अंक को दो बार प्रयोग करके 4 अंकों की सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्या बनाएँ।

(a) 5, 2, 8 **(b) 7, 0, 2**

हल : (a) दिए गए अंक : 5, 2, 8

बढ़ते क्रम में लिखने पर = 2, 5, 8

4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 8852

(एक अंक दोहराने पर)

(यहाँ सबसे अधिक अंकित मान वाले अंक 8 को दोहराया गया है)

4 अंकों की सबसे छोटी संख्या (एक अंक दोहराने पर)= 2258

(यहाँ सबसे कम अंकित मान वाले अंक 2 को दोहराया गया है।)

(b) दिए गए अंक = 7, 0, 2

बढ़ते क्रम में लिखने पर = 0, 2, 7

4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या= 7720

(एक अंक दोहराने पर)

(यहाँ सबसे अधिक अंकित मान वाले अंक 7 को दोहराया गया है)

अंकों की सबसे छोटी संख्या (एक अंक दोहराने पर)= 2007

(यहाँ सबसे कम अंकित मान वाले अंक 0 को दोहराया गया है परंतु 0 को बायीं ओर सबसे आगे नहीं रखा जा सकता)

1.3.3 स्थानीय मूल्य और अंकित मूल्य (Place value and face value)

किसी अंक का स्थानीय मूल्य उसके स्थान पर निर्भर करता है जबकि अंकित मूल्य उसके स्थान पर निर्भर नहीं करता। जैसे 9678 में अंक 8 का अंकित मूल्य 8 है। इसी तरह 7, 6, 9 का अंकित मूल्य 7, 6, 9 है परंतु जब हम स्थानीय मूल्य की बात करते हैं, तो

संख्या 8 का स्थानीय मूल्य = $8 \times 1 = 8$ (8 इकाई के स्थान पर है)

संख्या 7 का स्थानीय मूल्य = $7 \times 10 = 70$ (7 दहाई के स्थान पर है)

संख्या 6 का स्थानीय मूल्य = $6 \times 100 = 600$ (6 सैकड़े के स्थान पर है)

संख्या 9 का स्थानीय मूल्य = $9 \times 1000 = 9000$ (9 हजार के स्थान पर है)

9678 को प्रसारित रूप में लिखने पर

$9678 = 9 \times 1000 + 6 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1$

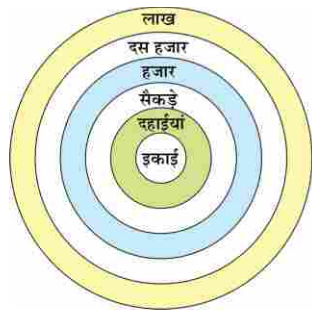
यह स्पष्ट है कि कोई भी संख्या सभी अंकों के स्थानीय मूल्य के जोड़ के बराबर होती है।

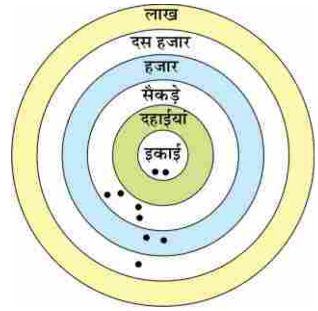
किसी भी अंक का स्थानीय मूल्य = अंकित मूल्य × स्थान का मूल्य

यहाँ ध्यान देने योग्य बात यह है कि इकाई, दहाई, सैकड़ा, हज़ार, दस हज़ार, लाख .... का स्थानीय मूल्य क्रमवार 1, 10, 100, 1000, 10000, ... है।

किसी भी संख्या में 0 का स्थानीय मूल्य 0 होता है चाहे यह किसी भी स्थान पर हो।

क्रिया





बच्चो! आओ अंकों से खेलें।

चित्रानुसार ऊपर (या ज़मीन के ऊपर) समकेंद्री वृत्त बनाएँ। मार्कर की सहायता से इकाई, दहाई, सैकड़ा, हज़ार, दस हज़ार अंकित कीजिए।

कुछ कंचे लें और खेलने के लिए तैयार हो जाएँ।

मान लीजिए कि गोलियाँ (जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है) टिक जाएगी।

क्या आप संख्या की पहचान कर सकते हैं?

दस हज़ार वाले वृत्त के बीच कंचों की गिनती का स्थानीय मूल्य $= 1 \times 10000$
$= 10000$

हज़ार वाले वृत्त के बीच कंचों की गिनती का स्थानीय मूल्य $= 2 \times 1000 = 2000$

सैकड़े वाले वृत्त के बीच कंचों की गिनती का स्थानीय मूल्य $= 4 \times 100 = 400$

दहाई वाले वृत्त के बीच कंचों की गिनती का स्थानीय मूल्य $= 0 \times 10 = 0$

इकाई वाले वृत्त के बीच कंचों की गिनती का स्थानीय मूल्य $= 2 \times 1 = 2$

संख्या = प्रत्येक कंचे के स्थानीय मूल्य का जोड़
= 10,000 + 2,000 + 400 + 0 + 2
= 12402

आओ, इसलिए स्थानीय मूल्य का एक चार्ट बनाएं।

रोल नं.	विद्यार्थी का नाम	लाख अंकित मूल्य × 100000	दस हज़ार अंकित मूल्य × 10000	हज़ार अंकित मूल्य × 1000	सैकड़ा अंकित मूल्य × 100	दहाई अंकित मूल्य × 10	इकाई अंकित मूल्य × 1	संख्या सभी स्थानीय मूल्य का जोड़
1.	--	--	10000	2000	400	0	2	10,000+2000+400+ 0+2 =12402
2.								

उदाहरण 6. **पढ़ो और सारणी में दी गई संख्याओं को प्रसारित रूप में लिखो।**

संख्या	संख्या का नाम	प्रसारित रूप
27000	सताईस हज़ार	$2 \times 10,000 + 7 \times 1000$
37600	सैंतीस हज़ार छह सौ	$3 \times 10000 + 7 \times 1000 + 6 \times 100$
56740		
69563		
42639		
29308		
20005		
19075		

1.4 संख्याओं को पढ़ने और लिखने की भारतीय प्रणाली (Reading and Writing numbers in Indian system of Numeration)

जनगणना 2011 के अनुसार, पंजाब की जनसंख्या लगभग दो करोड़ सतहत्तर लाख तैंतालीस हज़ार थी। दैनिक जीवन में हम हज़ार, लाख और करोड़ जैसे शब्दों का प्रयोग करते हैं। यह संख्यांकन की भारतीय प्रणाली है। भारतीय प्रणाली में, हम स्थानीय मान (मूल्य) के आधार पर समूह बनाते हैं। जैसे कि इकाइयाँ, हज़ार, लाख, करोड़ आदि और इन्हें अल्प विराम के माध्यम से अलग किया जा सकता है।

- दाएँ तरफ से पहले 3 अंक, इकाई समूह बनाते हैं।
- अगले 2 अंक, हज़ार का स्थान दर्शाएँगें।
- अगले 2 अंक, लाख का स्थान दर्शाएँगें।
- अगले 2 अंक, करोड़ का स्थान दर्शाएँगें।

एक ही समूह के अंकों और स्थान को इकट्ठा भी पढ़ा जाता है। (इकाई के समूह को छोड़कर)

इसलिए 8,76,54,321 को हम आठ करोड़, छिहत्तर लाख, चौवन हज़ार, तीन सौ इक्कीस पढ़ेंगे।

प्रत्येक समूह के बाद अल्प विराम हमें संख्या को अच्छी तरह से समझने में सहायता करता है।

उदाहरण 7. **निम्नलिखित संख्याओं को पढ़ें:-**

(a) 534632 **(b) 90763021**

हल : (a) दी गई संख्या = 534632

सबसे पहले दाएँ तरफ से 3,2, 2....... अंकों के समूह बनाकर अल्प विराम लगाएंगे।

इसलिए, दी गई संख्या = 5, 34, 632

जो कि है- पाँच लाख, चौंतीस हज़ार, छह सौ बत्तीस

(b) दी गई संख्या = 90763021

सबसे पहले दाएँ तरफ से 3, 2, 2, 2....... अंकों के समूह बनाकर अल्प विराम लगाएंगे।

इसलिए दी गई संख्या = 9,07,63,021

जो कि है - नौ करोड़ सात लाख तिरसठ हज़ार इक्कीस

उदाहरण 8. **निम्नलिखित संख्याओं को अंकों में लिखें:-**

(a) चार लाख बत्तीस हजार छह सौ तिहत्त

(b) छह करोड़ तिरपन लाख इक्कीस हज़ार नौ सौ बहत्तर

हल : (a) चार लाख बत्तीस हज़ार छह सौ तिहतर

करोड़	लाख	हज़ार	इकाई
0	04	32	673

= 4,32,673

(b) छह करोड़ तिरपन लाख इक्कीस हज़ार नौ सौ बहत्तर

= 6,53,21,972

उदाहरण 9. **9745623 में 7 के स्थानीय मूल्य और अंकित मूल्य में अंतर पता करें।**

हल : दी गई संख्या = 9745623

7 का स्थानीय मूल्य = 7,00,000

7 का अंकित मूल्य = 7

अंतर = 700000 – 7 = 699993

उदाहरण 10. **4 अंकों वाली कुल कितनी संख्याएँ हैं?**

हल : 4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 9999

3 अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 999

4 अंकों की कुल संख्याएँ = 4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या – 3 अंकों की सबसे बड़ी संख्या

= 9999 – 999

= 9000

उदाहरण 11. **दी गई सारणी में संख्याओं के नाम लिखें।**

	करोड़		लाख		हज़ार		इकाई		
	दस करोड़ 10,00,00,000	करोड़ 1,00,00,000	दस लाख (10,00,000)	लाख (1,00,000)	दस हज़ार (10,000)	हज़ार (1000)	सैकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)
(i)		4	7	5	0	0	2	9	8
(ii)		7	8	0	5	1	0	2	4

हल : (i) दी गई संख्या = 4,75,00,298

चार करोड़ पचहत्तर लाख दो सौ अठानवे

(ii) दी गई संख्या = 7,80,51,024

सात करोड़ अस्सी लाख इक्यावन हज़ार चौबीस

उदाहरण 12. **दी गई संख्याओं को स्थानीय मान सारणी के रूप में लिखें।**

(a) 593268 **(b) 32067308**

हल :

करोड़		लाख		हज़ार		इकाई			संख्याएँ
दस करोड़ 10,00,00,000	करोड़ 1,00,00,000	दस लाख 10,00,000	लाख 1,00,000	दस हज़ार 10,000	हज़ार 1,000	सैकड़ा 100	दहाई 10	इकाई 1	
			5	9	3	2	6	8	पाँच लाख तिरानवें हज़ार दो सौ अड़सठ
	3	2	0	6	7	3	0	8	तीन करोड़ बीस लाख सड़सठ हज़ार तीन सौ आठ

1.5 अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति (International system of Numeration)

पिछले भाग में हमनें भारतीय संख्या पद्धति के बारे में पढ़ा। इस भाग में हम संख्यांकन की अंतर्राष्ट्रीय पद्धति के बारे में पढ़ेंगे जो कि विश्व के अधिकतर देशों में प्रयोग की जाती है। इस प्रणाली में भी किसी संख्या को समूहों में बाँट के पढ़ा जाता है। दाएँ तरफ से आरंभ करते हुए संख्याओं को 3-3 के समूह में बाँट लेंगे। इन समूहों को इकाई, हज़ार, मिलियन और बिलियन कहा जाता है।

बिलियन			मिलियन			हज़ार			इकाई		
सौ बिलियन	दस बिलियन	बिलियन	सौ मिलियन	दस मिलियन	मिलियन	सौ हज़ार	दस हज़ार	हज़ार	सैकड़ा	दहाई	इकाई

उदाहरण 13. **अल्प विराम (,) लगाकर 79530257 को लिखें:**

(a) भारतीय संख्याकन पद्धति के अनुसार

(b) अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति के अनुसार

हल : भारतीय संख्यांकन पद्धति के अनुसार = 7,95,30,257

सात करोड़ पचानवे लाख तीस हज़ार दो सौ सत्तावन

अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन प्रणाली के अनुसार = 79,530,257

उनासी मिलियन पाँच सौ तीस हज़ार दो सौ सतावन

उदाहरण 14. **दी गई स्थानीय मान (मूल्य) की सारणी में से संख्याओं को पढ़ें और शब्दों में लिखें।**

बिलियन			मिलियन			हज़ार			इकाई		
सौ बिलियन	दस बिलियन	बिलियन	सौ मिलियन	दस मिलियन	मिलियन	सौ हज़ार	दस हज़ार	हज़ार	सैकड़ा	दहाई	इकाई
		2	3	4	1	2	9	8	3	4	6
				3	9	1	7	0	3	1	7

हल : (i) दी गई संख्या = 2, 341, 298, 346

दो बिलियन तीन सौ इकतालीस मिलियन दो सौ अठानवे हज़ार तीन सौ छियालीस

(ii) दी गई संख्या = 39, 170, 317

उनतालीस मिलियन एक सौ सत्तर हज़ार तीन सौ सत्रह

- **भारतीय और अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति में संबंध**

संख्या	भारतीय संख्यांकन पद्धति	अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति
1	इकाई	इकाई
10	दहाई	दहाई
100	एक सौ	एक सौ
1000	एक हज़ार	एक हज़ार
10000	दस हज़ार	दस हज़ार
100000	एक लाख	एक सौ हज़ार
1000000	दस लाख	एक मिलियन
10000000	एक करोड़	दस मिलियन
100000000	दस करोड़	एक सौ मिलियन
1000000000	एक अरब	एक बिलियन

प्रश्नावली 1.1

1. सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्या लिखें:–
   (a) 30900, 30594, 30945, 30495
   (b) 10092, 10029, 10209, 10920
2. निम्नलिखित संख्याओं को बढ़ते (आरोही) क्रम में लिखें:–
   (a) 6089, 6098, 5231, 3953
   (b) 49905, 6073, 58904, 7392
   (c) 9801, 25751, 36501, 38802
3. निम्नलिखित संख्याओं को घटते (अवरोही) क्रम में लिखें:–
   (a) 75003, 20051, 7600, 60632
   (b) 2934, 2834, 667, 3289
   (c) 1971, 45321, 88715, 92547
4. दिए गए अंकों में से बिना किसी अंक को दोहराए 4 अंकों की छोटी से छोटी और बड़ी से बड़ी संख्या पता करें।
   (a) 6, 4, 3, 2 (b) 9, 7, 0, 3
   (c) 5, 4, 0, 3 (d) 3, 2, 7, 1
5. किसी एक अंक की पुनरावृत्ति करके चार अंकों की छोटी से छोटी और बड़ी से बड़ी संख्या पता करें।
   (a) 2, 3, 7 (b) 5, 0, 3 (c) 2, 3, 0
   (d) 1, 3, 4 (e) 2, 5, 8 (f) 1, 2, 3
6. निम्नलिखित को स्थानीय मूल्य सारणी बनाकर लिखें।
   (a) 638975 (b) 84321 (c) 29061058
   (d) 60003608
7. उचित स्थान पर अल्प विराम लगाकर भारतीय संख्यांकन पद्धति के अनुसार लिखें:–
   (a) 98606873 (b) 7635172 (c) 89700057
   (d) 89322602 (e) 4503217 (f) 90032045
8. उचित स्थान पर अल्प विराम लगाकर अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति के अनुसार लिखें:–
   (a) 89832081 (b) 6543374 (c) 88976306
   (d) 9860001 (e) 90032045 (f) 4503217
9. निम्नलिखित संख्याओं को अंकों में लिखें:–
   (a) सात लाख चौवन हज़ार
   (b) नौ करोड़ तिरपन लाख चौहत्तर हज़ार पाँच सौ तेईस
   (c) छह सौ सैंतालीस हज़ार पाँच सौ पच्चीस
   (d) बहत्तर मिलियन तीन सौ बत्तीस हज़ार एक सौ बारह
   (e) अठावन मिलियन चार सौ तेईस हज़ार दो सौ दो
   (f) तेईस लाख तीस हज़ार दस
10. आठ अंकों वाली कुल कितनी संख्याएँ हैं?

11. खाली स्थान भरो।

(a) 1 लाख = ... दस हज़ार

(b) 1 मिलियन = ... सौ हज़ार

(c) 1 करोड़ = ... दस लाख

(d) 1 करोड़ = ... मिलियन

(e) 1 मिलियन = ... लाख

1.6 लंबाई, भार, धारिता में संख्याएँ (Numbers in Length, Weight and Capacity)

(दैनिक जीवन में संख्याओं का प्रयोग)

पिछली कक्षा में हम मापने की इकाइयाँ जैसे लंबाई, भार, धारिता के बारे में पढ़ चुके हैं।

• **लंबाई :-** हम पेंसिल की लंबाई को सेंटीमीटर में दर्शाते हैं जबकि किसी पेपर क्लिप की मोटाई को मापने के लिए सेंटीमीटर बहुत बड़ा मात्रक है। इसलिए हम छोटे मात्रक का प्रयोग करते हैं। इसके अतिरिक्त किसी इमारत की ऊँचाई मापने के लिए हमें मीटर जैसी बड़े मात्रक की आवश्यकता होगी और दो शहरों के बीच की दूरी को मापने के लिए इससे भी बड़ी मात्रक किलोमीटर की आवश्यकता होगी।

जैसे बठिंडा और चंडीगढ़ के बीच की दूरी 230 कि.मी है।

		10 मि.मी.	=	1 सेमी
1 मी.	=	100 सै.मी	=	1000 मि.मी
1 कि.मी	=	1000 मी.	=	1000000 मि.मी

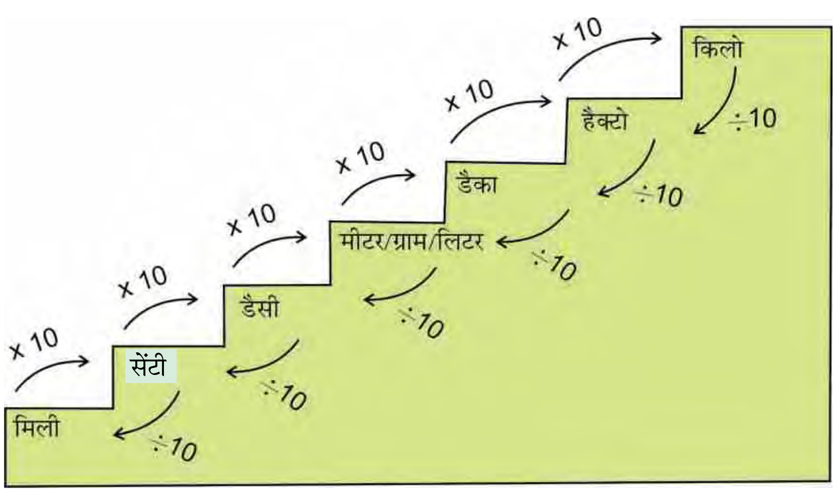
• **भार :** हम हल्दी, अदरक, लहसुन और चावल के लिए किलोग्राम जैसी बड़ी मात्रक का प्रयोग करते हैं। परन्तु हम दवाइयों का प्रयोग मिलीग्राम में करते हैं।

1 किलोग्राम	=	1000 ग्राम
1 ग्राम	=	1000 मिलीग्राम

• **सामर्थ्य :-** हम गिलास में पानी पीते हैं तो इसकी अनुमानित मात्रा 250 मि.ली–300 मि.ली होती है परंतु जब हम नहाने के लिए बाल्टी भरते हैं तो इसमें लगभग 20 से 25 लीटर पानी होता है।

1 लीटर	=	1000 मि.ली

माप की इकाइयों की अदला-बदली



खाली स्थान भरें।

मिली..............	:	मिलीलिटर
		मिलीग्राम
		मिलीमीटर

इसे याद रखने के इस तुकबंदी का प्रयोग किया जा सकता है।

कल	हैप्पी	डाकिये को	महंगी	ड्रैस	सस्ती	मिली
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
किलो	हैक्टा	डैका	मीटर/ग्राम/लिटर	डैसी	सैंटी	मिली

उदाहरण 15. **चुनाव के दौरान सफल उम्मीदवार को 5765 मत प्राप्त हुए जबकि उसके विरोधी उम्मीदवार को 3427 मत मिली। सफल उम्मीदवार अपने विरोधी उम्मीदवार से कितने मतों से जीता?**

हल :

सफल उम्मीदवार को मत प्राप्त हुए = 5765

विरोधी उम्मीदवार को मत प्राप्त हुए = 3427

अंतर = 5765 – 3427

= 2338 मतों

उदाहरण 16. **किसी शहर में एक अखबार हर रोज़ छपता है। अखबार की एक प्रति में 13 पृष्ठ हैं। 11980 प्रतियाँ प्रतिदिन छपती हैं। प्रतिदिन कुल कितने पृष्ठ छपते हैं?**

हल : अखबार की प्रत्येक प्रति में पृष्ठ = 13

11980 प्रतियों में पृष्ठ = 11980 × 13 = 155740

$$\begin{array}{r} 11980 \\ \times 13 \\ \hline 35940 \\ 119800 \\ \hline 155740 \\ \hline \end{array}$$

इसलिए प्रतिदिन 1, 55, 740 पृष्ठ छपते हैं।

उदाहरण 17. **किसी दुकानदार के पास 48000 शीटें हैं। वह इनके रिम बनाकर रखना चाहता है। एक रिम में 480 शीटें हैं। कितने रिम बनाए जा सकते हैं।**

हल :

कुल शीटें = 48000

रिम में शीटों की गिनती = 480

रिम की गिनती = कुल शीटें ÷ एक रिम में शीटों की गिनती

= 48000 ÷ 480

= 100 रिम

$$\begin{array}{r} 100 \\ 480\,\overline{)\,48000\,(} \\ 480 \\ \hline 00 \\ 0 \\ \hline 00 \\ 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

उदाहरण 18. **किसी बर्तन में 3 लीटर 650 मि.ली. दही है। इसे 25 मि.ली. धारिता वाले कितने गिलासों में भरा जा सकता है?**

हल : दही वाले बर्तन की धारिता = 4 लिटर 650 मि.ली

= 4 × 1000मि.ली + 650मि.ली [∵1 लि : = 1000 मि.ली.]

= 4000मि.ली + 650मि.ली

= 4650मि.ली

1 गिलास की धारिता = 25मि.ली

गिलासों की गिनती = दही की मात्रा ÷ गिलासों की धारिता

= 4650 मि.ली ÷ 25मि.ली

= 186

4 लीटर 650 मि.ली दही को 25 मि.ली वाले कुल 186 गिलासों में भरा जा सकता है।

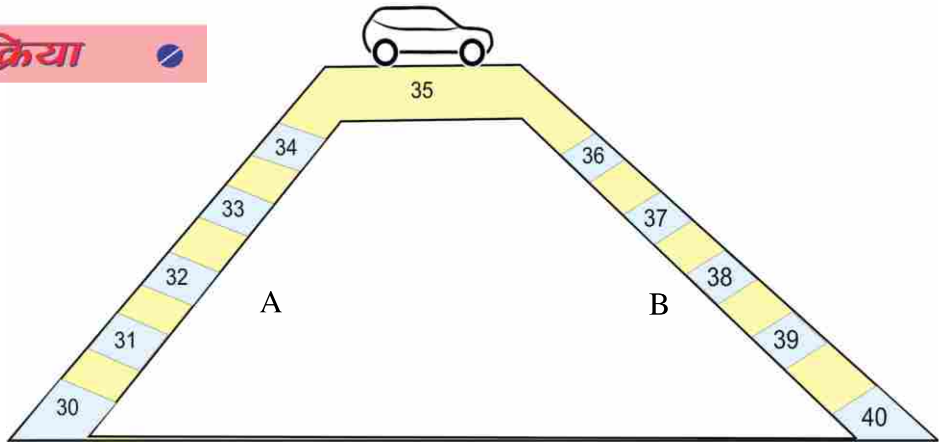
$$\begin{array}{r|l} & 186 \\ 25 & 4650 \\ & \underline{25} \\ & 215 \\ & \underline{200} \\ & 150 \\ & \underline{150} \\ & \times \end{array}$$

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित मापों को इनके अनुसार बदलकर लिखें:-
   (a) 5 किलोमीटर को मीटर में (b) 35 किलोमीटर को मीटर में
   (c) 2000 किलोग्राम को ग्राम में (d) 500 डैसीग्राम को ग्राम में
   (e) 2000 मिलीलीटर को लीटर में (f) 12 किलोमीटर को मीटर में
2. चुनाव में सफल उम्मीदवार को 6317 मत मिले जबकि उसके विरोधी उम्मीदवार को 3761 मत मिले। सफल उम्मीदवार ने अपने विरोधी उम्मीदवार को कितने मतों से हराया?
3. एक मासिक पत्रिका जो कि 20 तारीख को छपती है, उसमें 37 पृष्ठ हैं। इस महीने में 23791 प्रतियों की छपाई हुई। कुल कितने पृष्ठ छापे गए?
4. एक दुकानदार के पास 37 रिम हैं। एक रिम में 480 शीटें हैं और वह उसे बेचने के लिए पैकट बनाना चाहता है। एक पैकट में 24 शीटें हैं। कितने पैकट बनाए जा सकते हैं?
5. वीरपाल मेहमानों को 250 मि.ली धारिता वाले गिलास में दूध बाँट रही है। मान लो कि गिलास पूरे भरे हुए हैं और कुल 5 लीटर दूध प्रयोग कर लिया गया। कितने मेहमानों को दूध बाँटा गया?
6. दवाइयों के एक बक्से में 20 मि.ग्रा की 2,00,000 गोलियाँ हैं। बक्से में गोलियों का कुल भार क्या है?
7. एक पुस्तक विक्रेता ने जून के पहले सप्ताह में दो लाख पचासी हज़ार इक्यानवे पुस्तकों की बिक्री की गई और जून के दूसरे सप्ताह में चार लाख सात सौ अठारह पुस्तकों की बिक्री की गई। कुल दोनों सप्ताह में कितनी बिक्री की गई?
8. एक प्रसिद्ध क्रिकेट खिलाड़ी ने अब तक 6978 रन बनाए हैं और उसकी चाह 10,000 रन बनाने की है। उसे कितने और रन बनाने होंगे?
9. सुरिंदर के पास 78592 रुपये हैं। उसने 1234 रुपये वाले 39 रेडियो सेटों का आर्डर दिया। रेडियो सेट खरीदने के बाद उसके पास कितनी राशि बाकी बचेगी?
10. एक बर्तन में 3 लीटर 650 मि.ली दही है। इसको 25 मि.ली. धारिता वाले कितने गिलासों में बाँटा जा सकता है?

1.7 अनुमान और सन्निकट (Estimation and Approximation)

हम अपने दैनिक जीवन में संख्याओं का प्रयोग करते ही हैं। हमें यह जवाब देना होता है कि ''कुल कितने''? परंतु हमें वास्तविक गिनती नहीं बता सकते। हम उस समय सन्निकट (निकटतम) मान बता देते हैं। उदाहरण के तौर पर आप अपने एक दोस्त से कहते हैं कि कल आप एक विवाह के समागम में शामिल हुए और वहाँ 600 व्यक्तियों का एक संग्रह था। 600 आपका एक अनुमान है। आपने मेहमानों की वास्तव में गिनती नहीं की। बहुत सी स्थितियों में हमें वास्तविक गिनती बनाने की ज़रूरत नहीं होती बल्कि एक अनुमानित मान बताना ही काफी होता है।



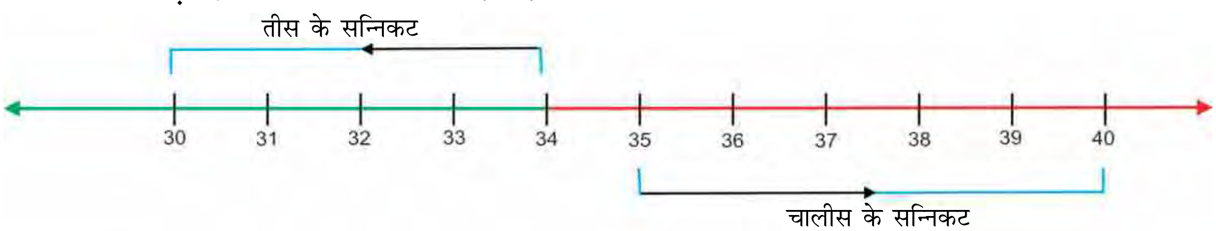
आओ! एक गतिविधि के माध्यम से किसी संख्या के सन्निकट को समझते हैं।

जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है, दोनों तरफ तिरछे तल (Inclined planes) यदि कार भाग A में कहीं भी हो, तो सबसे नीचे 30 तक आएगी। 31, 32, 33, 34 का पास के दहाई के स्थान तक सन्निकट करने पर यह 30 बन जाएगा। परंतु जब कार भाग B में हैं तो यह 40 तक आ जाएगी। अर्थात 35, 36 37, 38, 39 का पास के दहाई के दो स्थान तक सन्निकट करने पर यह 40 बन जाएगा।

नियम 1: निम्नलिखित नियमों का पालन करके दहाई के स्थान तक सन्निकट का आंकलन किया जा सकता है।

(a) यदि इकाई का अंक 5 से छोटा है, तो इकाई के अंक को 0 से बदल दिया जाए और बाकी अंक उसी तरह रहने दो।

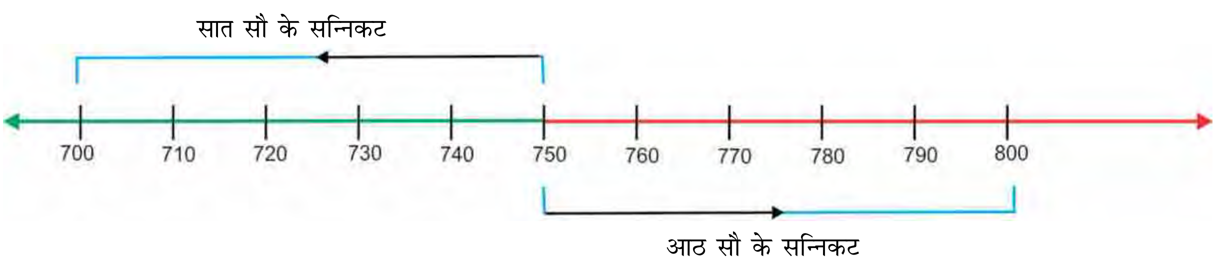
(b) परंतु यदि इकाई का अंक 5 या 5 से बड़ा है तो इकाई के अंक को 0 से बदल दें और दहाई के अंक को 1 बढ़ा देंगे और बाकी अंक वैसे ही रहेंगे।



नियम 2: सन्निकटन द्वारा निकटतम सैकड़े तक आंकलन ।

(a) यदि दहाई का अंक 5 से छोटा है तो दहाई और इकाई के अंक को 0 से बदल दिया जाए और बाकी अंक वैसे ही रहेंगे।

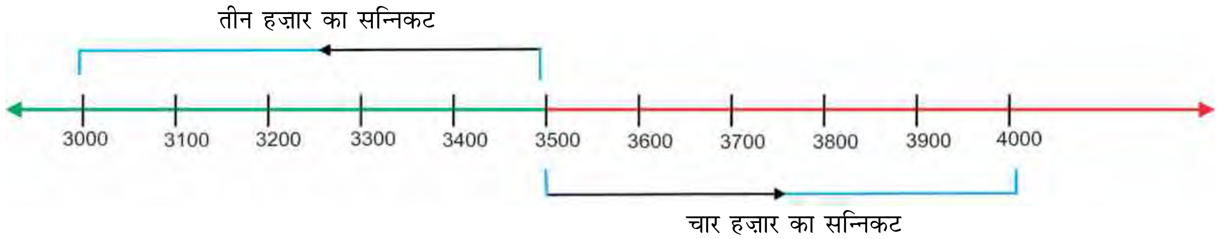
(b) यदि दहाई का अंक 5 या 5 से बड़ा है तो सैकड़े के स्थान पर 1 बढ़ा देंगे और इसके दाएँ तरफ से प्रत्येक अंक को 0 से बदल देंगे।



नियम 3: सन्निकटन द्वारा निकटतम हज़ार तक आंकलन।

(a) यदि सैकड़े का अंक 5 से छोटा है तो सैकड़े, दहाई और इकाई के अंक को 0 से बदल देंगे और बाकी के अंक वैसे ही रहेंगे।

(b) यदि सैकड़े का अंक 5 या 5 से बड़ा है तो हज़ार के स्थान को एक बढ़ा देंगे और इसके दाएँ तरफ से प्रत्येक अंक को 0 से बदल देंगे।



उदाहरण 19. **361820 और 36827 को दहाई, सैकड़े और हजार के स्थान तक सन्निकटन करो।**

हल : दी गई संख्याएँ हैं : 36182 और 36827

(i)	दहाई के निकटतम स्थान तक सन्निकटन	=36180
	दहाई के निकटतम स्थान तक सन्निकटन	=36830
(ii)	सैकड़े के निकटतम स्थान तक सन्निकटन	=36200
	सैकड़े के निकटतम स्थान तक सन्निकटन	=36800
(iii)	हज़ार के निकटतम स्थान तक सन्निकटन	=36000
	हज़ार के निकटतम स्थान तक सन्निकटन	=37000

1.7.1 जोड़फल, अंतर, गुणनफल और भागफल के बारे में आकलन करना (To estimate sum, difference, product & quotient)

बहुत सी स्थितियाँ ऐसी होती है जब हमें जोड़फल, अंतर, गुणनफल और भागफल के बारे में अनुमान लगाना होता है। किसी संख्या का किस स्थान तक सन्निकटन करना है, यह आँकड़ों की अपेक्षा और आवश्यकता पर निर्भर करता है। कई बार उच्च स्तर की शुद्धता की आवश्यकता होती है और कई बार हमें निष्कर्ष बहुत जल्दी चाहिए होता है जबकि शुद्धता का स्तर कम हो सकता है। इसलिए इन बातों का ध्यान रखना बहुत ज़रूरी है। आओ! कुछ उदाहरण से जानें।

उदाहरण 20. **सन्निकटन द्वारा 5290 + 17986 का आकलन कीजिए।**

(i) सैकड़े के स्थान तक सन्निकटन (ii) हज़ार के स्थान तक सन्निकटन

हल : (i) सैकड़े के स्थान तक सन्निकटन करने पर =

5290 + 17986 = 5300 + 18000

= 23300

(ii) हज़ार के स्थान तक सन्निकटन =

5290 + 17986 = 5000 + 18000

= 23000

आप वास्तविक संख्याओं का जोड़ करके जो कि 23300 है, पुष्टि कर सकते हो कि यह अर्थपूर्ण है।

उदाहरण 21. **सन्निकटन द्वारा 5673 – 436 का आकलन कीजिए।**

हल : हज़ार के निकटतम स्थान का सन्निकटन करने पर

5673 का सन्निकटन = 6000

436 का सन्निकटन = 0

आंकलन अंतर = 6000

परंतु, यह अर्थपूर्ण सन्निकटन नहीं है क्योंकि अंतर दोनों संख्याओं से बड़ा है।

सही सन्निकटन करने के लिए, आओ सैकड़े के निकटतम स्थान तक सन्निकटन करके देखते हैं।

5673 का सन्निकटन = 5700

436 का सन्निकटन = 400

आंकलन अंतर = 5700−400

= 5300

यह अर्थपूर्ण सन्निकटन है।

उदाहरण 22. **गुणनफल का आंकलन कीजिए।**

(a) 87 × 313 **(b) 898 × 785**

(c) 63 × 182 **(d) 81 × 479**

सन्निकटन का साधारण नियम
प्रत्येक गुणा की जाने वाली संख्या को उसके सबसे बड़े निकटतम स्थान तक सन्निकटन करें और सन्निकटित उपरान्त संख्याओं को गुणा करें।

हल : (a) 87 × 313

87 का दहाई के स्थान तक सन्निकटन = 90

313 का सैकड़े के स्थान तक सन्निकटन = 300

आंकलित गुणनफल = 90×300

= 27000

(b) 898 × 785

898 का सैकड़े के स्थान तक सन्निकटन = 900

785 का सैकड़े के स्थान तक सन्निकटन = 800

आंकलित गुणनफल = 900 × 800

= 720000

(c) 63 × 182

63 का दहाई के स्थान तक सन्निकटन = 60

182 का सैकड़े के स्थान तक सन्निकटन = 200

आंकलित गुणनफल = 60 × 200

= 12000

(d) 81 × 479

81 का दहाई के स्थान तक सन्निकटन = 80

479 का सैकड़े के स्थान तक सन्निकटन = 500

आंकलित गुणनफल = 80 × 500

= 40000

उदाहरण 23. **सन्निकटन के साधारण नियम का प्रयोग करते हुए 2437 ÷ 125 का भागफल पता करें।**

हल : 2437 ÷ 125

2437 का हजार के स्थान तक सन्निकटन = 2000

125 का सैकड़े के स्थान तक सन्निकटन = 100

आंकलित गुणनफल = 2000 ÷ 100

= 20

प्रश्नावली 1.3

1. साधारण नियम का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित का आंकलन कीजिए।
   (a) 837 + 987 (b) 783 – 427 (c) 1391 + 2783
   (d) 28292 – 21496
2. साधारण नियम का प्रयोग करते हुए निम्न का आंकलित गुणनफल पता करें।
   (a) 898 × 785 (b) 9 × 795 (c) 87 × 317
   (d) 9250 × 29
3. निकटतम सैकड़े के स्थान तक सन्निकटन करके आंकलित मूल्य (मान) पता करें।
   (a) 439 + 334 + 4317 (b) 108734 – 47599
4. दहाई के निकटतम स्थान तक आंकलन कीजिए।
   (a) 439 +334 + 4317 (b) 108734 – 47599

1.8 कोष्ठकों का प्रयोग (Use of Brackets)

कोष्ठक संकेतों का एक जोड़ा है जो कि संख्याओं को एक समूह में रखता है और कथनों को स्पष्ट करने में सहायक है।

साधारणत: प्रयोग में लाई जाने वाली कोष्ठक

( ) : **लघु कोष्ठक (Small Bracket)**

{ } : **मंझली कोष्ठक (Curly Bracket)**

[ ] : **बड़ी कोष्ठक (Square Bracket)**

यहाँ हम लघु कोष्ठक के बारे में बात करेंगे।

जैसे कि मान लीजिए ''3 और 7 के योग की 4 से गुणा''

कोष्ठक का प्रयोग करके हम लिख सकते हैं = 4 × (3+7)

कोष्ठकों से संबंधित उदाहरण निम्नलिखित हैं।

उदाहरण 24. **कोष्ठकों का प्रयोग करते हुए निम्न कथनों के लिए व्यंजक लिखें तथा सरल करें।**

(a) **तीन और चार के योग की सात से गुणा**

(b) **नौ और चार के योग की छह से गुणा**

(c) **अठारह और छह के अंतर को चार से भाग**

हल : (a) $7 \times (3 + 4) = 7 \times 7 = 49$

(b) $(9 + 4) \times 6 = 13 \times 6 = 78$

(c) $(18 - 6) \div 4 = 12 \div 4 = 3$

1.8.1 कोष्ठकों का प्रसार (खोलना) (हटना) (Expanding Brackets)

कोष्ठकों के प्रसार के लिए हमें वितरण गुण का प्रयोग करना होगा। वितरण गुण के अनुसार कोष्ठक के बाहर वाली संख्या अंदर वाली प्रत्येक संख्या के साथ एक जैसा संचालन करती है, जैसा कि निम्न दर्शाया गया है।

$a(b+c) = ab + ac$

$a(b-c) = ab - ac$

उदाहरण 25. **कोष्ठकों का प्रसार करके हल करो।**

(a) $7 \times (3 + 4)$ (b) $(9 + 4) \times 6$ (c) $(20 - 8) \div 4$

हल : (a) $7 \times (3 + 4) = 7 \times 3 + 7 \times 4$

$= 21 + 28$

$= 49$

(b) $(9 + 4) \times 6 = 9 \times 6 + 4 \times 6$

$= 54 + 24$

$= 78$

(c) $(20 - 8) \div 4 = (20 \div 4) - (8 \div 4)$

$= 5 - 2$

$= 3$

उदाहरण 26. **सरल करो।**

(a) 8×107 (b) 14×108

हॅल : (a) $8 \times 107 = 8 \times (100 + 7)$

$= 8 \times 100 + 8 \times 7$

$= 800 + 56$

$= 856$

(b) $14 \times 108 = (10 + 4) \times 108$

$= 10 \times 108 + 4 \times 108$

$= 10 \times (100 + 8) + 4 \times (100 + 8)$

$= 10 \times 100 + 10 \times 8 + 4 \times 100 + 4 \times 8$

$= 1000 + 80 + 400 + 32$

$= 1000 + 400 + 80 + 32$

$= 1512$

प्रश्नावली 1.4

1. निम्नलिखित को सरल करें।

(a)	13 × 104	(b)	102 × 105	(c)	6 × 107
(d)	16 × 106	(e)	201 × 205	(f)	22 × 102
(g)	6 ×(4 + 3)	(h)	(17 – 9) × 3	(i)	(20 + 4) ÷ 2

1.9 रोमन संख्यांक (Roman Numerals)

हम भारतीय और अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति के बारे में पहले ही पढ़ चुके हैं। एक और संख्या पद्धति भी है जो कि रोमन लोगों द्वारा बनाई गई और 900 इ.पू. से 300 इ.पू तक प्रयोग में लाई गई। रोमन संख्यांक पद्धति में किसी संख्या को दर्शाने के लिए केवल संकेतों का प्रयोग किया जाता है। रोमन संख्यांक पद्धति में 7 मूल संकेत हैं जो कि भिन्न-भिन्न संख्याओं को दर्शाने के लिए प्रयोग में लाए जाते हैं।

रोमन संकेत	I	V	X	L	C	D	M
हिंदू-अरेबिक	1	5	10	50	100	500	1000

- एक साधारण नियम यह भी है कि रोमन पद्धति के संकेत हाथ और उंगलियों के चित्रों में से लिए गए हैं।

एक संख्यांक पद्धति अभी भी कई स्थानों पर प्रयोग में लाई जाती है जैसे कि तुम्हारी कक्षा के बाहर (कक्षा VI) आदि. घड़ी में अंक, किताब के हिस्से ऐतिहासिक घटना दर्शाने के लिए जैसे विश्व युद्ध - I, विश्व युद्ध-II आदि।

याद रखें

हिंदू-अरेबिक संख्यांक पद्धति में प्रयोग किए गए संकेत 0 के लिए रोमन संख्यांक पद्धति में कोई संकेत नहीं है।

इन 7 संकेतों का प्रयोग करके हम किसी भी संख्या को लिख सकते हैं जिसके लिए निम्नलिखित नियमों का ध्यान रखना ज़रूरी होता है।

नियम 1. कोई भी संकेत जितनी बार दोहराया जाता है, उतनी बार ही इसका मान जुड़ता जाता है।

उदाहरण के लिए: II = 1 + 1 = 2

XXX = 10 + 10 + 10 = 30

CC = 100 + 100 = 200

यहाँ पर ध्यान देने योग्य है कि संकेत I, X, C, M कभी भी 3 से अधिक बार प्रयोग नहीं किए जा सकते और V, L, D कभी भी दोहराए नहीं जाते।

नियम 2. किसी बड़े मान वाले रोमन अंक के बाद आने वाला छोटे मान का रोमन अंक उसमें जुड़ जाता है।

उदाहरण के लिए: VI = 5 + 1 =6

VII = 5 +1 + 1 = 7

XIII = 10 + 1 + 1 + 1 = 13

XVII = 10 + 5 + 1 + 1 = 17

LXXV = 50 + 10 + 10 + 5 = 75

नियम 3: किसी बड़े मान वाले रोमन अंक से पहले आने वाला छोटे मान का रोमन अंक उसमें से घटाया जाता है।

उदाहरण के लिए: IV = 5 – 1 = 4

IX = 10 – 1 = 9

XL = 50 – 10 = 40

XC = 100 – 10 = 90

नियम 4: **संकेत** V, L, और D कभी भी अधिक मान के रोमन अंक के बायीं तरफ नहीं लिखे जाते अर्थात् V, L, D को कभी भी घटाया नहीं जाता।

I V X L C D M

- I, X, C को अधिक मान वाले संकेत से पहले लिखा जा सकता है अर्थात I, X, C को अधिक मान वाले रोमन अंक में से घटाया जा सकता है।
- I, X, C को उनके अगले 2 अधिक मान के रोमन अंकों में से ही घटाया जा सकता है।

  भाव I को V और X में से ही घटाया जा सकता है।

  X को L और C में से ही घटाया जा सकता है।

  C को D और M में से ही घटाया जा सकता है।
- V, L, D को कभी भी नहीं घटाया जाता।

नियम 5: यदि एक कम मान वाला रोमन अंक अधिक मान वाले रोमन अंकों के बीच आता है तो यह अपने बाद आने वाले अधिक मान वाले रोमन अंक में से घटाया जाता है।

उदाहरण के लिए: XIX = X + IX = 10 + (10 – 1) = 19

LXIV = L + X + IV = 50 + 10 + (5–1) = 64

नियम 6: यदि किसी रोमन अंक के ऊपर (बार) लगाई जाती है तो वह 1000 से गुणा हो जाएगा।

उदाहरण के लिए: $\overline{V}$ = 5000, $\overline{X}$ = 10000

आओ! इन नियमों का प्रयोग करके कुछ रोमन अंक लिखें।

1	=	I	
2	=	II	
3	=	III	
4	= 5 – 1 =	IV	(क्योंकि I को तीन से अधिक बार नहीं दोहराया जा सकता)
5	=	V	
6	=	VI	
7	=	VII	
8	=	VIII	
9	= 10 – 1 =	IX	(क्योंकि I को तीन से अधिक बार नहीं दोहराया जा सकता)
10	=	X	
20	= 10 + 10 =	10 + 10 =XX	
30	= 10 + 10 + 10 =	XXX	
40	= 50 – 10 =	XL	(क्योंकि X को तीन से अधिक बार नहीं दोहराया जा सकता)

45	= 40 + 5	=	XLV	
49	= 40 + 9	=	XLIX	(इसे 50 – 1= IL नहीं लिखा जा सकता क्योंकि I को
50		=	L	L में से नहीं घटाया जा सकता। I को V और X में से
60	= 50 + 10	=	LX	घटाया जा सकता है)
70	= 50 + 10 + 10	=	LXX	
80	= 50 + 10 + 10 + 10	=	LXXX	
90	= 100 – 10	=	XC	
100		=	C	
400	= 500 – 100	=	CD	
500		=	D	
900	= 1000 – 100	=	CM	
1000		=	M	

उदाहरण 27. रोमन संख्या पद्धाति अनुसार निम्नलिखित में से कौन अर्थहीन हैं?

(a) XXXX (b) LXIX (c) VL (d) LIV (e) IL

हल : (a) XXXX

क्योंकि X को 3 से अधिक बार नहीं लिखा जा सकता। इसलिए यह अर्थहीन है।

(b) LXIX = LX + IX = 60 + 9 = 69

यह अर्थपूर्ण है।

(c) VL

क्योंकि V को कभी भी घटाया नहीं जा सकता है, इसलिए यह अर्थहीन है।

इस लिए VL अर्थहीन ह्रै।

(d) LIV = L + IV = 50 + 4 = 54

LIV अर्थपूर्ण है।

(e) IL

I को केवल V और X में घटाया नहीं जा सकता L में से नहीं।

इसलिए यह अर्थहीन है।

उदाहरण 28. निम्नलिखित रोमन संख्याओं को हिंदू-अरेबिक संख्यांक पद्धति के अनुसार लिखें।

(a) LXXI (b) CXLV (c) CCXLI

(d) CLXVII (e) MCCXLI

हल : (a) LXXI = 50 + 10 + 10 + 1 = 71

(b) CXLV = 100 + 40 + 5 = 145

(c) CCXLII = C + C + XL + II = 100 + 100 + 40 + 2 = 242

(d) CLXVII = C + L + X + VII = 100 + 50 + 10 + 7 = 167

(e) MCCXLI = M + CC + XL + I = 1000 + 200 + 40 + 1 = 1241

उदाहरण 29. **निम्नलिखित को रोमन संख्यांक पद्धति के अनुसार लिखें।**

(a) 49 **(b) 82** **(c) 198**

(d) 541 **(e) 826**

हल :
(a) 49 = 40 + 9 = XLIX

(b) 82 = 50 + 30 +2 = LXXXII

(c) 198 = 100 + 90 + 8= CXCVIII

(d) 541 = 500 + 40 + 1 = DXLI

(e) 826 = 500 + 300 + 20 + 6 = DCCCXXVI

प्रश्नावली 1.5

1. रोमन संख्या पद्धति अनुसार निम्नलिखित में कौन अर्थहीन है?

   (a) IC (b) VD (c) XCVII

   (d) IVC (e) XM

2. निम्नलिखित रोमन संख्याओं को हिंदू-अरेबिक संख्यांक पद्धति के अनुसार लिखें।

   (a) XXV (b) XLV (c) LXXIX (d) XCIX

   (e) CLXIV (f) DCLXII (g) DLXIX (h) DCCLXVI

   (i) CDXXXVIII (j) MCCXLVI

3. निम्नलिखित को रोमन संख्यांक पद्धति के अनुसार लिखें।

   (a) 29 (b) 63 (c) 94 (d) 99

   (e) 156 (f) 293 (g) 472 (h) 638

   (i) 1458 (j) 948 (k) 199 (l) 499

   (m) 699 (n) 299 (o) 999 (p) 1000

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. अंकों की गिनती .... है।

   (a) 9 (b) 10 (c) 8 (d) अनंत

2. 1, 5, 2, 9 का प्रयोग करके बनी 4 अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या बताएँ:-

   (a) 9215 (b) 9512 (c) 5912 (d) 9521

3. 2, 0, 3, 7 का प्रयोग करके बनी 4 अंकों की छोटी से छोटी संख्या बताएँ:-

   (a) 0237 (b) 2037 (c) 7320 (d) 7023

4. निम्नलिखित में से कौन सी बढ़ते क्रम में है?

(a) 217, 271, 127, 721 (b) 217, 127, 721, 271

(c) 127, 217, 271, 721 (d) 721, 271, 217, 127

5. 23408 में 4 का अंकित मान क्या है?

(a) 4 (b) 400 (c) 40 (d) 468

6. 4123 में 2 का स्थानीय मान क्या होगा?

(a) 23 (b) 2 (c) 20 (d) 200

7. 76542 में 5 के स्थानीय और अंकित मान का अंतर क्या है?

(a) 537 (b) 45 (c) 0 (d) 495

8. 5 × 10000 + 3 × 100 + 2 × 10 + 2 = ...

(a) 5322 (b) 53022 (c) 50322 (d) 53202

9. चार लाख दो हज़ार तीन सौ पचास = ...

(a) 42351 (b) 402361 (c) 420351 (d) 4002351

10. 4 अंकों वाली कुल कितनी संख्याएँ हैं?

(a) 9999 (b) 9900 (c) 9000 (d) 9990

11. सत्रह मिलियन चौबीस हज़ार चौवन = ...

(a) 172454 (b) 170024054

(c) 170240054 (d) 17024054

12. 1 करोड़ = ... मिलियन

(a) 1 (b) 10 (c) 100 (d) 1000

13. 7213 का हज़ार के स्थान तक सन्निकटन

(a) 7200 (b) 7000 (c) 7210 (d) 7213

14. 45553 का सैकड़े के स्थान तक सन्निकटन

(a) 45500 (b) 45550 (c) 45600 (d) 45650

15. (9–4) × 6 = ...

(a) 30 (b) 54 (c) 78 (d) 64

16. निम्नलिखित में से किसके लिए रोमन पद्धति में संकेत नहीं है?

(a) 0 (b) 1 (c) 10 (d) 1000

17. रोमन संख्यांक पद्धति में कितने संकेत प्रयोग किए जाते हैं?

(a) 5 (b) 8 (c) 9 (d) 7

18. रोमन संख्या पद्धति अनुसार निम्नलिखित में से कौन अर्थहीन है?

(a) LXIX (b) XC (c) IL (d) LI

19. CLXVI = ...

(a) 164 (b) 144 (c) 176 (d) 166

20. XCIX + XLVI =

(a) CVL (b) CLV (c) CXLV (d) CXLIV

सीखने के परिणाम

इस अध्याय के पूरा होने के बाद विद्यार्थी

(i) संख्याओं को भारतीय और अंतर्राष्ट्रीय संख्यांक पद्धति के अनुसार पढ़ना और लिखने के योग्य है।

(ii) दैनिक जीवन में गणितक समस्याएँ हल करने के योग्य हैं।

(iii) संख्याओं से संबंधित मूल गतिविधियाँ कर सकते हैं और दैनिक जीवन में प्रयोग करने के योग्य हैं।

(iv) संख्याओं की आपस में तुलना करने के योग्य हैं।

(v) गणित की समस्याओं को हल करते समय कोष्ठकों का प्रयोग करने के योग्य हैं।

(vi) हिंदू अरबी अंक प्रणाली के साथ-साथ रोमन अंक प्रणाली का प्रयोग करने के योग्य हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (a) सबसे बड़ी = 30495

सबसे छोटी = 30945

(b) सबसे छोटी = 10029

सबसे बड़ी = 10920

2. (a) 3953, 5231, 6089, 6098

(b) 6073, 7392, 49905, 58904

(c) 9801, 25751, 36501, 38802

3. (a) 75003, 60632, 20051, 7600

(b) 3289, 2934, 2834, 667

(c) 92547, 88715, 45321, 1971

4. (a) 6432, 2346 (b) 9730, 3079

(c) 5430, 3045 (d) 7321, 1237

5. (a) 7732, 2237 (b) 5530, 3005

(c) 3320, 2003 (d) 4431, 1134

(e) 8852, 2258 (f) 3321, 1123

6. (a) छह लाख अड़तीस हज़ार नौ सौ पचहत्तर

(b) चौरासी हजार तीन सौ इक्कीस

(c) दो करोड़ नब्बे लाख इकहत्तर हज़ार अठावन

(d) छह करोड़ तीन हज़ार छह सौ आठ

7. (a) 9,86,06,873

नौ करोड़ छियासी लाख छह हज़ार आठ सौ तिहत्तर

(b) 76,35,172

छियत्तर लाख पैंतीस हज़ार एक सौ बहत्तर

(c) 8,97,00,057

आठ करोड़ सतानवे लाख सतावन

(d) 8,93,22,602

आठ करोड़ तिरानवे लाख बाईस हज़ार छह सौ दो

(e) 45,03,217

पैंतालीस लाख तीन हज़ार दो सौ सत्रह

(f) 9,00,32,045

नौ करोड़ बत्तीस हज़ार पैंतालीस

8. (a) 89,832,081

नवासी मिलियन आठ सौ बत्तीस हज़ार इक्यासी

(b) 6,543,374

छह मिलियन पाँच सौ तिरतालीस हजार तीन सौ चौहत्तर

(c) 88,976,306

अठासी मिलियन नौ सौ छियत्तर हज़ार तीन सौ छह

(d) 9,860,001

नौ मिलियन आठ सौ आठ हज़ार एक

(e) 90,032,045

नब्बे मिलियन पैंतीस हज़ार पैंतालीस

(f) 4,503,217

चार मिलियन पाँच सौ तीन हज़ार दो सौ सोलह

9. (a) 754000 (b) 9,53,74,523 (c) 647,525

(d) 72,332, 112 (e) 58,423,202 (f) 23,30,010

10. 90000000

11. (a) दस (b) दस (c) दस

(d) दस (e) दस

प्रश्नावली 1.2

1. (a) 5000 (b) 35000 (c) 20

(d) 50 (e) 2 (f) 12000

2. 2556

3. 880267

4. 740
5. 20
6. 4 किलोग्राम
7. 686659
8. 3022
9. 30466
10. 146

प्रश्नावली 1.3

1.	(a)	1800	(b)	400	(c)	4000	(d)	10000
2.	(a)	720000	(b)	8000	(c)	27000	(d)	270000
3.	(a)	5000	(b)	61100				
4.	(a)	5090	(b)	61130				

प्रश्नावली 1.4

1.	(a)	1352	(b)	10710	(c)	642	(d)	1696
	(e)	41205	(f)	2244	(g)	42	(h)	24
	(i)	12						

प्रश्नावली 1.5

1. a, b, d, e

2.	(a)	25	(b)	45	(c)	79	(d)	99		
	(e)	164	(f)	662	(g)	569	(h)	766		
	(i)	438	(j)	1246						
3.	(a)	XXIX	(b)	LXIII	(c)	XCIV	(d)	XCIX	(e)	CLVI
	(f)	CCXCIII	(g)	CDLXXII	(h)	DCXXXVIII			(i)	MCDLVIII
	(j)	CMXLVIII	(k)	CXCIX	(l)	CDXCIX	(m)	DCXCIX	(n)	CCXCIX
	(o)	CMXCIX	(p)	M						

बहुवैकल्पिक प्रश्न

(1)	b	(2)	d	(3)	b	(4)	c	(5)	a
(6)	c	(7)	d	(8)	c	(9)	b	(10)	c
(11)	d	(12)	b	(13)	b	(14)	c	(15)	a
(16)	a	(17)	d	(18)	c	(19)	d	(20)	c

W4J1N4

पूर्ण संख्याएँ 2

(WHOLE NUMBERS)

उद्देश्य

इस अध्याय में आप सींखेगे

(i) प्राकृतिक संख्याओं से पूर्ण संख्याओं तक विस्तृत संख्या प्रणाली को समझना।

(ii) पूर्ण संख्याओं को एक संख्या रेखा पर दर्शाना और संख्या रेखा पर काम करना।

(iii) पूर्ण संख्याओं की विशेषताओं को समझना।

(iv) पूर्ण संख्याओं से ज्यामिति नमूने समझना।

2.1 भूमिका (Introduction)

हमनें पहले ही प्राकृतिक संख्याओं के बारे में सीखा है (भाव 1,2,3,........) इस प्रकार की संख्याओं को प्राकृतिक संख्या कहा जाता है, यदि चालीस विद्यार्थी छठी कक्षा में मौजूद हैं। ये सभी विद्यार्थी खेल के मैदान में खेलने के लिए गए, फिर कक्षा में कितने विद्यार्थी रह गए? आपका जवाब होगा, कोई विद्यार्थी कक्षा के कमरे में मौजूद नहीं है, इस स्थिति में हम कह सकते हैं कि शून्य (0) विद्यार्थी कक्षा में मौजूद है।

संख्या '0' और प्राकृतिक संख्याओं भाव 1, 2, 3,.......... के समूह को पूर्ण संख्याएँ कहते हैं।

पूर्ण संख्याओं को अंग्रेजी के अक्षर W से दर्शाया जाता है।

इस प्रकार W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 .... }

2.2 प्राकृतिक संख्याओं और पूर्ण संख्याओं में सम्बन्ध (Relation between Natural Numbers and Whole Numbers)

N = {1, 2, 3, 4, 5,6 ,7, 8, 9, 10, 11 .... }

W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... }

पूर्ण संख्याओं के समूह में सभी प्राकृतिक संख्याएँ शामिल हैं।

- सभी प्राकृतिक संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ है।
- सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृतिक संख्याएँ नहीं हैं।

(क्योंकि '0' एक पूर्ण संख्या है परन्तु प्राकृतिक संख्या नहीं है)

- सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या 1 है।
- सबसे छोटी पूर्ण संख्या '0' है।
- सबसे बड़ी प्राकृतिक संख्या लिखी नहीं जा सकती क्योंकि किसी प्राकृतिक संख्या 1 जोड़ने पर हम उससे बड़ी प्राकृतिक संख्या प्राप्त करते है।
- सबसे बड़ी पूर्ण संख्या लिखी नहीं जा सकती क्योंकि किसी पूर्ण संख्या में 1 जोड़ने पर हम उससे बड़ी पूर्ण संख्या प्राप्त करते हैं।

2.3 एक पूर्ण संख्या के परवर्ती और पूर्ववर्ती (Sucessor and Predecessor of a Whole Number)

परवर्ती (Sucessor) : एक पूर्ण संख्या का परवर्ती उसमें 1 जोड़ कर प्राप्त होता है।

स्पष्ट है कि '0' का परवर्ती '1' है, 1 का परवर्ती 2 है, 2 का परवर्ती 3 है और इसी प्रकार प्रत्येक पूर्ण संख्या का परवर्ती होता है।

पूर्ववर्ती (Predecessor) : एक पूर्ण संख्या का पूर्ववर्ती उसमें से 1 घटा कर प्राप्त होता है। स्पष्ट है कि '2' का पूर्ववर्ती '1' है, '1' का पूर्ववर्ती '0' है, परन्तु पूर्ण संख्याओं में '0' का कोई पूर्ववर्ती नहीं होता। '0' के अलावा प्रत्येक पूर्ण संख्या का पूर्ववर्ती होता है।

उदाहरण 1. **निम्नलिखित के परवर्ती लिखो।**

(a) 40099 **(b) 1000**

हल : (a) 40099 का परवर्ती = 40099 + 1
= 40100

(b) 1000 का परवर्ती = 1000 + 1
= 1001

उदाहरण 2. **निम्नलिखित के पूर्ववर्ती लिखो।**

(a) 10000 **(b) 20099**

हल : (a) 10000 का पूर्ववर्ती = 10000 – 1
= 9999

(b) 20099 का पूर्ववर्ती = 20099– 1
= 20098

2.4 पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाना (Representation of Whole numbers on Number Line)

एक रेखा बनाएँ। उस पर एक बिंदु लें। इस बिंदु को '0' का नाम दें। '0' के दाईं ओर एक और बिंदु लें। उसे '1' का नाम दें। '0' और '1' बिंदुओं के बीच की दूरी को इकाई दूरी कहते हैं। इसी रेखा पर '1' के दाईं ओर इकाई दूरी पर एक बिंदु लें। उसे '2' का नाम दें। इसी विधि का प्रयोग करते हुए संख्या पर एक-एक इकाई की दूरी पर बिंदुओं को 3, 4, 5.......... नाम दो।

आप दाईं ओर किसी भी पूर्ण संख्या तक इस तरीके से जा सकते हैं। यह पूर्ण संख्याओं के लिए संख्या रेखा है। पूर्ण संख्याओं की उपरोक्त संख्या रेखा की तरफ देखते हुए हम देखते हैं कि

(a) शून्य के बाईं तरफ कोई पूर्ण संख्या नहीं है तथा प्रत्येक पूर्ण संख्या '0' शून्य की तरफ है तथा शून्य '0' से बड़ी है।

(b) पूर्ण संख्या जो कि दी गई पूर्ण संख्या के दाईं ओर स्थित होती है, दी गई पूर्ण संख्या से छोटी होती है, जैसे कि $5>3$, $7>6$ और इसी प्रकार

(c) एक पूर्ण संख्या जो कि दी गई पूर्ण संख्या के बाईं ओर स्थित होती है, दी गई पूर्ण संख्या से छोटी होती है, जैस कि $2<3$, $5<7$ और इसी प्रकार

संख्या रेखा को ऊर्ध्वाधर रूप (लंबकारी रूप) में भी बनाया जा सकता है।

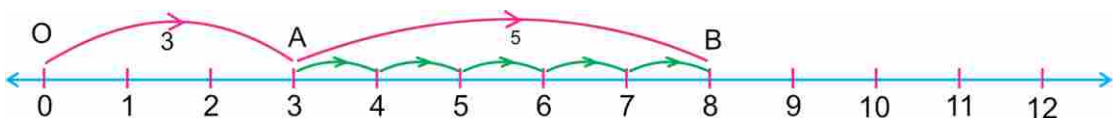
2.4.1 संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं का जोड़ (Addition of whole numbers on number line)

एक संख्या रेखा पर दो पूर्ण संख्याओं को जोड़ने के लिए हम नीचे दिए क्रमवार चरणों का प्रयोग करेंगे-

1. एक संख्या रेखा बनाओ और इस पर पूर्ण संख्याएँ अंकित करो।
2. संख्या रेखा पर दी गई पहली संख्या को अंकित करो।
3. दूसरी संख्या के बराबर यूनिट को पहली संख्या के दाईं ओर भेजो।
4. यह संख्या दो पूर्ण संख्याओं का जोड़ दर्शाती है।
5. इसी प्रकार तीन, चार और पाँच पूर्ण संख्याओं का जोड़ प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 3 **3+5 को संख्या रेखा पर दर्शाओ।**

हल : हम एक संख्या रेखा बनाते हैं और '0' से '3' तक दाईं ओर जाते हैं और इस बिंदु को A से दर्शाते हैं, अब A से शुरू करते हुए हम 5 चरण दाईं ओर आगे बढ़ते है और 'B' पर पहुँचते हैं।



$OA = 3$, $AB = 5$, $OB = 8$

इसलिए $OB = 3 + 5 = 8$

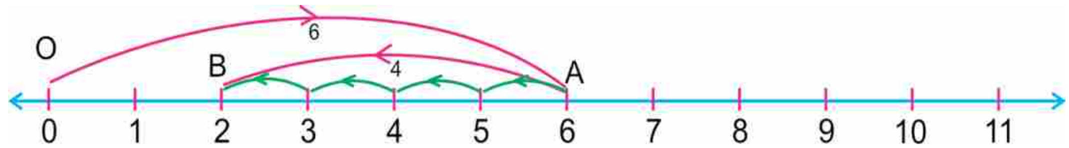
2.4.2 एक संख्या रेखा पर पूर्ण संख्या की घटाओ (Subtraction of Whole numbers on number line)

1. एक संख्या रेखा बनाओ और इस पर पूर्ण संख्याएँ अंकित करो।
2. संख्या रेखा पर दी गई पहली संख्या को अंकित करो।
3. पहली संख्या से शुरू करते हुए दूसरी संख्या जितने यूनिट को पहली संख्या के बाईं ओर भेजो।
4. यह संख्या, संख्या रेखा पर दी गई पूर्ण संख्याओं के वांछित अंतर को दर्शाती है।

उदाहरण 4 **संख्या रेखा पर 6-4 को दर्शाओ।**

हल - हम एक संख्या रेखा बनाते हैं।

बिन्दु '0' (शून्य) से शुरू करते हुए हम 6 कदम दाईं ओर जाते हैं और A पर पहुँच जाते हैं। अब 'A' से शुरू करते हुए हम A से 4 कदम बाईं ओर आते हैं तथा B पर पहुँचते हैं।



OA = 6. AB = 4

स्पष्ट रूप से OB = 6 – 4 = 2

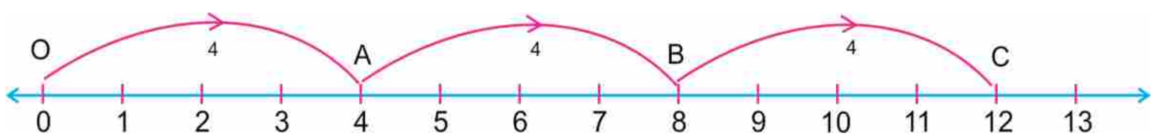
2.4.3 संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं की गुणा (Product of whole numbers on number line)

एक संख्या रेखा पर दो पूर्ण संख्याओं को गुणा करने के लिए हम नीचे दिए क्रमवार चरणों का पालन करेंगे।

1. एक संख्या रेखा बनाओ और इस पर पूर्ण संख्याएँ अंकित करो।
2. '0' से शुरू करते हुए हम '0' के दाईं ओर चले जाते हैं और इकाइयों को पहली संख्या से गिनते हैं।
3. रिकॉर्ड संख्या से (मिलती-जुलती) समान चालें अंतिम बिंदु पर पहुँचने के लिए चली जाती है।
4. जिस संख्या पर पहुंचते हैं वह दो पूर्ण संख्याओं के गुणनफल को दर्शाता है।

उदाहरण 5 **संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए 3×4 ढूँढ़ें।**

हल : एक संख्या रेखा बनाओ।



'0' से शुरू करते हुए हम 'A' पर पहुँचने के लिए '0' इकाई के दाईं तरफ 4 इकाइयों को आगे बढ़ाते हैं। हम 'A' से शुरू होने वाली दो और ऐसी चालें चलते हैं (प्रत्येक यूनिट की कुल 3 चालें)। अंत में 'C' पर पहुँचते हैं जो कि 12 को दर्शाता है।

इस लिए $3 \times 4 = 12$

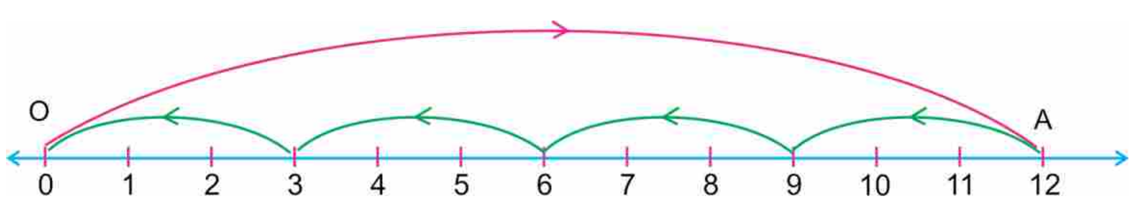
2.4.4 संख्या रेखा पर भाग (Division on number line)

एक संख्या रेखा पर दो पूर्ण संख्याओं को विभाजित करने के लिए हम निम्नांकित क्रमबद्ध चरणों का पालन करेंगे।

1. एक संख्या रेख खींचें तथा इस पर पूर्ण संख्याएं अंकित करें।
2. '0' से शुरू करते हुए 0 की दायीं ओर पहली संख्या पर पहुँचते हैं।
3. अब पहली संख्या से 0 की ओर दूसरी संख्या के बराबार छलाँगें लगाते हैं।
4. 0 तक पहुँचने के लिए लगाई गई छलाँगें की गिनती भागफल के बराबर है।

उदाहरण 6 **संख्या रेखा पर 12÷3 ढूँढें।**

हल : एक संख्या रेखा बनाओ।



हम 'A' पर पहुँचने के लिए '0' से शुरू करते हुए 12 इकाईयों को '0' के दाईं ओर चलते हैं। अब A से 3 इकाइयों को बाईं ओर ले जाओ, जब तक '0' पर नहीं पहुँच जाते। हम देखते हैं कि यहाँ 4 चाले हैं।

इसलिए $12 \div 3 = 4$

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दो।
   (a) सबसे छोटी पूर्ण संख्या लिखो।
   (b) सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या लिखो।
   (c) पूर्ण संख्याओं में '0' का परवर्ती लिखो।
   (d) पूर्ण संख्याओं में '0' का पूर्ववर्ती लिखो।
   (e) सबसे बड़ी पूर्ण संख्या लिखो।
2. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य और कौन से असत्य है?
   (a) '0' सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या है।
   (b) '0' सबसे छोटी पूर्ण संख्या है।
   (c) प्रत्येक पूर्ण संख्या एक प्राकृतिक संख्या है।
   (d) प्रत्येक प्राकृतिक संख्या एक पूर्ण संख्या है।
   (e) एक (1) सबसे छोटा पूर्ण अंक है।
   (f) प्राकृतिक संख्याओं में '1' का कोई पूर्ववर्ती नहीं होता।
   (g) पूर्ण संख्याओं में '1' का कोई पूर्ववर्ती नहीं होता।
   (h) दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या का परवर्ती तीन अंकों की छोटी से छोटी संख्या होता है।
   (i) दो अंकों की संख्या का परवर्ती हमेशा दो अंकों का होता है।
   (j) 299 का पूर्ववर्ती 300 है।
   (k) 499 का परवर्ती 500 है।
   (l) दो अंकों की संख्या का पूर्ववर्ती कभी भी एक अंक की संख्या नहीं होता।
3. निम्नलिखित में से प्रत्येक का परवर्ती (Successor) लिखो।
   (a) 100909 (b) 4630999
   (c) 830001 (d) 99999
4. निम्नलिखित में से प्रत्येक का पूर्ववर्ती (Predecessor) लिखो।
   (a) 1000 (b) 208090
   (c) 7654321 (d) 12576
5. निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाओ।
   2, 0, 3, 5, 7, 11, 15
6. 22 और 43 के बीच कितनी पूर्ण संख्याएँ हैं।
7. निम्नलिखित में से प्रत्येक को दर्शाने के लिए संख्या रेखा बनाओ।
   (a) $3 + 2$ (b) $4 + 5$ (c) $6 + 2$
   (d) $8 - 3$ (e) $7 - 4$ (f) $7 - 2$
   (g) 3×3 (h) 2×5 (i) 3×5
   (j) $9 \div 3$ (k) $12 \div 4$ (l) $10 \div 2$

8. < या > चिन्हों से खाली स्थान भरें-

(a) 25 .... 205 (b) 170 107

(c) 415 ....514 (d) 10001 9999

(e) 2300014 .... 2300041 (f) 99999 888888

2.5 पूर्ण संख्याओं के गुण (Properties of whole numbers)

हम पहले ही संख्याओं के जोड़, घटाओ, गुणा और भाग के चार बुनियादी कामों के बारें में सीख चुके हैं। आओ, अब हम इन संचालन की विशेषता का पूर्ण संख्याओं पर अध्ययन करें।

⇒ संवृत गुण (Closure Property)

- **जोड़ :** पूर्ण संख्याएँ जोड़ के अधीन संवृत होती है।

  जैसे कि हम जानते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का जोड़ भी एक पूर्ण संख्या होती है।

उदाहरणस्वरूप $7 + 5 = 12$ एक पूर्ण संख्या है।

$5 + 6 = 11$ एक पूर्ण संख्या है।

$0 + 4 = 4$ एक पूर्ण संख्या है।

इसलिए **पूर्ण संख्या + पूर्ण संख्या = पूर्ण संख्या**

- **गुणा :** पूर्ण संख्याएँ गुणा के अधीन भी संवृत होती है।

  जैसे कि हम जानते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं की गुणा भी एक पूर्ण संख्या होती है।

उदाहरणस्वरूप $7 \times 3 = 21$ एक पूर्ण संख्या है।

$4 \times 6 = 24$ एक पूर्ण संख्या है।

$0 \times 3 = 0$ एक पूर्ण संख्या है।

इसलिए **पूर्ण संख्या × पूर्ण संख्या = पूर्ण संख्या**

- **घटाव :** पूर्ण संख्याएँ घटाव के अधीन संवृत नहीं होती।

उदाहरणस्वरूप $7 - 9 = ?$ एक पूर्ण संख्या नहीं है।

$3 - 7 = ?$ एक पूर्ण संख्या नहीं है।

$7 - 4 = 3$ एक पूर्ण संख्या है।

- **भाग :** पूर्ण संख्याएँ भाग के अधीन संवृत नहीं होती।

उदाहरणस्वरूप $8 \div 4 = 2$ एक पूर्ण संख्या है।

परन्तु $5 \div 7 = \frac{5}{7}$ एक पूर्ण संख्या नहीं है।

$6 \div 5 = \frac{6}{5}$ एक पूर्ण संख्या नहीं है।

शून्य से भाग (Division by Zero)

शून्य से भाग देने के अर्थ है कि उस संख्या को बार-बार घटाना।

आओ 8 ÷ 2 पता करें।

8	6	4	2
–2	–2	–2	–2
6	4	2	0

8 में से 2 को बार-बार घटाओ।

4 चरणों के बाद हम '0' पर पहुँच गए।

∴ $8 \div 2 = 4$

इसलिए $8 \div 2 = 4$

आओ, अब 2 ÷ 0 की कोशिश करें।

2	2	2	2
– 0	–0	–0	–0
2	2	2	2

प्रत्येक बार हमें दोबारा '2' मिलते हैं।

क्या वह कभी रुकेगा?

नहीं

इसलिए 2 ÷ 0 परिभाषित नहीं है।

हम कहते हैं कि 2 ÷ 0 परिभाषित नहीं है।

नोट- शून्य से भाग परिभाषित नहीं है।

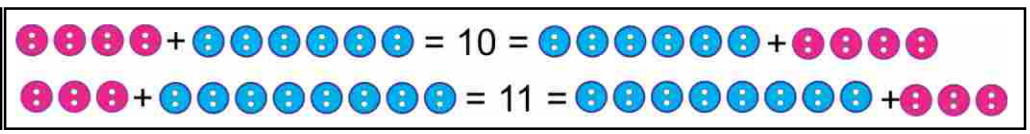
⇒ क्रम विनिमेयता गुण (Commutative Property)

- **जोड़ :** पूर्ण संख्याओं के जोड़ के अन्तर्गत जोड़फल क्रम बढ़ाता है। आप दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ सकते हो। जैसे कि $a + b = b + a$

  उदाहरणस्वरूप $4 + 6 = 10 = 6 + 4$

  $3 + 8 = 11 = 8 + 3$

बटन क्रिया



- **गुणा :** पूर्ण संख्याओं की गुणा के अन्तर्गत गुणनफल क्रम विनिमय है। आप दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में गुणा कर सकते हो। जैसे कि $a \times b = b \times a$

  उदाहरणस्वरूप $4 \times 5 = 20 = 5 \times 4$

  $3 \times 6 = 18 = 6 \times 3$

- **घटाव :** परन्तु घटाव, पूर्ण संख्याओं के लिए क्रम विनिमय नहीं है। घटाव के मामले में, यदि हम पूर्ण संख्याओं के क्रम को बदलते हैं तो परिणाम एक जैसा नहीं होता। $a - b \neq b - a$ (a और b पूर्ण संख्याएँ हैं)

  उदाहरणस्वरूप $10 - 3 = 7$

  $3 - 10 \neq 7$

- **भाग :** इसी प्रकार भाग, पूर्ण संख्याओं के लिए क्रम विनिमय नहीं है।

  उदाहरणस्वरूप $12 \div 4 = 3$

  $4 \div 12 \neq 3$

  $a \div b \neq b \div a$ (a और b दो अलग-अलग संख्याएँ हैं, $a \neq 0, b \neq 0$)

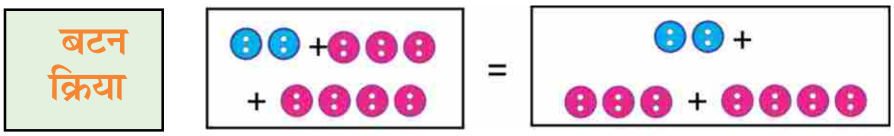
⇒ सहचारिता (Associativity)

- **जोड़ :** जोड़ पूर्ण संख्याओं के लिए सहचारी (सहयोगी) है, यदि a, b, c तीन पूर्ण तो $(a+b) + c = a + (b + c)$

उदाहरणस्वरूप $(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$

और $2 + (3+4) = 2 + 7 = 9$

$\Rightarrow (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$



- **गुणनफल** भी पूर्ण संख्याओं के लिए सहचारी (सहयोगी) है। यदि a, b, c तीन पूर्ण संख्याएँ हैं तो $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

उदाहरणस्वरूपं $(2\times3) \times4 = 6 \times 4 = 24$

$2 \times (3 \times 4) = 2 \times 12 = 24$

इसलिए $(2\times3) \times 4 = 2\times (3 \times 4)$

- **घटाव और भाग (Subtraction & Division)** घटाओ और भाग पूर्ण संख्याओं के लिए सहचारी (सहयोगी) नहीं है। यदि a, b, c, तीन पूर्ण संख्याएँ हैं तो

$(a - b) - c \neq a - (b - c)$

और $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$

⇒ तत्समक का अस्तित्व (Existence of Identity)

- **योज्य तत्समक (Additive Identity)**

यदि a कोई पूर्ण संख्या हो तो

$a + 0 = a = 0 + a$

दूसरे शब्दों में, किसी भी पूर्ण संख्या और शून्य का जोड़ वहीं पूर्ण संख्या होती है। पूर्ण संख्या '0' शून्य को योज्य तत्समक कहा जाता है।

- **गुणात्मक तत्समक (Multiplicative Identity)**

$a \times 1 = a = 1 \times a$

दूसरे शब्दों में, किसी भी पूर्ण संख्या और 1 का गुणनफल वही पूर्ण संख्या होती है। पूर्ण संख्या 1 को गुणात्मक तत्समक कहा जाता है।

- पूर्ण संख्याओं की घटाओ और भाग के जोड़ क्रमविनिमय गुण के उचित न होने की तरह तत्समक अवयव (Identity Elements) के अन्तर्गत उचित नहीं होता।

योग पर गुणन का वितरण या बंटन गुण
Distributivity of Multiplication over Addition

यदि a, b, c तीन पूर्ण संख्याएँ हैं।

तब (i) $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ (ii) $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$

दूसरे शब्दों में पूर्ण संख्याओं की गुणा उनके जोड़ के ऊपर बाँटता हैं।

Verification (पड़ताल) : इस गुण की पड़ताल के लिए हम कोई तीन पूर्ण संख्याएँ a, b, c लेते हैं और नीचे दर्शाए गए a× (b+c) और a ×b + a× c का मूल्य पता करते हैं।

पूर्ण अंक a, b, c	व्यंजक a× (b+c)	व्यंजक a×b + a×c	क्या a× (b+c) = a×b+a×c हैं?
2, 3, 5	2 × (3+5) = 2×8 = 16	2×3+2×5 = 6 +10 = 16	हाँ
3, 7, 15	3 × (7+15) = 3×22 = 66	3 × 7 + 3× 15 = 21 + 45 = 66	हाँ
0, 4, 9	0×(4+9) = 0× 13 = 0	0 × 4+ 0 × 9 = 0 + 0 = 0	हाँ

हम देखते हैं कि व्यंजक a × (b+c) और a×b + a× c प्रत्येक स्थिति में बराबर हैं।

व्यवकलन (घटाव) पर गुणन का वितरण या बंटन गुण
Distributivity of Multiplication over Subtraction

पूर्ण संख्याओं का गुणनफल उनकी घटाओ पर भी वितरण या बंटन होता है। अन्य शब्दों में यदि a, b, c, पूर्ण संख्याएँ हैं जैसे कि b>c, तब

(i) $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

(ii) $(b - c) \times a = b \times a - c \times a$

उदाहरण 7. **उपयुक्त क्रम में लगाकर गुणनफल पता करो।**

(a) 25 × 4 × 384 **(b) 25 × 9 × 40 × 22637**

हल : (a) 25 × 4 × 384 = (25 × 4) × 384
= 100 × 384 = 38400

(b) 25 × 9 × 40 × 25637 = (25 × 40) × 9 × 25637
= 1000 × 230733
= 230733000

उदाहरण 8. **उपयुक्त गुण का प्रयोग करते हुए पूर्ण संख्याओं का गुणनफल पता करो।**

(a) 187 × 107 **(b) 42 × 96**

हल : (a) 187 × 107 = 187 × (100+7)
= 187 × 100 + 187 × 7
= 18700 + 1309
= 20009

योग पर गुणन का वितरण या बंटन गुण

(b) 42 × 96 = 42 × (100–4)
= 42 × 100 – 42 × 4
= 4200 – 168
= 4032

व्यवकलन (घटाव) पर गुणन का वितरण या बंटन गुण

उदाहरण 8 **गुणा के वितरण या बंटन गुण का प्रयोग करते हुए सरल करो।**

(a) $15 \times 32 + 15 \times 68$ **(b)** $125 \times 215 - 125 \times 15$

हल : (a) $15 \times 32 + 15 \times 68 = 15 \times (32 + 68)$

$= 15 \times 100$

$= 1500$

(योग पर गुणा का वितरण गुण का प्रयोग करते हुए)

(b) $125 \times 215 - 125 \times 15$

$= 125 \times (215 - 15)$

$= 125 \times 200$

$= 25000$

(व्यवकलन पर गुणा का वितरण बंटन गुण प्रयोग करते हुए)

उदाहरण 9 **4567 को 2354 द्वारा वास्तविक वितरण (लंबी वितरण प्रक्रिया) द्वारा भाग करो और परिणाम की ऐलगोरिथम (Algorithm) नियमबद्ध ढंग से जाँच करो।**

हल :

```
234 ) 4567 ( 19
      234↓
      2227
      2106
       121
```

यहाँ भाज्य (Dividend) = 4567, भाजक (Divisor) = 234

भागफल (Quotient) = 19, शेष (Remainder) = 121

जाँच/पड़ताल : कलन विधि द्वारा (By Division Algorithm)

भाज्य = भाजक × भागफल + शेष

$4567 = (234 \times 19) + 121$

या $4567 = 4446 + 121$

या $4567 = 4567$

यह सच है।

इसलिए पड़ताल सही है।

उदाहरण 10 **13 से विभाजित होने वाली चार अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या कौन सी है?**

हल : चार अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या = 9999

आओ इसे 13 से भाग करें।

```
13 ) 9999 ( 769
    -91↓
      89
     -78↓
      119
     -117
        2
```

9999 को 13 से भाग करने पर हमें शेष 2 प्राप्त होता है, तो हम 9999 में से 2 घटाते हैं ताकि दी गई संख्या को 13 से पूरा पूरा विभाजित किया जा सके।

इसलिए 9999−2=9997 चार अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या है जो 13 से विभाजित होती है।

प्रश्नावली 2.2

1. सही क्रम से पदों का जोड़ पता करो:–

   (a) $837 + 208 + 363$ (b) $1962 + 453 + 1538 + 647$

2. सही क्रम से पदों का गुणनफल पता करो:–

   (a) $2 \times 1497 \times 50$ (b) $4 \times 263 \times 25$

   (c) $8 \times 163 \times 125$ (d) $963 \times 16 \times 25$

   (e) $5 \times 171 \times 60$ (f) $125 \times 40 \times 8 \times 25$

   (g) $30921 \times 25 \times 40 \times 2$ (h) $4 \times 2 \times 1932 \times 125$

   (i) $5462 \times 25 \times 4 \times 2$

3. निम्नलिखित में प्रत्येक का वितरण या बंटन गुण से मान पता करो। (Distributive Property)

   (a) $(649\times8) + (649\times2)$ (b) $(6524 \times 69) + (6524 \times 31)$

   (c) $(2986\times35)+(2986\times65)$ (d) $(6001 \times 172) - (6001 \times72)$

4. निम्नलिखित के मान पता करो।

   (a) $493 \times 8 + 493 \times 2$ (b) $24579 \times 93 + 7 \times 24579$

   (c) $3845 \times 5 \times 782 + 769 \times 25\times 218$

   (d) $3297 \times 999 + 3297$

5. सही गुणों का प्रयोग करके गुणनफल पता करो:–

   (a) 738×103 (b) 854×102 (c) 258×1008

   (d) 736×93 (e) 816×745 (f) 2032×613

6. किसी टैक्सी ड्राइवर ने अपनी गाड़ी की पेट्रोल की टंकी में सोमवार को 40 लीटर पेट्रोल डलवाया। यदि पेट्रोल का मूल्य ₹78 प्रति लीटर हो तो उसने पेट्रोल पर कुल कितना खर्च किया?

7. एक दूधवाला एक होटल को सुबह 52 लीटर दूध देता है और शाम को 68 लीटर दूध देता है। यदि दूध का मूल्य ₹35 प्रति लीटर है तो दूध वाले को हर रोज़ कितनी राशि मिलती है?

8. हम जानते हैं कि $0\times0=0$। क्या कोई और पूर्ण संख्या है जो अपने आप से गुणा होने पर गुणनफल के रूप में अपने आप को संख्या के बराबर कर देती है? संख्या पता करो।

9. खाली स्थान भरो:–

   (a) 15×0 = ... (b) $15 + 0$ = ...

   (c) $15 - 0$ = ... (d) $15 \div 0$ = ...

   (e) 0×15 = ... (f) $0 + 15$ = ...

   (g) $0 \div 15$ = ... (h) 15×1 = ...

   (i) $15 \div 1$ = ... (j) $1 \div 1$ = ...

10. दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल शून्य है, आप क्या परिणाम निकालते हैं। उदाहरण देकर समझाएँ।

11. निम्नलिखित का मिलान करो:-

(i)	$537 \times 106 = 537 \times 100 + 537 \times 6$	(a) गुणा अधीन क्रमविनिमयता
(ii)	$4 \times 47 \times 25 = 4 \times 25 \times 47$	(b) योग अधीन क्रमविनिमयता
(iii)	$70 + 1923 + 30 = 70 + 30 + 1923$	(c) योग पर गुणा का वितरण या बंटन

2.6 पूर्ण संख्याओं में नमूने (Patterns in whole numbers)

इस भाग में हम बिन्दियों से बनी आरम्भिक शक्लों में संख्याओं का प्रबन्ध करने की कोशिश करेंगे। वह आकार जो हम लेते हैं, एक रेखा, एक आयत, एक वर्ग, एक त्रिभुज, प्रत्येक संख्या को इनमें से किसी रूप में प्रबंधित किया जाना चाहिए, किसी और चित्र की आज्ञा नहीं है।

2.6.1 रेखाखण्डों द्वारा पूर्ण संख्याओं को दर्शाना (Representing whole numbers by line segments)

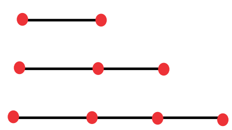
यदि '•' 1 को दर्शाता है, तो 2, 3, 4, 5 .... रेखाखण्डों द्वारा निम्नलिखित ढंग से दर्शाए जा सकते हैं।

नंबर 2 के रूप में दर्शाया गया है

नंबर 3 के रूप में दर्शाया गया है

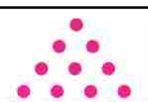
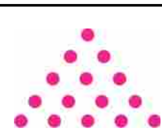
नंबर 4 के रूप में दर्शाया गया है

और आदि



2.6.2 त्रिभुजाकार संख्याएँ (Triangular Numbers)

क्योंकि पूर्ण संख्याओं को त्रिभुजों द्वारा दर्शाया जा सकता है। ऐसी स्थिति को त्रिभुजाकार संख्याएँ कहा जाता है। 1, 3. 6, 10, 15 कुछ त्रिभुजाकार संख्याएँ हैं। मान लो '•' 1 को दर्शाता है। नीचे दी सारणी में त्रिभुज द्वारा पूर्ण संख्याओं की प्रतिनिधता दर्शाई गई है।

Triangular Number त्रिभुजाकार संख्याएँ	Representation प्रतिनिधता	Pattern नमूने
1		पहली त्रिभुजाकार संख्या = $\frac{1 \times 2}{2} = 1$
3		दूसरी त्रिभुजाकार संख्या = $\frac{2 \times 3}{2} = 3$
6		तीसरी त्रिभुजाकार संख्या = $\frac{3 \times 4}{2} = 6$
10		चौथी त्रिभुजाकार संख्या = $\frac{4 \times 5}{2} = 10$
15		पाँचवीं त्रिभुजाकार संख्या = $\frac{5 \times 6}{2} = 15$

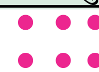
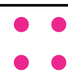
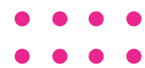
1 त्रिभुजाकार और वर्ग संख्या दोनों है।

त्रिभुजाकार संख्याओं द्वारा प्राप्त उपरोक्त नमूनों को देखने से हम निम्नलिखित नियम बना सकते हैं।

nवीं त्रिभुजाकार संख्या = $\frac{n \times (n+1)}{2}$

2.6.3 वर्गों और आयतों द्वारा पूर्ण संख्याओं को दर्शाना (Representing whole numbers by squares and Rectangles)

कुछ पूर्ण संख्याएँ वर्गों द्वारा दर्शाई जा सकती हैं और कई आयतों द्वारा जैसे कि नीचे दिखाया गया है।

वर्ग संख्या Square Number	प्रस्तुतिकरण Representation	आयताकार संख्या Rectangular number	प्रतिनिधता प्रस्तुतिकरण
1		6	
4		8	
9		10	

अब सारणी को पूरा करो।

संख्या Number	रेखा Line	आयत Rectangle	वर्ग Square	त्रिभुज Triangle
2	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं
3	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ
4	हाँ	हाँ	हाँ	नहीं
5	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

2.7 नमूनों के निरीक्षण (Patterns observations)

नमूनों के निरीक्षण क्रियाओं को सरल बनाने के लिए आपका मार्गदर्शन कर सकते हैं। निम्नलिखित का अध्ययन करो।

(a) $237 + 9 = 237 + 10 - 1 = 247 - 1 = 246$

(b) $237 - 9 = 237 + 10 - 1 = 227 + 1 = 228$

(c) $237 + 99 = 237 + 100 - 1 = 337 - 1 = 336$

(d) $237 - 99 = 237 - 100 + 1 = 137 + 1 = 138$

क्या यह नमूना आपको 9,99,999...... बनाने के लिए संख्याओं की जोड़ या घटाव में मदद करता है?

यह एक ओर नमूना है।

(a) $84 \times 9 = 84 \times (10-1) = ?$

(b) $84 \times 99 = 84 \times (100 - 1) = ?$

(c) $84 \times 999 = 84 \times (1000-1) = ?$

क्या आपको संख्या जिसका रूप 9,99,999........ हो के साथ किसी संख्या को गुणा करने का आसान तरीका (Shortcut) पता है।

ऐसे आसान तरीके (Shortcut) सवाल को जुबानी हल करने योग्य बनाते हैं।

नीचे दिया पैटरन 5 या 25 या 125 से गुणा करने के तरीके का सुझाव देता है।

(a) $96 \times 5 = 96 \times \frac{10}{2} = \frac{960}{2} = 480$

(b) $96 \times 25 = 96 \times \frac{100}{4} = \frac{9600}{4} = 2400$

(c) $96 \times 125 = 96 \times \frac{1000}{8} = \frac{96000}{8} = 12000$

प्रश्नावली 2.3

1. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल शून्य है, क्या हम कह सकते हैं कि दोनों में से एक या दोनों शून्य होंगे? उदाहरण देकर स्पष्ट करें।
2. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल शून्य है, क्या हम कह सकते है कि उन दोनों में से एक या दोनों 1 होंगे? उदाहरण देकर स्पष्ट करें।
3. नीचे दिए रूप को देखो और रिक्त स्थान भरो:–

1×1	=	1
11×11	=	121
111×111	=	12321
1111×1111	=	....
11111×11111	=	....

4. नमूने का निरीक्षण करो और रिक्त स्थान भरो:-

$$1 \times 9 + 1 = 10$$
$$12 \times 9 + 2 = 110$$
$$123 \times 9 + 3 = 1110$$
$$1234 \times 9 + 4 = 11110$$
$$12345 \times 9 + 5 = \text{................}$$
$$123456 \times 9 + 6 = \text{................}$$

5. आयताकार, वर्ग या त्रिभुजाकार नमूनों के अनुसार 24 से 30 तक की संख्याओं को दर्शाओ।

6.

$$1 = 1 \times 1 = 1$$
$$1+3 = 2 \times 2 = 4$$
$$1+3+5 = 3 \times 3 = 9$$
$$1+3+5+7 = 4 \times 4 = 16$$

ऊपर दिए गये नमूने का अध्ययन करो और जोड़ पता करो

(a) पहली 12 विषम संख्याओं का।

(b) पहली 50 विषम संख्याओं का।

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. सबसे छोटी पूर्ण संख्या है :

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

2. सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या है :

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

3. 38899 का परवर्ती है :

(a) 39000 (b) 38900 (c) 39900 (d) 38800

4. 24100 का पूर्ववर्ती है :

(a) 24999 (b) 24009 (c) 24199 (d) 24099

5. कथन 4+3=3+4 दर्शाता है:

(a) संवृत (b) सहचारिता

(c) जोड़ क्रम विनिमयता गुण (d) तत्समक

6. निम्नलिखित में से कौन सा योज्य तत्समक (Additive Identity) है?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

7. गुणात्मक तत्समक (Multiplicative Identity) है?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

8. $15 \times 32 + 15 \times 68 =$

(a) 1400 (b) 1600 (c) 1700 (d) 1500

9. 13 से विभाजित होने वाली चार अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या है।

(a) 9997 (b) 9999 (c) 9995 (d) 9991

10. तीन अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या का परवर्ती है-

(a) 100 (b) 998 (c) 1001 (d) 1000

सीखने के परिणाम

इस अध्याय के पूरा होने के बाद विद्यार्थी :

(i) पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाने/निरूपित करने के योग्य हैं।

(ii) पूर्ण संख्याओं पर संख्या रेखा की मदद से अंक गणितीय क्रियाएँ करने के योग्य हैं।

(iii) पूर्ण संख्याओं की अलग-अलग विशेषताओं/गुणों का उपयोग करने के योग्य हैं।

(iv) दिए गए पूर्ण अंकों के अलग-अलग ज्यामितीय नमूने बनाने के योग्य हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 2.1

1. (a) 0 (b) 1 (c) 1(d) संभव नहीं (e) संभव नहीं

2. (a) F (b) T (c) F (d) T (e) F
(f) T (g) F (h) T (i) F (j) F
(k) T (l) F

3. (a) 100910 (b) 4631000 (c) 830002 (d) 100000

4. (a) 999 (b) 208089 (c) 7654320 (d) 12575

6. 20

8. (a) < (b) > (c) < (d) > (e) <
(f) >

प्रश्नावली 2.2

1. (a) 1408 (b) 4600

2. (a) 149700 (b) 26300 (c) 16300 (d) 385200 (e) 51300
(f) 1000000 (g) 61842000 (h) 1932000 (i) 1092400

3. (a) 64900 (b) 652400 (c) 298600 (d) 600100

4. (a) 49300 (b) 2457900 (c) 19225000

(d) 3297000

5. (a) 76014 (b) 87108 (c) 260064

(d) 68448 (e) 607920 (f) 1245616

6. Rs. 7020

7. Rs. 3500

8. (a) 0 (b) 15 (c) 15 (d) अपरिभाषित (e) 0

(f) 15 (g) 0 (h) 15 (i) 15 (j) 1

11. (i) $\rightarrow$ (c)

(ii) $\rightarrow$ (a)

(iii) $\rightarrow$ (b)

प्रश्नावली 2.3

3. $1111 \times 1111 = 1234321$

$11111 \times 11111 = 123454321$

4. $12345 \times 9 + 5 = 111110$

$123456 \times 9 + 6 = 1111110$

5. 28

6. (a) $12 \times 12 = 144$ (b) $50 \times 50 = 2500$

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. (a) **2.** (b) **3.** (b) **4.** (d) **5.** (c)

6. (a) **7.** (b) **8.** (d) **9.** (a) **10.** (d)

3

संख्याओं के साथ खेलना

(PLAYING WITH NUMBERS)

उद्देश्य

इस अध्याय में आप सीखेंगे

(i) गुणनखण्ड और गुणजों को समझना।

(ii) भाज्य-अभाज्य संख्याओं, सम-विषम संख्याओं आदि के बारे में।

(iii) अलग-अलग अंकों की विभाज्यता (भाज्य योग्यता) के बारे में।

(iv) म.स.व और ल.स.व की जानकारी प्राप्त करना और उनका दैनिक जीवन में व्यावहारिक प्रयोग करना।

3.1 भूमिका (Introduction)

पिछली कक्षाओं में, हम ने गुणनखंड, गुणज, भाज्य और अभाज्य संख्याओं के बारे में पढ़ा है। इस अध्याय में, हम इन अवधारणाओं की समीक्षा करेंगे और इन धारणाओं के नए गुणों की जानकारी प्रभावी उदाहरण लेकर प्राप्त करेंगे और इस प्रकार अपने ज्ञान का दायरा और विस्तृत करेंगे।

3.2 गुणनखण्ड (Factors)

विधिता 12 गेंदों को इस प्रकार रखना चाहती है कि प्रत्येक पंक्ति में गेंदों की संख्या बराबर हो।

→ 1 पंक्ति में 12 गेंदें

गेंदों की कुल संख्या = $1 \times 12 = 12$

→ 2 पंक्तियों में छह-छह गेंदें।

गेंदों की कुल संख्या = $2 \times 6 = 12$

→ तीन पंक्तियों में चार-चार गेंदें

गेंदों की कुल संख्या = 3 × 4 = 12

→ चार पंक्तियों में तीन-तीन गेंदें

गेंदों की कुल संख्या = 4 × 3 = 12

→ 12 गेंदों को 5 पंक्तियों में बराबर-बराबर रखना संभव नहीं।

→ 6 पंक्तियों में दो-दो गेंदें।

गेंदों की कुल संख्या = 6 × 2 = 12

→ 12 गेंदों को 7, 8, 9, 10, 11 पंक्तियों में बराबर संख्या रखना संभव नहीं।

→ 12 पंक्तियों में 1–1 गेंद

गेंदों की कुल संख्या = 12 × 1 = 12

यहाँ हम देखते हैं कि 12 को दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में अलग-अलग प्रकार से लिखा जा सकता है।

$12 = 1 \times 12$, $12 = 2 \times 6$, $12 = 3 \times 4$,

$12 = 12 \times 1$, $12 = 6 \times 2$, $12 = 4 \times 3$

इस प्रकार 1, 2, 3, 4, 6 और 12 संख्या 12 को पूरा पूरा भाग कर रही है। इसलिए संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 6 और 12 संख्या 12 के गुणनखंड हैं।

* यदि $a = b \times c$ तो b और c, a के गुणनखंड हैं और a, b और c का गुणज है।

एक संख्या का गुणनखंड उस संख्या का पूरा-पूरा भाजक होता है।

संख्या	गुणनखंड
2	**1, 2**
6	**1, 2, 3, 6**
10	**1, 2, 5, 10**
20	**1, 2, 4, 5, 10, 20**
24	**1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24**

एक संख्या के गुणनखंड उस संख्या को (बिना कोई शेष बचाए) पूरा-पूरा विभाजित करते हैं।

सारणी से हम यह परिणाम निकालते हैं:-

* 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखंड है।
* प्रत्येक संख्या अपने आप का गुणनखंड होती है।
* प्रत्येक संख्या (1 के बिना) के कम से कम दो गुणनखंड होते हैं, 1 और स्वयं संख्या।
* एक संख्या का प्रत्येक गुणनखंड उस संख्या से छोटा या उसके बराबर होता है।
* एक संख्या के गुणनखंडों की संख्या सीमित होती है।

उदाहरण 1. **15 के सभी गुणनखंड पता करो।**

हल : $15 = 1 \times 15$, $15 = 15 \times 1$

$15 = 3 \times 5$, $15 = 5 \times 3$

इस लिए 1, 3, 5 और 15 संख्या 15 के गुणनखंड हैं।

उदाहरण 2. **36 के सभी गुणनखंड पता करो।**

हल :

$36 = 1 \times 36$ $36 = 9 \times 4$

$36 = 2 \times 18$ $36 = 12 \times 3$

$36 = 3 \times 12$ $36 = 18 \times 2$

$36 = 4 \times 9$ $36 = 36 \times 1$

$36 = 6 \times 6$

नोट:- *यहाँ 9×4, 12×3, 18×2 और 36×1 जोड़े लेने की ज़रूरत नहीं है क्योंकि ये स्वयं को विपरीत क्रम में दोहरा रहे हैं।*

इसलिए 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 और 36 संख्या 36 के गुणनखंड हैं।

3.3 गुणज (Multiples)

पाँचवी कक्षा में हमनें गुणज के बारे में पढ़ा है कि **किसी संख्या के गुणज उस संख्या को किसी प्राकृतिक संख्या से गुणा करके प्राप्त किए जाते हैं**

संख्या	गुणज
1	**1, 2, 3, 4, 5, ...**
2	**2, 4, 6, 8,10, ...**
5	**5, 10, 15, 20, 25, ...**
8	**8, 16, 24, 32, 40, ...**
15	**15, 30, 45, 60, 75, ...**

सारणी से हम निम्नलिखित परिणाम पर पहुँचते हैं:-

* प्रत्येक संख्या अपने आप का गुणज है।
* एक संख्या का प्रत्येक गुणज उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है।
* एक प्राकृतिक संख्या का सबसे छोटा गुणज संख्या स्वयं होती है।
* एक संख्या के गुणजों की संख्या असंख्य होती है। इसलिए सबसे बड़े गुणज को परिभाषित नहीं किया जा सकता।

उदाहरण 3. **4 के पहले 6 गुणज पता करो।**

हल : 4 के पहले 6 गुणज हैं

$4 \times 1 = 4, \quad 4 \times 2 = 8 \quad 4 \times 3 = 12, \quad 4 \times 4 = 16, \quad 4 \times 5 = 20, \quad 4 \times 6 = 24$

उदाहरण 4. **13 के पहले 5 गुणज पता करो।**

हल : 13 के पहले 5 गुणज 13, 26, 39, 52, 65 हैं।

3.3.1 आदर्श संख्या (Perfect Number)

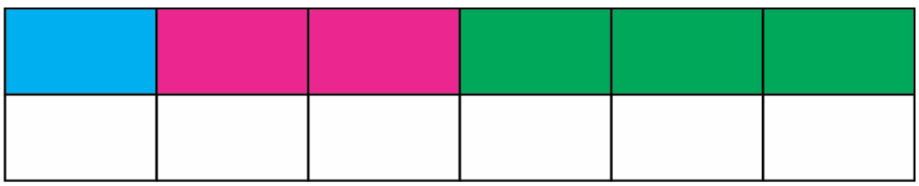
यदि किसी संख्या के सभी गुणनखंडों का जोड़ उस संख्या से दुगुना है तो उस संख्या को आदर्श संख्या कहते हैं।

संख्या 6 के गुणनखंड 1, 2, 3 और 6 हैं।

$1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$

अर्थात 6 के सभी गुणनखंडों का जोड़ = 2 × 6

इसलिए 6 आदर्श संख्या है।



$1 + 2 + 3$

$= 6$

* अन्य आदर्श संख्याएँ 28,496 और 8128 हैं।

नोट:- 6 के अतिरिक्त 6 के गुणनखंड और स्वयं संख्या 6 दिखाये गये अनुसार एक आयत बनाते हैं। इसलिए यह आदर्श संख्या है।

3.3.2 सम संख्याएँ (Even numbers)

वे सभी संख्याएँ जो 2 की गुणज हैं सम संख्याएँ कहलाती हैं।

अथवा

वे संख्याएँ जो 2 से विभाज्य हैं सम संख्याएँ कहलाती हैं जैसे 2, 4, 6, 8, 10, ...

* वह संख्या सम संख्या है यदि 2 उसका गुणनखंड है।
* सभी सम संख्याएँ 0, 2, 4, 6 अथवा 8 पर समाप्त होती हैं।
* यदि किसी सम संख्या में 2 जोड़ दिया जाए तो हम अगली सम संख्या प्राप्त करते हैं।

3.3.3 विषम संख्याएँ (Odd numbers)

सभी संख्याएँ जो 2 का गुणज नहीं हैं, विषम संख्याएँ कहलाती हैं जैसे 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

* सभी विषम संख्याएँ 1, 3, 5, 7 अथवा 9 पर समाप्त होती हैं।
* यदि किसी विषम संख्या में 2 जोड़ते हैं तो अगली विषम संख्या प्राप्त होती है।

नोट:- *कोई संख्या या तो सम होती है या विषम। कोई भी संख्या विषम और सम दोनों नहीं हो सकती।*

3.4 अभाज्य और भाज्य संख्याएँ (Prime and Composite Numbers)

पिछले भाग में हमनें एक संख्या के गुणनखंडों और गुणजों के बारे में सीखा। आओ! भाज्य और अभाज्य संख्याओं के बारे में जानने से पहले हम नीचे दी गई सारणी की ओर ध्यान दें।

संख्या	गुणनखंड	गुणनखंडों की संख्या
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6

उपरोक्त सारणी से, हम प्राकृतिक संख्याओं को नीचे लिखे तीन वर्गों में बाँट सकते हैं।

(i) संख्याएँ जिनका केवल एक गुणनखंड है।

(ii) संख्याएँ जिनके सिर्फ दो गुणनखंड हैं। (1 और संख्या स्वयं)

(iii) संख्याएँ जिनके दो से अधिक गुणनखंड हैं।

हम इस परिणाम पर पहुँचते हैं:

(a) प्राकृतिक संख्या 1 केवल ऐसी संख्या है जिसका केवल एक गुणनखंड है, जो कि संख्या स्वयं है।

(b) प्राकृतिक संख्याएँ 2, 3, 5, 7, 11...... आदि ऐसी संख्याएँ हैं जिनके केवल दो गुणनखंड हैं, 1 और संख्या स्वयं। ऐसी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

(c) प्राकृतिक संख्याओं 4, 6, 8, 9, 10...... आदि के दो से अधिक गुणनखंड हैं। ऐसी संख्याएँ भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

* केवल 1 ऐसी संख्या है जो न अभाज्य संख्या है और न भाज्य।
* संख्या 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है।
* 2 ही केवल ऐसी सम संख्या है जो अभाज्य है। शेष सभी सम संख्याएँ भाज्य संख्याएँ हैं।
* 2 के अतिरिक्त शेष सभी अभाज्य संख्याएँ विषम संख्याएँ हैं।
* सभी विषम संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ नहीं है।

छलनी विधि (SIEVE Method)

भाज्य और अभाज्य संख्याओं को ढूँढ़ने के लिए (To find Prime and Composite Numbers)

यूनानी गणित शास्त्री एरेटोस्थेनेज़ ने, तीसरी शताब्दी (ईसा पूर्व) में अभाज्य और भाज्य संख्याओं को ढूँढ़ने के लिए एक आसान विधि बताई। उसने एक ऐसी सारणी बनाई जो एरेटोस्थेनेज़ की छलनी (सीव ऑफ एरेटोस्थेनेज़) के नाम से प्रसिद्ध हुई।

इस सारणी में उसने 1 से 100 तक प्राकृतिक संख्याएँ लीं।

1 से 100 तक अभाज्य और भाज्य संख्याओं का पता करने के लिए निम्नलिखित पदों का प्रयोग किया जाता है।

एरेटोस्थेनेज़ की छलनी

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

चरण 1:- जैसा कि हम जानते हैं कि 1 न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य संख्या, इसलिए 1 को वर्गाकार डिब्बे में रखें।

चरण 2:- 2 पर चक्कर लगाएँ और 2 के सभी गुणजों जैसे 4, 6, 8,10, 12, ... आदि को काट दें।

चरण 3:- अगली संख्या 3 पर चक्कर लगाएँ और 3 के सभी गुणजों जैसे 6, 9, 12, 15, 18, ... आदि को काट दें। कटे हुए अंकों को दोबारा काटने की ज़रूरत नहीं।

चरण 4:- अगली संख्या 5 पर चक्कर लगाएँ और 5 के सभी गुणजों जैसे 10, 15, 20, 25, ... आदि को काट दें।

चरण 5:- अगली संख्या 7 पर चक्कर लगाएँ और 7 के सभी गुणजों जैसे 14, 21, 28, 35, ... आदि को काट दें।

इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखें जब तक दी गई संख्याओं पर या तो चक्कर न लग जाएं या वे काट न दी जाएं।

चक्कर लगी हुई सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं और सभी कटी हुई संख्याएँ भाज्य संख्याएँ हैं।

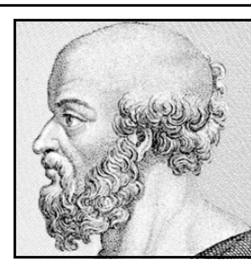
याद रखें

संख्याएँ 100 और 200 के बीच अभाज्य संख्याओं और भाज्य संख्याओं को पता करने का ढंग:- यदि दी गई संख्या 15 से छोटी अभाज्य संख्याओं जैसे 2, 3, 5, 7, 11, 13 में से किसी से विभाज्य है तो वह भाज्य संख्या है। यदि नहीं, तो वह अभाज्य संख्या है।

→**200 और 400 के बीच:-** यदि दी हुई संख्या 200 से छोटी अभाज्य संख्याओं में किसी से विभाज्य हैं तो वह भाज्य संख्या है नहीं तो वह अभाज संख्या है।

यूनानी गणितज्ञ एरेटोस्थेनेज़ (Eratosthenes)

यूनानी गणितशास्त्री एरेटोस्थेनेज़ को सबसे पहले धरती/पृथ्वी का माप मापने के लिए जाना जाता है और उसने धरती की धुरी के झुकाव की बिल्कुल सही जानकारी दी। वह वैज्ञानिक इतिहास का प्रवर्तक था। उसने अभाज्य संख्याओं को ढूँढ़ने का प्रभावी तरीका 'एरेटोस्थेनेज़ की छलनी' पेश किया।



एरेटोस्थेनेज़ *(276 BC - 194BC)*

3.4.1 अभाज्य जोड़े (Twin Primes)

अभाज्य संख्याओं के जोड़े जिनमें 2 का अंतर हो को अभाज्य जोड़े कहते हैं। अभाज्य जोड़ों के बीच केवल एक भाज्य संख्या होती है।

1 से 100 तक अभाज्य जोड़े (3,5), (5,7), (11,13), (17,19),(29,31), (41,43), (59,61) और (71,73) हैं।

याद रखें

* अभाज्य जोड़ों के बीच वाली संख्या (5 से बड़ी) 6 का गुणज होती है।

3.4.2 अभाज्य त्रिगुट (Prime Triplet)

तीन लगातार अभाज्य संख्याएँ जिनमें 2 का अंतर हो वह अभाज्य त्रिगुट कहे जाते हैं। अभाज्य त्रिगुट केवल एक (3, 5, 7) है।

गोल्ड बैच का अनुमान (Gold Bach's Conjecture):- 1742 में एक मशहूर गणित शास्त्री गोल्ड बैच ने एक नियम दिया परन्तु वह इसे सिद्ध करने के लिए सबूत नहीं दे सका। इसलिए कोई एक उदाहरण देकर भी उसके अनुमान को गलत सिद्ध करने के लिए सबूत नहीं दे सका।

''4 से बड़ी किसी भी सम संख्या को दो अभाज्य संख्याओं के जोड़ के रूप में लिखा जा सकता है।''

उदाहरण के लिए:- 6 = 3 + 3, 10 = 3 + 7 या 5 + 5, 18 = 7 + 11, 24 = 11 + 13; 36 = 17 + 19 आदि।

उदाहरण 5: **निम्नलिखित में से कौन सी अभाज्य संख्याएँ हैं?**

(i) 37 (ii) 117 (iii) 191 (iv) 221

हल : (i) दी गई संख्या = 37

यह 1 और अपने आप से विभाज्य है।

इसलिए निश्चित रूप से इसके दो गुणनखंड हैं।

इसलिए 37 अभाज्य संख्या है।

(ii) दी गई संख्या = 117

हम देखते हैं कि 117, 3 से विभाज्य है।

इसलिए इसके 2 से अधिक गुणनखंड हैं।

इसलिए यह अभाज्य संख्या नहीं है।

(iii) दी गई संख्या = 191

हम देखते हैं कि 191, 2, 3, 5, 7, 11 और 13 में से किसी भी संख्या से विभाज्य नहीं है।

इसलिए यह अभाज्य संख्या है।

(iv) दी गई संख्या = 221

हम देखते हैं कि 221, संख्या 13 से विभाज्य है।

इसलिए इसके दो से अधिक गुणनखंड हैं।

इसलिए यह अभाज्य संख्या नहीं है।

उदाहरण 6: **निम्नलिखित में से प्रत्येक को दो विषम अभाज्य संख्याओं के जोड़ के रूप में प्रकट करो।**

(i) 20 (ii) 32 (iii) 48

हल : (i) 20 = 3 + 17

= 7 + 13

(ii) 32 = 3 + 29

= 13 + 19

(iii) 48 = 5 + 43
= 7 + 41
= 11 + 37
= 17 + 31
= 19 + 29

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक के गुणनखंड लिखो।
   (i) 18 (ii) 24 (iii) 45 (iv) 60 (v) 65
2. निम्नलिखित में से प्रत्येक के पहले 6 गुणज लिखो।
   (i) 6 (ii) 9 (iii) 11 (iv) 15 (v) 24
3. 100 से छोटी संख्याओं की सूची बनाओ, जो निम्नलिखित के गुणज हो:
   (i) 17 (ii) 12 (iii) 21
4. इनमें से कौन सी अभाज्य संख्याएँ हैं?
   (i) 39 (ii) 129 (iii) 177 (iv) 203 (v) 237 (vi) 361
5. निम्नलिखित में से प्रत्येक के दो विषम अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में प्रकट करो।
   (i) 16 (ii) 28 (iii) 40
6. निम्नलिखित संख्याओं के बीच सभी अभाज्य संख्याएँ लिखो।
   (i) 1 से 25 (ii) 85 से 105 (iii) 120 से 140
7. क्या 36 एक आदर्श संख्या (Perfect Number) है?
8. खाली गुणनखंड भरो:-
   (i) 5 × ..... = 30 (ii) ..... × 6 = 48 (iii) 7 × ..... = 63
   (iv) ..... × = 104 (iv) ..... × 7 = 105
9. दो अंकों वाली सभी अभाज्य संख्याओं की सूची बनाओ, जिनमें से दोनों अंक अभाज्य संख्याएं हो।

3.5 उभयनिष्ठ गुणनखंड एवं गुणज (Common Factors and Multiples)

पिछले भाग में, हमने संख्या के गुणनखंड और गुणजों के बारे में सीखा। इस भाग में हम दो या दो से अधिक संख्याओं के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड और गुणजों के बारे में चर्चा करेंगे।

आओ! कुछ उदाहरणों से समझते हैं:

उदाहरण 7: **12 और 18 के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड पता करो।**

हल : 12 के गुणनखण्ड = 1, 2, 3, 4, 6, 12.

18 के गुणनखण्ड = 1, 2, 3, 6, 9, 18.

∴ 12 और 18 के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड =1, 2, 3, 6.

उदाहरण 8: **15, 24 और 30 के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड लिखो।**

हल : 15 के गुणनखण्ड = 1, 3, 5, 15

24 के गुणनखण्ड = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

30 के गुणनखण्ड = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

∴ 15, 24 और 30 के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड = 1, 3.

उदाहरण 9: **4 और 6 के पहले चार उभयनिष्ठ गुणज बताओ।**

हल : 4 के गुणज = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52.

6 के गुणज = 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54

∴ 4 और 6 के पहले 4 उभयनिष्ठ गुणज = 12, 24, 36, 48.

उदाहरण 10: **16 और 25 के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड लिखो।**

हल : 16 के गुणनखण्ड = 1, 2, 4, 8, 16

25 के गुणनखण्ड = 1, 5, 25

∴ 16 और 25 के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड = 1

3.5.1 सह-अभाज्य संख्याएँ (Co-Prime Numbers)

दो संख्याएँ जिनके बीच 1 के अतिरिक्त कोई भी उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो, सह अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

ऊपर वाली उदाहरण में 16 और 25 का एक ही उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। इसलिए इन्हें सह-अभाज्य संख्याएँ कहते हैं। कुछ और उदाहरण है (5, 7), (8, 9), (12, 13) आदि।

* दो सह अभाज्य संख्याओं के लिए दोनों संख्याओं का अभाज्य होना ज़रूरी नहीं है।
* दो अभाज्य संख्याएँ हमेशा सह-अभाज्य संख्याएँ होती हैं।

3.6 विभाज्यता की जाँच (Tests of Divisibility)

यह पता करने के लिए कि एक संख्या दूसरी संख्या से विभाज्य है, हम संख्याओं को विभाजित करते हैं और देखते हैं कि शेष शून्य बचता है या नहीं। परन्तु यह बहुत ही समय लेने वाली गतिविधि है। यहाँ संख्याओं 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 और 11 की विभाज्यता के नियम हैं, जिनके द्वारा हम पता करते हैं कि दी हुई संख्या इनमें से किसी के साथ विभाज्य है या नहीं। इस भाग में हम इन की विभाज्यता की जाँच के बारे में सीखेंगे।

2 से विभाज्यता (Divisibility by 2):- यदि किसी संख्या का इकाई अंक सम अर्थात 0, 2, 4, 6, 8 हो, तो वह 2 से विभाज्य है।

उदाहरण के लिए:-

(a) 2164, 12562, 83490 आदि 2 से विभाज्य है।

(b) 6193, 82937, 14051 आदि 2 से विभाज्य नहीं है।

4 से विभाज्यता (Divisibility by 4):- यदि संख्या के इकाई और दहाई के अंकों से बनी संख्या 4 से भाग होती है, तो वह संख्या 4 से विभाज्य है।

उदाहरण के लिए:-

(a) 61<u>24</u>, 256<u>32</u>, 843<u>00</u>, 124<u>96</u> आदि सभी 4 से विभाज्य हैं क्योंकि इन संख्याओं के अंतिम दो अंकों से बनी संख्या 4 से भाग होती हैं।

(b) 127<u>31</u> , 51<u>67</u> , 423<u>42</u> आदि 4 से विभाज्य नहीं है क्योंकि इनके अंतिम 2 अंकों से बनी संख्या 4 से भाग नहीं होतीं।

8 से विभाज्यता (Divisibility by 8):- एक संख्या 8 से (विभाज्य होगी) भाग की जाएगी यदि इसके अंतिम 3 अंकों की संख्या 8 से भाग हो जाए या संख्या के अंतिम 3 अंक शून्य से समाप्त होते हों।

उदाहरण के लिए:-

(a) 214832 , 51616 , 2400 आदि 8 से विभाज्य हैं।

(b) 613513 , 52642 , 1678093 आदि 8 से विभाज्य नहीं है क्योंकि इन संख्याओं के अंतिम 3 अंक 8 से भाग नहीं होते।

3 से विभाज्यता (Divisibility by 3):- एक संख्या 3 से विभाज्य है, यदि संख्या के अंकों का जोड़ 3 से भाग होता हो।

उदाहरण के लिए:-

(a) 357, 3 से विभाज्य है।

संख्या के अंकों का जोड़ = 2 + 5 + 8 = 15 जो कि 3 से भाग होती है।

(b) 51062, 3 से विभाज्य नहीं है।

संख्या के अंकों का जोड़ = 5 + 1 + 0 + 6 + 2 = 14, जो कि 3 से भाग नहीं होती।

9 से विभाज्यता (Divisibility by 9):- यदि संख्या के अंकों का जोड़ 9 से विभाजित हो तो वह संख्या भी 9 से विभाज्य होती है।

उदाहरण के लिए:-

(a) 62154, 9 से विभाज्य है।

संख्या के अंकों का जोड़ = 6 + 2 + 1 + 5 + 4 = 18, 9 से विभाज्य है।

(b) 23509, 9 से विभाज्य नहीं है।

संख्या के अंकों का जोड़ = 2 + 3 + 5 + 0 + 9 = 19, 9 से विभाज्य नहीं है।

5 से विभाज्यता (Divisibility by 5):- एक संख्या 5 से विभाज्य है यदि संख्या के अंतिम अंक 0 या 5 हो।

उदाहरण के लिए:-

(a) 51680 , 235045 , 91435 आदि 5 से विभाज्य हैं क्योंकि संख्या के अंतिम अंक 0 या 5 हैं।

(b) 216803 , 52361 आदि 5 से विभाज्य नहीं हैं, क्योंकि संख्या के इकाई अंक 0 या 5 नहीं है।

10 से विभाज्यता (Divisibility by 10) :- एक संख्या 10 से विभाज्य है यदि संख्या का इकाई अंक 0 हो।

उदाहरण के लिए:-

(a) 62560 , 315680 , 25600 आदि 10 से विभाज्य हैं क्योंकि इनका इकाई अंक 0 है।

(b) 2153 , 68024 , 519831 आदि 10 से विभाज्य नहीं है।

6 से विभाज्यता (Divisibility by 6) :- संख्या 6 से विभाज्य है यदि वह 2 और 3 दोनों से भाग होती हैं।

या

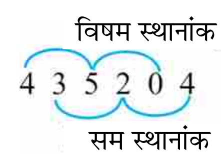
जो सम संख्या 3 से भाग होती हो वह 6 से विभाज्य है।

उदाहरण के लिए:- 25824 , 6 से विभाज्य है।

जैसे कि यह एक सम संख्या है और इसके अंकों का जोड़ = 2 + 5 + 8 + 2 + 4 = 21, जो कि 3 से भाग होता है।

11 से विभाज्यता (Divisibility by 11):- कोई संख्या 11 से विभाज्य है यदि विषम स्थानों के अंकों के जोड़ और सम स्थानों के अंकों के जोड़ का अंतर 0 या 11 से विभाज्य हो।

उदाहरण के लिए:-



(a) 435204, 11 से विभाज्य है।

विषम स्थानों के अंकों का जोड़ = 4 + 5 + 0 = 9

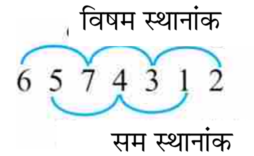
सम स्थानों के अंकों का जोड़ = 3 + 2 + 4 = 9, दोनों जोड़ों का अंतर = 9 – 9 = 0

(b) 6574312 , 11 से विभाज्य नहीं है।

विषम स्थानों के अंकों का जोड़ = 6 + 7 + 3 + 2 = 18

सम स्थानों के अंकों का जोड़ = 5 + 4 + 1 = 10

अंतर = 18 – 10 = 8, जो कि 11 से भाग नहीं होता।



3.7 विभाज्यता के साधारण गुण (Some General Properties of Divisibility)

गुण 1: मान लो a, b, c तीन संख्याएँ हैं। यदि a, b से विभाज्य है और b, c से विभाज्य है तो a, c से विभाज्य होगी।

या

यदि कोई संख्या एक संख्या से भाग होती है तो यह संख्या इस संख्या के प्रत्येक गुणनखंड से भी भाग होगी।

उदाहरण के लिए:–संख्या 48, 12 से विभाज्य है और 12 संख्याओं 2, 3 और 6 से विभाज्य है। इसलिए संख्या 48 संख्याओं 2, 3 और 6 से भी विभाज्य होगी।

परिणाम (Consequences):-

* क्योंकि 4, 2 से विभाज्य है। इसलिए प्रत्येक संख्या जो 4 से विभाज्य है वह 2 से भी विभाज्य होगी।
* क्योंकि 6, संख्याओं 2 और 3 से विभाज्य है, इसलिए प्रत्येक संख्या जो 6 से विभाज्य है, वह संख्याओं 2 और 3 से भी विभाज्य होगी।
* क्योंकि 9, 3 से विभाज्य है, इसलिए प्रत्येक संख्या जो 9 से विभाज्य है वह 3 से भी विभाज्य होगी।

गुण 2:- यदि a और b दो सह–अभाज्य संख्याएँ हैं तथा संख्या c संख्याओं a और b दोनों से विभाज्य हैं तो संख्या c, a × b से भी विभाज्य होगी।

या

यदि कोई संख्या 2 या 2 से अधिक सह अभाज्य संख्याओं से भाग होती हो तो उनके गुणनफलों से भी भाग होती है।

उदाहरण के लिए:– हम दो सह अभाज्य संख्याएँ 3 और 4 लेते हैं।

संख्या 3, संख्या 72 का गुणनखंड है और संख्या 4 भी 72 का गुणनखंड है।

इसलिए 3×4=12 भी 72 का गुणनखंड होगा।

गुण 3:- यदि दो संख्याएँ b और c संख्या a से विभाज्य हैं तो (b + c) भी संख्या a से विभाज्य होगी।

या

यदि दी गई दो संख्याएँ किसी संख्या से भाग होती हों तब इन संख्याओं का जोड़ भी इस संख्या से भाग होगा।

उदाहरण के लिए:- 45 और 70 दोनों संख्याएँ 5 से विभाज्य हैं। इन संख्याओं का जोड़ 45 + 70 = 115 है।

⇒ 115 भी 5 से विभाज्य है।

गुण 4:- यदि दो संख्याएँ b और c संख्या a से विभाज्य है तो (b – c) या (c – b) भी संख्या a से विभाज्य होगा।

या

यदि दी गई दो संख्याएँ किसी संख्या से विभाज्य हो तो इन संख्याओं का अंतर भी उस संख्या से भाग होगा।

उदाहरण के लिए:– 84 और 45 दोनों 3 से विभाज्य है।

दोनों संख्याओं का अन्तर 84 – 45 = 39 है।

⇒ 39 भी 3 से विभाज्य है।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्नलिखित के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड पता करो।

   (i) 16 और 24 (ii) 25 और 40 (iii) 24 और 36

   (iv) 14, 35 और 42 (v) 15, 24 और 35

2. निम्नलिखित के पहले 3 उभयनिष्ठ गुणज पता करो।

   (i) 3 और 5 (ii) 6 और 8 (iii) 2, 3 और 4

3. निम्नलिखित में कौन सी संख्याएँ 2 या 4 से विभाज्य हैं।

   (i) 52314 (ii) 678913 (iii) 4056784 (iv) 21536 (v) 412318

4. निम्नलिखित में कौन सी संख्याएँ 3 या 9 से विभाज्य हैं।

   (i) 654312 (ii) 516735 (iii) 423152 (iv) 704355 (v) 215478

5. निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ 5 या 10 से विभाज्य हैं।

   (i) 456803 (ii) 654130 (iii) 256785 (iv) 412508 (v) 872565

6. निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ 8 से विभाज्य हैं।

   (i) 457432 (ii) 5134214 (iii) 7232000 (iv) 5124328 (v) 642516

7. निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ 6 से विभाज्य हैं।

   (i) 425424 (ii) 617415 (iii) 3415026 (iv) 4065842 (v) 725436

8. निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ 11 से विभाज्य हैं।

   (i) 4281970 (ii) 8049536 (iii) 1234321 (iv) 6450828 (v) 5648346

9. कौन सा कथन सत्य है या असत्य:-

   (i) यदि कोई संख्या 24 से विभाज्य है तो वह 3 और 8 से भी भाग होती है।

   (ii) संख्याएँ 60 और 90, 10 से विभाज्य हैं तो इनका जोड़ 10 से भाग नहीं होता।

   (iii) यदि कोई संख्या 8 से विभाज्य है तो वह 16 से भी भाग होती है।

   (iv) यदि कोई संख्या 15 से विभाज्य है तो वह 3 से भाग होती है।

   (v) 144 और 72 संख्या 12 से विभाज्य हैं तो वह संख्या और किस अंक से विभाज्य होगी।

10. यदि कोई संख्या 5 और 9 से विभाज्य है तो वह संख्या और किस अंक से विभाज्य होगा?

11. इनमें से कौन सी संख्याएँ सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।

   (i) 25, 35 (ii) 16, 21 (iii) 24, 41 (iv) 48, 33 (v) 20, 57

3.8 अभाज्य गुणनखंड (Prime Factorisation):-

पिछले भाग में हमने संख्या के गुणनखंड अभाज्य संख्या और भाज्य संख्याओं के बारे में जाना है। यदि कोई संख्या भाज्य है तो हम उसे गुणनखंडों की गुणा के रूप में लिख सकते हैं। गुणनखंड दोनों अभाज्य या दोनों भाज्य या एक अभाज्य और एक भाज्य के रूप में हो सकता है।

यदि संख्या भाज्य है तो गुणनखण्डों को आगे फिर तोड़ा जा सकता है। इस विधि को हम तब तक जारी रखेंगे जब तक हम सभी अभाज्य गुणनखंड प्राप्त नहीं कर लेते।

इस प्रकार अभाज्य गुणनखंड एक ऐसी प्रक्रिया/विधि है जिसमें हम भाज्य संख्या को अभाज्य गुणनखंड के रूप में दोबारा लिखते हैं।

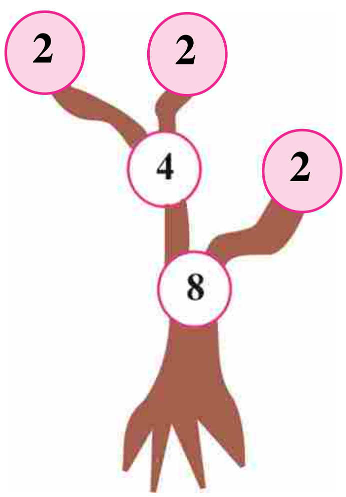
* **अंक गणित का मूलभूत सिद्धांत (Fundamental Theorem of Arithmetic):-** प्रत्येक भाज्य संख्या का गुणनखंडीकरण एकमात्र विधि गुणनखंडों के क्रम को अभाज्य गुणनखंडों के रूप में लिख सकता है।

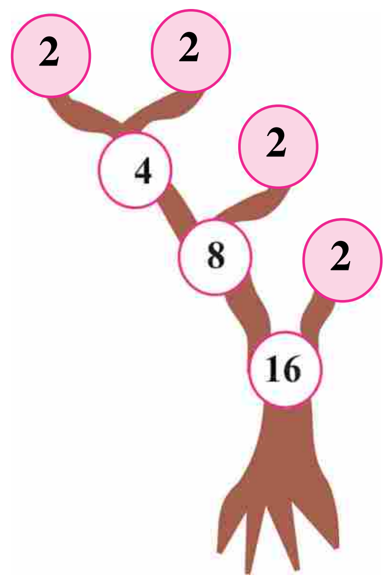
अभाज्य गुणनखंडों को लिखने के दो ढंग हैं:-

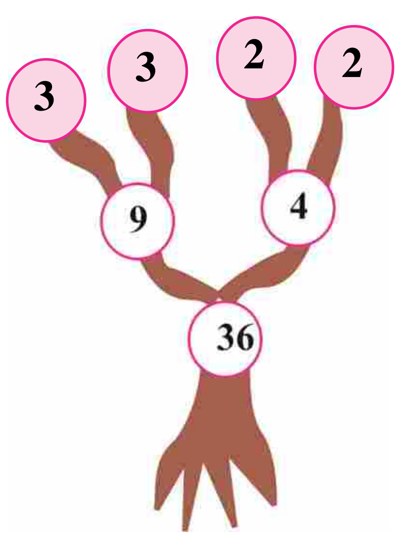
- गुणनखंड वृक्ष विधि (Factor Tree Method)
- बंटन विधि (Division Method)

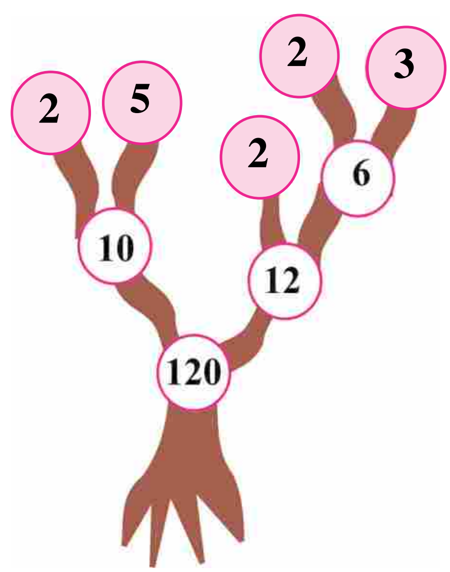
3.8.1 गुणनखंड वृक्ष विधि (Factor Tree Method)

वृक्ष गुणनखंड विधि के प्रत्येक चरण में दी गई भाज्य संख्या को उसके सबसे छोटे अभाज्य गुणनखंड और दूसरे गुणनखंड के रूप में तब तक लिखते हैं जब तक हमें उसके सभी अभाज्य गुणनखंड नहीं मिल जाते

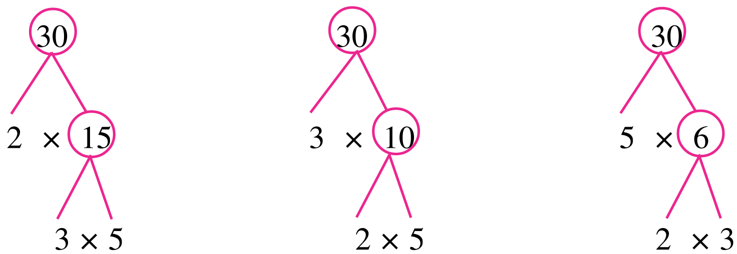








आओ! हम 30 के अभाज्य गुणनखंड, गुणनखंड वृक्ष विधि का प्रयोग करके पता करें।



इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में, 30 के अभाज्य गुणनखंड = $2 \times 3 \times 5$

3.8.2 बंटन विधि (Division Method)

आओ! 360 के बंटन विधि से अभाज्य गुणनखंड पता करें।

चरण I:- दी संख्या को किसी भी अभाज्य संख्या से बांटो जो कि उसे पूरा-पूरा बाँटती हो।

चरण II:- शेष बची संख्या को किसी भी अभाज्य संख्या से बाँटते रहो जब तक शेष बची संख्या भी अभाज्य संख्या न रह जाए।

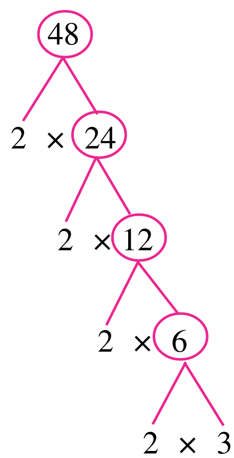
इसलिए 360 के अभाज्य गुणनखंड = $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
	5

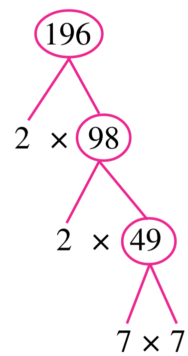
उदाहरण 11: **वृक्ष गुणनखंड विधि से नीचे दी संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड पता करो।**

(i) 48 (ii) 196 (iii) 150

हल : (i)



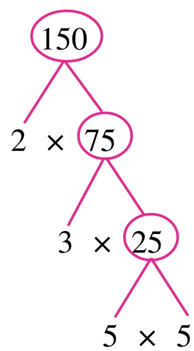
(ii)



∴ 48 के अभाज्य गुणनखंड = $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

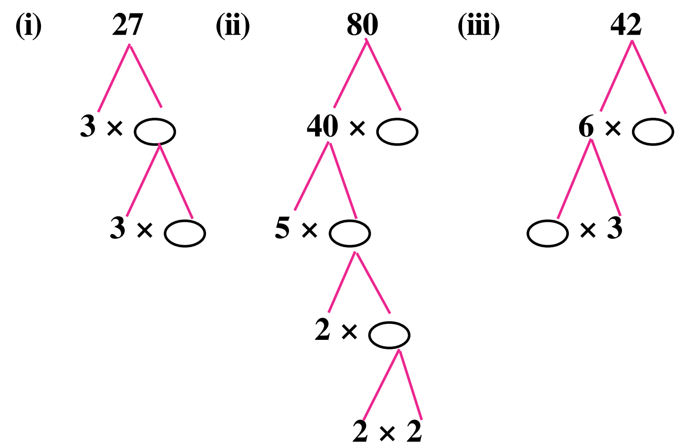
∴ 196 के अभाज्य गुणनखंड = $2 \times 2 \times 7 \times 7$

iii)

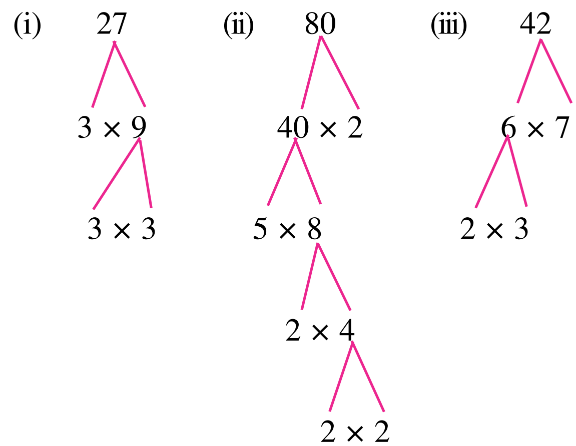


∴ 150 के अभाज्य गुणनखंड = $2 \times 3 \times 5 \times 5$

उदाहरण 12:- **प्रत्येक गुणनखंड वृक्ष को पूरा करो।**



हल :



उदाहरण 13:- **नीचे दी संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड पता करो।**

(i) 216 (ii) 375 (iii) 920

हल :

(i)

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
	3

$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

(ii)

3	375
5	125
5	25
	5

$375 = 3 \times 5 \times 5 \times 5$

(iii)

2	920
2	460
2	230
5	115
	23

$920 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 23$

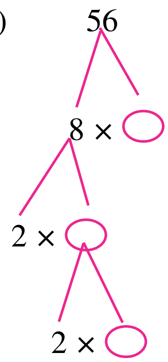
प्रश्नावली 3.3

1. गुणनखंड वृक्ष विधि से निम्नलिखित के अभाज्य गुणनखंड पता करो।

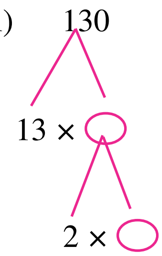
   (i) 96 (ii) 120 (iii) 180

2. प्रत्येक गुणनखंड वृक्ष को पूरा करो।

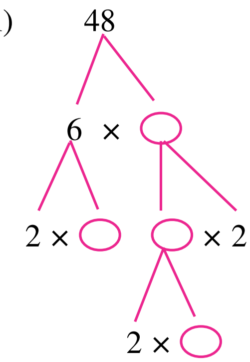
   (i)



   (ii)



   (iii)



3. बंटन विधि से निम्नलिखित संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड पता करो।

   (i) 420 (ii) 980 (iii) 225 (iv) 150 (v) 324

3.9 सब से बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखंड या सब से बड़ा उभयनिष्ठ बंटन (Highest Common Factor (H.C.F.) Or Greatest Common Divisor (G.C.D)

पिछले भागों में हम गुणनखंड (Factor) और गुणजों (Multiplies) उभयनिष्ठ गुणनखंडों (Common Factors) के बारे में पढ़ चुके हैं। इस भाग में हम दी संख्याओं के गुणनखंडों में सबसे बड़ा गुणनखंड, जिसे म.स.व. (H.C.F. or G.C.D.) भी कहते हैं, के बारे में सीखेंगे।

'दो या दो से अधिक संख्याओं का बड़े से बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखंड (H.C.F.) बड़े से बड़ा या सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखंड होता है।

अन्य शब्दों में दो या दो से अधिक संख्याओं का म.स.व (H.C.F.) वह सबसे बड़ी संख्या जो सभी संख्याओं को पूरा-पूरा विभाजित करती है।

उदाहरण के लिए:- मान लो 24 और 42 दो संख्याएँ हैं।

24 के गुणनखंड = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

42 के गुणनखंड = 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42

24 और 42 के उभयनिष्ठ गुणनखंड = 1, 2, 3, 6

इन उभयनिष्ठ गुणनखंडों में से 6 सबसे बड़ा या बड़े से बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखंड है। इसलिए 6, 24 और 42 का म.स.व (H.C.F.) है।

* दो या दो से अधिक संख्याओं का म.स.व (H.C.F.) कभी भी शून्य नहीं हो सकता क्योंकि 1 सभी संख्याओं का उभयनिष्ठ होता है।
* दो सह अभाज्य संख्याओं का म.स.व हमेशा 1 होता है।
* दी संख्याओं का म.स.व हमेशा उनसे छोटा या दी छोटी संख्या के बराबर होता है।

दो या दो से अधिक संख्याओं के म.स.व (H.C.F.) पता करने की दो आम विधियाँ हैं।

* अभाज्य गुणनखंडीकरण विधि (Prime Factorisation Method)

* निरंतर भाग विधि (Continued division mehtod)

यहाँ हम दोनों तरीकों के बारे में सीखेंगे।

3.9.1 अभाज्य गुणनखंडन विधि (Prime Factorisation Method):- म.स.व पता करने के लिए हम नीचे दिए चरणों का पालन करते हैं।

चरण 1:- दी गई प्रत्येक संख्या के अभाज्य गुणनखंड बनाओ।

चरण 2:- दी संख्याओं के उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड पता करो।

चरण 3:- सारे उभयनिष्ठ गुणनखंडों का गुणनफल दी संख्याओं का म.स.व. है।

उदाहरण 14: नीचे लिखी संख्याओं का म.स.व पता करो।

(i) 36 और 48 (ii) 30 और 75 (iii) 108 और 144

(iv) 42, 63 और 210 (v) 125, 175 और 250

हल : (i) पहले हम दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड लिखेंगे।

2	36
2	18
3	9
	3

2	48
2	24
2	12
2	6
	3

$\therefore \quad 36 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times 3$

$48 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 2 \times 2 \times \boxed{3}$

हमनें देखा है कि 2, दो बारे और 3, एक बार उभयनिष्ठ गुणनखंडों में आता है।

$\therefore$ 36 और 48 का म.स.व. = $2 \times 2 \times 3 = 12$

(ii) पहले हम दी प्रत्येक संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड लिखेंगे।

2	30
3	15
	5

3	75
5	25
	5

$\therefore \quad 30 = 2 \times \boxed{3} \times \boxed{5}$

और $75 = \boxed{3} \times 5 \times \boxed{5}$

हमनें देखा है कि 3, एक बार और 5 एक बार उभयनिष्ठ गुणनखंडों में आता है।

$\therefore$ 30 और 75 का म.स.व. = $3 \times 5 = 15$

(iii) पहले हम दी प्रत्येक संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड लिखेंगे।

2	108
2	54
3	27
3	9
	3

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
	3

$\therefore \quad 108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

और $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

हमने देखा है कि उभयनिष्ठ गुणनखंडों में 2, दो बार और 3 भी दो बार आता है।

$\therefore$ 108 और 144 का म.स.व. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

(iv) पहले हम दी प्रत्येक संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड लिखते हैं।

$$\begin{array}{r|l} 2 & 42 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 210 \\ \hline 3 & 105 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$\therefore \quad 42 = 2 \times 3 \times 7$

$63 = 3 \times 3 \times 7$

और $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

हमने देखा कि 3, एक बार और 7, एक बार उभयनिष्ठ गुणनखंड के रूप में आता है।

$\therefore$ 42, 63 और 210 का म.स.व. $= 3 \times 7 = 21$

(v) पहले हम दी प्रत्येक संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड लिखते हैं:-

$$\begin{array}{r|l} 5 & 125 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 175 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 250 \\ \hline 5 & 125 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$\therefore \quad 125 = 5 \times 5 \times 5$

$175 = 5 \times 5 \times 7$

और $250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5$

हमनें देखा कि 5, दो बार उभयनिष्ठ गुणनखंड के रूप में आता है।

$\therefore$ 125, 175 और 250 का म.स.व. $= 5 \times 5 = 25$

3.9.2 लगातार/निरंतर भाग विधि (Continued Division Method) (Euclid's Algorithm)

यूकलिड्स एक यूनान के गणित वैज्ञानिक ने दो या दो से अधिक संख्याओं के म.स.व. को पता करने के लिए एक दिलचस्प तरीका ढूँढा, इस विधि को युक्लिड के ऐलगोरिथम या लंबी भाग के ढंग के रूप में जाना जाता है।

युकलिड का ऐलगोरिथम (म.स.व ढूँढने के चरण/पड़ाव)

चरण 1:- दी संख्याओं में से बड़ी संख्या की पहचान करो।

चरण 2:- भाज्य के रूप में सबसे बड़ी संख्या और भाजक के रूप में सबसे छोटी संख्या लो।

चरण 3:- भागफल और शेष पता करो।

चरण 4:- यदि शेष शून्य है तो भाजक वांछित म.स.व. है।

चरण 5:- यदि शेष शून्य नहीं है तो बाकी बचे को नये भाज्य और अंतिम भाज्य को नये भाजक की तरह लो।

चरण 6:- चरणों को दोहराते रहो जब तक 0 प्राप्त ना हो जाए।

चरण 7:- अंतिम विभाजक (Divisor) जिससे शेष शून्य (0) प्राप्त हो वांछित म.स.व है।

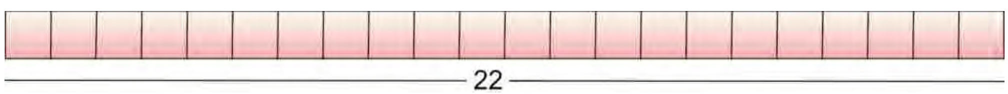
आओ! इस विधि पर आधारित एक क्रिया करें।

कागज़ काटने और चिपकाने द्वारा म.स.व पता करना (To find HCF by cutting and pasting of paper.)

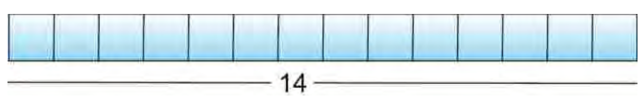
वांछित सामान :- एक रूलर, पेंसिल, चार्ट पेपर, रंगीन पेंसिलें या स्कैच पेन, रबड़ आदि।

विधि:- 14 और 22 का म.स.व पता करने के लिए।

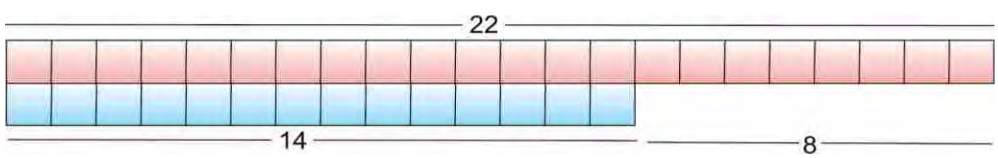
1. सफेद रंग का चार्ट लो और एक पट्टी काटो और इसे पेंसिल और रूलर से 22 वर्गाकार डिब्बों ने बाँटो और इस पर लाल रंग भर दो।



2. एक और पट्टी लो और इसे 14 वर्गाकार डिब्बों में बाँटो और इस पर नीला रंग करो।

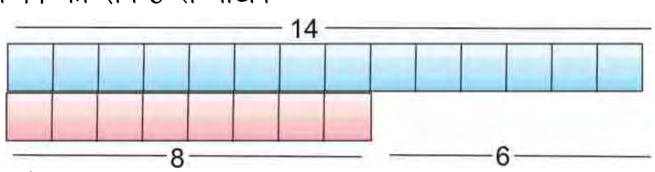


3. बड़ी संख्या 22 को छोटी संख्या 14 से भाग दो (जैसा कि दर्शाया गया है)



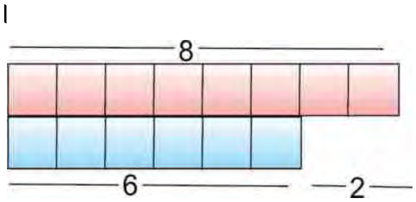
14) 22 (1
– 14
8

4. छोटी संख्या 14 को शेष 8 से बाँटो।



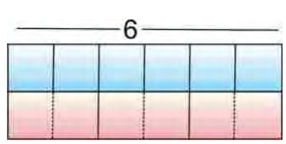
8) 14 (1
– 8
6

5. 8 को 6 से बाँटो।



6) 8 (1
– 6
2

6. 6 को 2 से बाँटो।



2) 6 (3
– 6
0

निरीक्षण/परीक्षण (Observation):-

14 और 22 का वाँछित म.स.व 2 है जो कि उपरोक्त प्रक्रिया अनुसार अंतिम भाजक है जो शेष '0' बचाता है।

उदाहरण 15: **बंटन विधि द्वारा नीचे लिखे के म.स.व पता करो।**

(i) 144, 252 (ii) 58, 70 (iii) 25, 44

Solution : (i) दी गई संख्याएँ 14, 252 हैं।

```
144) 252 ( 1
   – 144
    108)144 ( 1
       – 108
         36 )108 (3
            – 108
                0
```

अब, 144 और 252 का म.स.व 36 है।

(ii) दी गई संख्याएँ 58 और 70 हैं।

```
58) 70 (1
  – 58
   12) 58 (4
     – 48
      10) 12 (1
        – 10
          2 ) 10 (5
             –10
               0
```

इस प्रकार 58 और 70 का म.स.व 2 है।

(iii) दी गई संख्याएँ 25 और 44 हैं।

```
25) 44 ( 1
  – 25
   19) 25 (1
     – 19
       6 ) 19 (3
         – 18
           1 ) 6 ( 6
               6
               0
```

इस प्रकार 25 और 44 का म.स.व 1 है।

> *** दो या दो से अधिक संख्याओं का म.स.व**
>
> तीन संख्याओं का म.स.व. पता करने के लिए हम नीचे लिखे तरीके से आगे बढ़ते हैं।
>
> **चरण 1:-** उनमें से किन्हीं दो संख्याओं का म.स.व. पता करो।
>
> **चरण 2:-** पहले चरण से प्राप्त म.स.व और तीसरी संख्या का म.स.व. पता करो।
>
> **चरण 3:-** चरण 2 का म.स.व. तीनों संख्याओं का वाँछित म.स.व. है।

उदाहरण 16: **50, 125 और 195 का म.स.व. पता करो।**

हल : दी संख्याएँ 50, 125 और 195 हैं।

कोई दो संख्याएँ लो जैसे कि 50 और 125

```
50 ) 125 ( 2
   – 100
     25 ) 50 ( 2
        – 50
           0
```

∴ 50 और 125 का म.स.व 25 है।

अब हम 195 और 25 का म.स.व. पता करो।

```
25 ) 195 ( 7
   – 175
     20 ) 25 ( 1
        – 20
           5 ) 20 ( 4
             – 20
                0
```

∴ 25 और 195 का म.स.व. 25 है।

⇒ 50,125 और 195 का म.स.व. 5 है।

3.9.3 म.स.व. का प्रयोग (शब्द समस्याएँ) (Applications of H.C.F.) (Word Problems)

इस भाग में हम दैनिक जीवन की व्यावहारिक समस्याओं के हल के लिए म.स.व. के प्रयोग के बारे में विचार करेंगे। आओ, इन समस्याओं को नीचे लिखी उदाहरणों से दर्शाओ।

उदाहरण 17: **वह सबसे बड़ी संख्या पता करो जिसके साथ 250 और 188 को भाग देने पर प्रत्येक हालत में 2 शेष बचे।**

हल : दिया है कि, वाँछित संख्या जिसके साथ 250 और 188 को भाग देने पर प्रत्येक हालत में शेष 2 बचे।

⇒ 250 – 2 = 248 और 188 – 2 = 186 दोनों वाँछित संख्याओं को पूरा-पूरा बाँटें।

⇒ वाँछित संख्या 248 और 186 का उभयनिष्ठ गुणनखंड है।

यह दिया है कि वाँछित संख्या सबसे बड़ी संख्या है।

∴ वाँछित संख्या, 248 और 186 का म.स.व. है।

```
186 ) 248 ( 1
    – 186
      62 ) 186 ( 3
         – 186
             0
```

∴ वाँछित सबसे बड़ी संख्या (म.स.व.) = 62

उदाहरण 18: **वह बड़ी से बड़ी संख्या पता करो जिससे 645 और 792 और को भाग देने पर क्रमशः 7 और 9 शेष बचे।**

हल : वाँछित सबसे बड़ी संख्या = (645 – 7) और (792 – 9) का म.स.व.

= 638 और 783 का म.स.व.

$$\begin{array}{l} 638\,)\,783\,(\,1 \\ \quad -638 \\ \quad\quad 145)\,638\,(4 \\ \quad\quad\quad -580 \\ \quad\quad\quad\quad 58\,)\,145\,(\,2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad -116 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 29\,)\,58\,(\,2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad -58 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

∴ वाँछित बड़ी से बड़ी संख्या = 29

उदाहरण 19: वह बड़ी से बड़ी संख्या पता करो जिससे 135, 245 और 385 को भाग देने पर प्रत्येक हालत में 5 शेष बचे।

हल : वाँछित संख्या = (135 – 5), (245 – 5) और (385 – 5)

= 130, 240 और 380 का म.स.व

अब

2	130
5	65
	13

2	240
2	120
2	60
2	30
3	15
	5

2	380
2	190
5	95
	19

∴ $130 = 2 \times 5 \times 13$

$240 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

और $380 = 2 \times 2 \times 5 \times 19$

∴ म.स.व $= 2 \times 5 = 10$

इसलिए वाँछित संख्या = 10

उदाहरण 20: दो ट्रकों में क्रमशः 434 लीटर और 465 लीटर डीज़ल है। उस बर्तन की अधिकतम घनता पता करो जो इन दोनों ट्रकों के डीज़ल को पूरा-पूरा माप देगा।

हल : हमें बर्तन की अधिकतम घनता पता करनी है जो दोनों ट्रकों को माप दो।

⇒ हमें बड़ी से बड़ी (अधिकतम) संख्या जो 434 और 465 को पूरा-पूरा बाँटना चाहिए।

⇒ वाँछित संख्या = 434 और 465 का म.स.व. है।

2	434
7	217
	31

5	465
3	93
	31

$434 = 2 \times 7 \times 31$

और $465 = 5 \times 3 \times 31$

∴ 434 और 465 का म.स.व. = 31

इसलिए बर्तन की वाँछित घनता = 31 लीटर

उदाहरण 21: एक कमरे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 8 मी. 25 सेमी, 6 मी. 75 सेमी और 4 मी. 50 सेमी. हैं। ऐसा सबसे लंबा फीता (Tape) पता करो जो कमरे की तीनों विमाओं (Dimensions) को पूरा-पूरा माप ले।

हल : हम लम्बे से लम्बा फीता पता करना चाहते हैं जो दिए कमरे की विमाओं को माप दे।

इसलिए हमें बड़ी से बड़ी संख्या जो 8मी. 25 सेमी, 6मी. 75 सेमी और 4 मी. 50 सेमी को पूरा-पूरा बाँटे, चाहिए।

∴ फीते की वाँछित लम्बाई = 8मी. 25 सेमी, 6मी. 75 सेमी, 4मी. 50 सम का म.स.व.

= 825 सेमी, 675 सेमी और 450 सेमी का म.स.व.

अब कोई दो संख्याएँ लो, 825 और 675

675) 825 (1
– 675
150) 675 (4
– 600
75) 150 (2
– 150
0

अब 75 और 450 का म.स.व.

75) 450 (6
– 450
0

∴ 835, 675 और 450 का म.स.व. = 75

∴ इस प्रकार, बड़े से बड़े फीते की लम्बाई = 75सेमी

उदाहरण 22: एक कमरे का फर्श 9मी.×4.75 मी. माप का है। इस फर्श को एक जैसे समान आकार वाली संगमरमर की वर्गाकार टाइलों द्वारा ढका जाना है। बड़े से बड़े माप की प्रत्येक टाइल का माप पता करो। यह भी पता करो कि कम से कम कितनी टाइलें लगेंगी?

हल : हम बड़े से बड़े माप की वर्गाकार टाइल का माप जो संगमरमर के फर्श को पूरा-पूरा ढके पता करेंगे।

∴ टाइल का वाँछित माप = 9मी. और 4.75 मी. का म.स.व

= 900 सेमी और 475 सेमी का म.स.व. (∴ 1 मी.=100 सेमी)

475) 900 (1
– 475
425) 475 (1
– 425
50) 425 (8
– 400
25) 50 (2
– 50
0

∴ 900 सेमी और 475 सेमी का म.स.व. = 25 सेमी

इसलिए, प्रत्येक वर्गाकार टाइल की भुजा = 25 सेमी

उदाहरण 23: $\frac{312}{507}$ **को न्यूनतम रूप (साधारण पद) में दर्शाओ।**

हल : दी गई भिन्न को न्यूनतम पद में दर्शाने के लिए हम इसके अंश और हर को इसके म.स.व से भाग करेंगे।

अब हम 312 औप 507 का म.स.व. पता करेंगे।

```
312) 507 ( 1
     312
     195) 312 (1
          195
          117 ) 195 (1
                – 117
                  78) 117 (1
                      – 78
                        39 ) 78 ( 2
                             – 78
                               0
```

स्पष्ट है कि 312 और 507 का म.स.व. (HCF) 39 है।

अब $\frac{312}{507} = \frac{312 \div 39}{507 \div 39} = \frac{8}{13}$

[अंश और हर को 39 से भाग करने पर]

प्रश्नावली 3.4

1. निम्नलिखित संख्याओं का म.स.व (HCF) अभाज्य गुणनखंडन विधि से पता करो।
   (i) 30, 42 (ii) 135,225 (iii) 180, 192 (iv) 49, 91, 175 (v) 144, 252, 630
2. निम्नलिखित संख्याओं का म.स.व (HCF) बंटन विधि से पता करो।
   (i) 170, 238 (ii) 54, 144 (iii) 72, 88 (iv) 96, 240, 336 (v) 120, 156, 192
3. दो अभाज्य संख्याओं (Prime Numbers) का म.स.व (HCF) क्या होगा?
4. दो लगातार सम संख्याओं (Consecutive Even Numbers) का म.स.व. क्या होगा?
5. दो लगातार प्राकृतिक संख्याओं (Consecutive Natural Numbers) का म.स.व. क्या होगा?
6. दो लगातार विषम संख्याओं (Consecutive Odd Numbers) का म.स.व. क्या होगा?
7. वह बड़ी से बड़ी संख्या पता करो जो 245 और 1029 को इस प्रकार बाँटे कि प्रत्येक स्थिति में शेष 5 बचे।
8. वह बड़ी से बड़ी संख्या पता करो जो 782 और 460 को इस प्रकार बाँटे कि क्रमश: 2 और 5 शेष बचे।
9. वह बड़ी से बड़ी संख्या पता करो जो 398, 437 और 500 को इस प्रकार बाँटे कि क्रमश: 7, 12 और 13 शेष बचे।
10. दो अलग-अलग ड्रमों में क्रमश: 529 लीटर और 667 लीटर दूध होता है। ड्रमों की अधिक से अधिक घनता पता करो जो दोनों ड्रमों (कंटेनरों) के दूध को पूरी तरह माप सकता है।
11. यहाँ 136 सेब, 170 आम और 225 संतरे हैं। ये बक्सों में इस प्रकार बंद किए जाने हैं कि प्रत्येक बक्से में फलों की संख्या बराबर (समान) रहे। प्रत्येक बक्से में फलों की संभव सबसे बड़ी संख्या पता करो।
12. लकड़ी के तीन टुकड़े जो 54 मीटर, 36 मीटर और 24 मीटर लम्बे हैं, को बराबर लम्बाई के फट्टों/तख्तों में काटा (बाँटा) जाना है। प्रत्येक फट्टे (तख्त) की सबसे बड़ी संभव लम्बाई क्या होगी?

13. एक कमरा 4.8 मीटर और 5.04 माप का है। बिना कोई भुजा काटे वर्ग टाइल जो कि प्रयोग की जा सकती है, फर्श को टाइल लगाने के लिए सबसे बड़ी संभव लम्बाई पता करो।

14. निम्नलिखित भिन्नों को अपने न्यूनतम रूप में लिखो:-

(i) $\frac{85}{102}$ (ii) $\frac{52}{130}$ (iii) $\frac{289}{391}$

3.10 लघुतम सममापवर्त्य (ल.स.व) (Lowest Common Multiple)

पिछले भागों में हम दो या दो से अधिक संख्याओं के बड़े से बड़े उभयनिष्ठ गुणनखंड (म.स.व.) (HCF) के बारे में सीख चुके हैं और हम दो या दो से अधिक संख्याओं के उभयनिष्ठ गुणजों के बारे में भी सीख चुके हैं। इस भाग में हम दी गई संख्याओं के छोटे से छोटे उभयनिष्ठ गुणजों के बारे में सीखेंगे जिसे संख्याओं का ल.स.व. (LCM) भी कहते हैं।

ल.स.व (LCM) दो या अधिक दी गई संख्याओं का लघूत्तम सममापवर्त्य इन संख्याओं के उभयनिष्ठ गुणजों में से सबसे छोटा होता है।

या

ल.स.व (LCM) वह छोटी से छोटी संख्या है जो कि दी गई सभी संख्याओं से विभाज्य होती है।

उदाहरण के लिए:- मान लो संख्या 6 और 8 हैं।

6 के गुणज 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, ... हैं।

8 के गुणज 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, ... हैं।

उभयनिष्ठ गुणज 24, 48, ... हैं।

स्पष्ट है कि 24 सभी गुणजों में से छोटा गुणज है।

$\therefore$ 6 और 8 का ल.स.व = 24

* ल.स.व वह संख्या है जो प्रत्येक संख्या से पूरा-पूरा विभाज्य होता है।
* दो संख्याओं का ल.स.व (LCM) उनसे बड़ा होता है या उन संख्याओं में एक दूसरे का गुणज होता है।
* दी संख्याओं का ल.स.व उन संख्याओं से कम नहीं होता।

दो या दो से अधिक संख्याओं का ल.स.व (LCM) पता करने के दो ढंग हैं।

* अभाज्य गुणनखंड विधि
* सांझी बंटन विधि

अब हम इन दोनों ढंगों के बारे में सीखेंगे।

3.10.1 अभाज्य गुणनखंडन विधि (Prime Factorisation Method)

ल.स.व (LCM) पता करने के लिए हम नीचे लिखे चरणों का पालन करेंगे।

चरण 1:- प्रत्येक दी संख्या के अभाज्य गुणनखंड बनाएँ।

चरण 2:- अधिक से अधिक बार प्रकट हुए प्रत्येक अलग-अलग अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल पता करें।

चरण 3:- उनके गुणनखंडों का गुणनफल वांछित म.स.व. है।

उदाहरण 24: **नीचे लिखी संख्याओं का ल.स.व पता करो।**

(i) 20, 30 **(ii) 36, 120** **(iii) 72, 84**

(iv)40, 75, 126 **(v) 108, 135, 162**

हल : (i)

$\therefore\ 20 = 2 \times 2 \times 5$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

हम देखते हैं कि इन अभाज्य गुणनखंडों में 2 अधिक से अधिक 2 बार, 3 और 5 अधिक से अधिक 1 बार आता है।

$\therefore$ 20 और 30 का ल.स.व $= 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

(ii)

$\therefore\ 36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

इन अभाज्य गुणनखंडों में 2 अधिक से अधिक 3 बार, 3 अधिक से अधिक 2 बार और 5 से अधिक से अधिक 1 बार आता है।

$\therefore$ 36 और 120 का ल.स.व $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$

(iii)

$\therefore\ 72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 84 \\ \hline 2 & 42 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

इन अभाज्य गुणनखंडों में अधिक से अधिक 3 बार, 3 अधिक से अधिक 2 बार और 7 अधिक से अधिक 1 बार आता है।

$\therefore$ 72 और 84 का ल.स.व $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 504$

(iv)

$\therefore\ 40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$75 = 3 \times 5 \times 5$

$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 40 \\ \hline 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

इन अभाज्य गुणनखंडों में 2 अधिक से अधिक 3 बार, 3 और 5 अधिक से अधिक 2 बार और 7 अधिक से अधिक 1 बार आता है।

$\therefore$ 40, 75 और 126 का ल.स.व $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 12600$

(v) $108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$135 = 3 \times 3 \times 3 \times 5$

$162 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 108 \\ \hline 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 135 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 162 \\ \hline 3 & 81 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

इन अभाज्य गुणनखंडों में 2 अधिक से अधिक 2 बार, 3 अधिक से अधिक 4 बार और 5 अधिक से अधिक 1 बार आता है।

∴ 108, 135 और 162 का ल.स.व $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 1620$

3.10.2 सार्व भाग विधि (Common Division Method)

दो या दो से अधिक संख्याओं का ल.स.व पता करने के लिए हम निम्नलिखित चरणों (का प्रयोग) का पालन करते हैं।

चरण 1:- दी संख्याओं को एक पंक्ति में विधि द्वारा अलग-अलग करना।

चरण 2:- एक संख्या प्राप्त करनी जो दोनों दी संख्याओं को पूरा-पूरा बाँटती है।

चरण 3:- उनके बिल्कुल नीचे भागफल लिखो जो चुनी संख्या से बाँट कर प्राप्त होता है और जो संख्याएँ भाग नहीं होती उन्हें उसी प्रकार नीचे लिख दें।

चरण 4:- प्रक्रिया को तब तक दोहराएँ जब तक दी गई दोनों संख्याओं में से एक संख्या भाग नहीं होती।

चरण 5:- विभाजकों और अभाज्य संख्याओं का गुणनफल दी गई संख्याओं का ल.स.व. होता है।

उदाहरण 25: **निम्नलिखित संख्याओं का ल.स.व. पता करो।**

(i) 45, 60 **(ii) 12, 18 और 20** **(iii) 30, 40 और 75**

(iv) 84, 90 और 120 **(v) 56, 72 और 144**

हल : (i)

$$\begin{array}{r|l} 3 & 45, 60 \\ \hline 5 & 15, 20 \\ \hline & 3, 4 \end{array}$$

∴ 45 और 60 का ल.स.व. $= 3 \times 5 \times 3 \times 4 = 180$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12, 18, 20 \\ \hline 2 & 6, 9, 10 \\ \hline 3 & 3, 9, 5 \\ \hline & 1, 3, 5 \end{array}$$

∴ 12, 18 और 20 का ल.स.व. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$

(iii)

$$\begin{array}{r|l} 2 & 30, 40, 75 \\ \hline 5 & 15, 20, 75 \\ \hline 3 & 3, 4, 15 \\ \hline & 1, 4, 5 \end{array}$$

$\therefore$ 30, 40 और 75 का ल.स.व. $= 2 \times 5 \times 3 \times 4 \times 5 = 600$

(iv)

$$\begin{array}{r|l} 2 & 84, 90, 120 \\ \hline 2 & 42, 45, 60 \\ \hline 3 & 21, 45, 30 \\ \hline 5 & 7, 15, 10 \\ \hline & 7, 3, 2 \end{array}$$

$\therefore$ 84, 90 और 120 का ल.स.व. $= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 3 \times 2 = 2520$

(v)

$$\begin{array}{r|l} 2 & 56, 72, 144 \\ \hline 2 & 28, 36, 72 \\ \hline 2 & 14, 18, 36 \\ \hline 3 & 7, 9, 18 \\ \hline 3 & 7, 3, 6 \\ \hline & 7, 1, 2 \end{array}$$

$\therefore$ 56, 72, 144 का ल.स.व. $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 2 = 1008$

3.10.3 ल.स.व. का प्रयोग (शाब्दिक समस्याएँ) (Applications of LCM (Word Problems)

इस भाग में हम दैनिक जीवन की समस्याओं को सुलझाने के लिए ल.स.व. के प्रयोग की कुछ क्रियाओं की चर्चा करेंगे। आओ, इन समस्याओं के लिए नीचे लिखी उदाहरण लें:

उदाहरण 26: 12, 15 और 24 से भाग होने वाली छोटी से छोटी संख्या पता करो।

हल : हम जानते हैं कि 12, 15 और 24 से भाग होने वाली छोटी से छोटी संख्या इनका ल.स.व. होती है।

हम 12, 15 और 24 का ल.स.व. पता करते हैं।

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12, 15, 24 \\ \hline 2 & 6, 15, 12 \\ \hline 3 & 3, 15, 6 \\ \hline & 1, 5, 2 \end{array}$$

$\therefore$ ल.स.व. $= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2 = 120$

इसलिए वाँछित संख्या = 120

उदाहरण 27: वह सबसे छोटी संख्या पता करो जिसे 6, 15 और 21 से भाग दें पर प्रत्येक हालत में 4 शेष बचता हो।

हल : हम जानते हैं कि 6, 15, 21 से भाग होने वाली छोटी से छोटी संख्या इनका ल.स.व. होगी।

इसलिए वाँछित संख्या इनके ल.स.व से 4 अधिक होगी।

हम 6, 15, 21 का ल.स.व. पता करो।

3	6, 15, 21
	2, 5, 7

$\therefore$ ल.स.व. $= 3 \times 2 \times 5 \times 7 = 210$

इस प्रकार, वाँछित संख्या $= 210 + 4 = 214$

उदाहरण 28: तीन अंकों की दो सबसे बड़ी संख्या पता करो जो 18, 24 और 36 से पूरी-पूरी विभाजित हो।

हल : पहले 18, 24 और 36 का ल.स.व पता करे।

$\therefore$ ल.स.व. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$

2	18, 24, 36
2	9, 12, 18
3	9, 6, 9
3	3, 2, 3
	1, 2, 1

अब, तीन अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या 999 है।

हमनें पता किया कि जब 999 को 72 से भाग करते है तो 63 शेष बचता है।

72) 999 (13
– 72
279
– 216
63

इस प्रकार, तीन अंकों की वह सबसे बड़ी संख्या जो 18, 24 और 36 से पूरी पूरी भाग होती है $= 999 - 63 = 936$

उदाहरण 29: 4 अंकों की वह छोटी से छोटी संख्या पता करो जो 15, 20 और 24 से पूरी-पूरी भाग हो।

हल : पहले, 15, 20 और 24 का ल.स.व पता करो।

2	15, 20, 24
2	15, 10, 12
3	15, 5, 6
5	5, 5, 2
	1, 1, 2

$\therefore$ ल.स.व $= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2 = 120$

अब, 4 अंकों की छोटी से छोटी संख्या 1000 है।

हमने देखा कि जब 1000 को 120 से भाग किया तो 40 शेष बचा।

120) 1000 (8
– 960
40

$\therefore$ 4 अंको की छोटी से छोटी संख्या जो 15, 20 और 24 से पूरी-पूरी बाँटी जाएगी $= 1000 + (120 - 40) = 1080$

इस प्रकार, वाँछित संख्या 1080 है।

उदाहरण 30: सुबह की सैर के लिए, तीन व्यक्ति एक समय पैर उठाकर चलना शुरू करते हैं। उनके कदमों की लम्बाइयाँ क्रमशः 70 सम, 80सम और 75 सम है। इनमें से प्रत्येक कितनी न्यूनतम दूरी चले कि तीनों उसे पूरे-पूरे कदमों में तय करें?

हल : प्रत्येक व्यक्ति द्वारा चली गई दूरी को एक जैसी और कम से कम (न्यूनतम) रहना है। यह न्यूनतम दूरी, जिसे प्रत्येक व्यक्ति ने चलना है उनके कदमों के नाप का ल.स.व होगी।

2	70, 80, 75
5	35, 40, 75
	7, 8, 15

$\therefore$ ल.स.व. $= 2 \times 5 \times 7 \times 8 \times 15 = 8400$सेमी

इसलिए वाँछित न्यूनतम दूरी = 8400 सेमी या 84मीटर है।

उदाहरण 31: चार घंटियाँ 2, 3, 4 और 5 सेकंड के अंतराल पर बजती है। यदि घंटियाँ सुबह 8:00 बजे इकट्ठी बजी हों तो दोबारा कब इकट्ठी बजेगी?

हल : यदि चारों घंटियाँ एक ही समय इकट्ठी बजी हों तो यह अंतराल 2, 3, 4 और 5 सेकंड का गुणज है। इसलिए, पहले हम 2, 3, 4 और 5 का ल.स.व. पता करेंगे।

2	2, 3, 4, 5
	1, 3, 2, 5

$\therefore$ ल.स.व. $= 2 \times 3 \times 2 \times 5 = 60$

इस प्रकार 60 सेकंड या 1 मिनट बाद घंटियाँ इकट्ठी बजेंगी।

पहले वह इकट्ठी सुबह 8:00 बजे बजी हो तब वह सुबह 8:01 बजे 1 मिनट बाद इकट्ठी बजेगी।

3.10.4 म.स.व. और ल.स.व. में संबंध (Relation Between H.C.F. and L.C.M.):-

* दी संख्याओं का म.स.व. (H.C.F.) हमेशा ल.स.व. (L.C.M.) का एक गुणनखंड होता है। या ल.स.व., म.स.व. का गुणज होता है।
* दो संख्याओं के म.स.व. (H.C.F.) और ल.स.व. का गुणनफल, दोनों संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है। यदि a और b दो संख्याएँ हैं तो $a \times b$ = म.स.व. (H.C.F.) $\times$ ल.स.व. (L.C.M.)

उदाहरण के लिए:- मान लो दो संख्याएँ 12 और 18 है।

$12 = 2 \times 2 \times 3$

और $18 = 2 \times 3 \times 3$

म.स.व. $= 2 \times 3 = 6$

और ल.स.व. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

अब दी गई संख्याओं का गुणनफल $= 12 \times 18 = 216$

इनके म.स.व. और ल.स.व. का गुणनफल $= 6 \times 36 = 216$

इसलिए दो संख्याओं का गुणनफल= इनके म.स.व. और ल.स.व. का गुणनफल

नोट:- यह परिणाम केवल दो संख्याओं के लिए सत्य है।

उदाहरण 32: क्या दो संख्याओं में 18 म.स.व. और 42 ल.स.व. के रूप में हो सकते हैं। अपने जवाब के समर्थन में कारण बताओ।

हल : हम जानते हैं कि दी गई संख्याओं का म.स.व. उनके ल.स.व. का एक गुणनखंड होता है।

परन्तु 18, 42 का गुणनखंड नहीं है।

इसलिए म.स.व. 18 और ल.स.व. 42 दो संख्याओं के रूप में नहीं हो सकते।

उदाहरण 33: **दो संख्याओं का म.स.व. (HCF) और ल.स.व. (LCM) क्रमशः 15 और 75 है। यदि एक संख्या 25 हो तो दूसरी संख्या पता करो।**

हल : पहली संख्या × दूसरी संख्या = म.स.व. × ल.स.व.

$$\text{दूसरी संख्या} = \frac{\text{म.स.व} \times \text{ल.स.व}}{\text{पहली संख्या}} = \frac{15 \times 75}{25} = 45$$

इसलिए दूसरी संख्या = 45 है।

प्रश्नावली 3.5

1. अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा निम्नलिखित का ल.स.व पता करो।

   (i) 45, 60 (ii) 52, 56 (iii) 96, 360

   (iv) 36, 96, 180 (v) 18, 42, 72

2. सार्व भाग विधि द्वारा निम्नलिखित का ल.स.व पता करो।

   (i) 24, 64 (ii) 42, 63 (iii) 108, 135, 162

   (iv) 16, 18, 48 (v) 48, 72, 108

3. सबसे छोटी संख्या पता करो जो 6, 8 और 10 से विभाजित हो जाए।
4. वह सबसे छोटी संख्या पता करो जिसे 6, 12, 15 से भाग देने पर प्रत्येक हालत में 7 शेष रहे।
5. 12, 18 और 30 से भाग होने वाली चार अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या पता करो।
6. चार अंकों की वह छोटी से छोटी संख्या पता करो जो 15, 24 और 36 से भाग हो।
7. 4, 7, 12 और 14 सेकंड के अंतराल से 4 घंटियाँ बजती हैं। यदि घंटियाँ एक ही समय सुबह 5 बजे बजें तो वह दोबारा इकट्ठे कब बजेंगी?
8. तीन लड़के एक ही स्थान से एक ही बार कदम उठाकर चलना शुरू करते हैं। उनके कदमों का माप क्रमशः 56 सेमी, 70 सेमी और 63 सेमी है। आरम्भिक बिंदु से कितनी दूरी पर वे दोबारा इकट्ठे कदम रखेंगे।
9. क्या दो संख्याओं में 15 उनके म.स.व (HCF) के रूप में और 65 उनके ल.स.व (LCM) के रूप में हो सकता है? अपने उत्तर के समर्थन में कारण बताओ।
10. क्या दो संख्याओं में 12 उनके म.स.व (HCF) के रूप में और 72 उनके ल.स.व (LCM) के रूप में हो सकता है? अपने उत्तर के समर्थन में कारण बताओ।
11. दो संख्याओं का म.स.व (HCF) और ल.स.व. (LCM) क्रमशः 13 और 182 है। यदि एक संख्या 26 है तो दूसरी संख्या पता करो।
12. दो सह-अभाज्य संख्याओं का ल.स.व (LCM) 195 है। यदि एक संख्या 15 है तो दूसरी संख्या पता करो।
13. दो संख्याओं का म.स.व (HCF) 6 है और दो संख्याओं का गुणनफल 216 है उनका ल.स.व (LCM) पता करो।

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. कौन सी संख्या प्रत्येक संख्या का गुणनखंड है?

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

2. कितनी सम संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं?

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

3. सबसे छोटी भाज्य संख्या .... है।

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

4. निम्नलिखित में से कौन सी संख्या एक आदर्श संख्या (Perfect Number) है?

   (a) 8 (b) 6 (c) 12 (d) 18

5. निम्नलिखित में से कौन सा 7 का गुणज नहीं है?

   (a) 35 (b) 48 (c) 56 (d) 91

6. निम्नलिखित में से कौन सा 36 का गुणनखंड नहीं है?

   (a) 12 (b) 6 (c) 9 (d) 8

7. 25 तक अभाज्य संख्याओं की संख्या कितनी है?

   (a) 9 (b) 10 (c) 8 (d) 12

8. किस गणित शास्त्री ने अभाज्य/भाज्य संख्याओं को पता करने का ढंग दिया?

   (a) आर्यभट्ट (b) रामानुजन (c) एरेटोस्थेनेज़ (d) गोल्डबैच

9. कथन ''चार से बड़ी प्रत्येक सम संख्या को दो विषम संख्याओं के जोड़ से दर्शाया जा सकता है। किसने दिया?

   (a) गोल्डबैच (b) इराटोस्थीनस (c) आर्यभट्ट (d) रामानुजन

10. निम्नलिखित में से कौन सी अभाज्य संख्या है?

    (a) 221 (b) 195 (c) 97 (d) 111

11. निम्नलिखित में से कौन सी संख्या 4 से विभाज्य है?

    (a) 52369 (b) 25746 (c) 21564 (d) 83426

12. निम्नलिखित में से कौन सा कथन सही नहीं है?

    (a) यदि एक संख्या दो संख्याओं का गुणनखंड है तब यह उनके जोड़ का भी गुणनखंड होगी।

    (b) यदि एक संख्या दो संख्याओं का गुणनखंड है तब यह उनके अंतर का भी गुणनफल होगा।

    (c) 15 और 24 एक दूसरे की सह-अभाज्य।

    (d) 1 न ही अभाज्य है और न ही सह-अभाज्य।

13. निम्नलिखित में से कौन सा जोड़ा सह-अभाज्य है?

    (a) (12, 25) (b) (18, 27) (c) (25, 35) (d) (21, 56)

14. निम्नलिखित में से कौन सी संख्या 8 से भाग होती है?

    (a) 123568 (b) 412580 (c) 258124 (d) 453230

15. 84 के अभाज्य गुणनखंड है?

(a) $2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 7$ (b) $7 \times 2 \times 3 \times 3$

(c) $2 \times 3 \times 7 \times 2$ (d) $3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 7$

16. 25 और 45 का म.स.व (HCF) .... है।

(a) 15 (b) 5 (c) 225 (d) 135

17. यदि दो संख्याओं का ल.स.व (LCM) 36 है तब इनमें से कौन सा उनका म.स.व (HCF) नहीं हो सकता।

(a) 9 (b) 12 (c) 8 (d) 18

18. दो सह-अभाज्य संख्याओं का ल.स.व (LCM) 143 है। यदि एक संख्या 11 है तो दूसरी संख्या पता करो।

(a) 132 (b) 154 (c) 18 (d) 13

19. सबसे बड़ी संख्या पता करो जो 145 और 235 को भाग करती है और प्रत्येक केस में शेष 1 को छोड़ती है?

(a) 24 (b) 18 (c) 19 (d) 17

20. सबसे बड़ी 4 अंकों की संख्या जो 12, 15 और 20 से विभाज्य है, होगी?

(a) 9990 (b) 9000 (c) 9960 (d) 9999

सीखने के परिणाम

इस अध्याय के पूरा होने के बाद विद्यार्थी :

1. गुणनखंडों और गुणजों के बारे में समझने के योग्य हो गए हैं।
2. अलग-अलग संख्याओं के बारे में जानकारी के योग्य हैं।
3. असल भाग विधि के बिना संख्या की विभाज्यता की जाँच करने के योग्य है।
4. ल.स.व. (L.C.M.) और म.स.व. (H.C.F.) के ज्ञान को लागू करके उसे दैनिक जीवन में प्रयोग कर सकते हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 3.1

1. (i) 1, 2, 3, 6, 9, 18 (ii) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

(iii) 1, 3, 5, 9, 15, 45 (iv) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

(v) 1, 5, 13, 65

2. (i) 6, 12, 18, 24, 30, 36 (ii) 9, 18, 27, 36, 45, 54

(iii) 11, 22, 33, 44, 55, 66 (iv) 15, 30, 45, 60, 75, 90

(v) 24, 48, 72, 96, 120

3. (i) 17, 34, 51, 68, 85 (ii) 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96

(iii) 21, 42, 63, 84

4. (ii), (iv)

5. (i) 16 = 3 + 13 =5 + 11 (ii) 28 = 11 + 17

(iii) 40 = 3 + 37 = 11 + 29 = 17 + 23

6. (i) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 (ii) 89, 97, 101, 103

(iii) 127, 129, 131, 137, 139

7. नहीं

8. (i) 6 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 13 (v) 15

9. 23, 37, 53, 73

प्रश्नावली 3.2

1. (i) 1, 2, 4, 8 (ii) 1, 5 (iii) 1, 2, 3, 4, 6, 12 (iv) 1, 7 (v) 1

2. (i) 15, 30, 45 (ii) 24, 48, 72 (iii) 12, 24, 36

3. 2 से विभाज्य:– (i), (iii), (iv), (v)

4 से विभाज्य:– (iii), (iv)

4. 3 से विभाज्य:– (i), (ii), (iv), (v)

9 से विभाज्य:– (ii), (v)

5. 5 से विभाज्य:– (ii), (iii), (v)

10 से विभाज्य:– (ii)

6. (i), (iii), (iv) **7.** (i), (iii), (v) **8.** (i), (ii), (iii), (v)

9. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) सत्य

10. 45 **11.** (ii), (iii), (v)

प्रश्नावली 3.3

1. (i) $96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ (ii) $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

(iii) $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

2. (i) 7, 4, 2 (ii) 10, 5 (iii) 8, 3, 4, 2

3. (i) $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$ (ii) $980 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7$

(iii) $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$ (iv) $150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$

(v) $324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

प्रश्नावली 3.4

1. (i) 6 (ii) 45 (iii) 12 (iv) 7 (v) 18

2. (i) 34 (ii) 18 (iii) 8 (iv) 48 (v) 12

3. 1 **4.** 2 **5.** 1 **6.** 1 **7.** 16

8. 65 **9.** 17 **10.** 23 लीटर **11.** 17 **12.** 6मी

13. 24सेमी **14.** (i) $\frac{5}{6}$ (ii) $\frac{2}{5}$ (iii) $\frac{17}{23}$

प्रश्नावली 3.5

1. (i) 180 (ii) 728 (iii) 1440 (iv) 1440 (v) 504

2. (i) 192 (ii) 126 (iii) 1620 (iv) 144 (v) 432

3. 120 **4.** 67 **5.** 9900 **6.** 1080 **7.** 5 : 01 : 24 बजे

8. 2520 सेमी **9.** नहीं **10.** हाँ **11.** 91 **12.** 13

13 36

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. b **2.** a **3.** d **4.** b **5.** b **6.** d **7.** a **8.** c

9. a **10.** c **11.** c **12.** c **13.** a **14.** a **15.** c **16.** b

17. c **18.** d **19.** b **20.** c

Y7C4I7

4

सम्पूर्ण संख्याएँ

(INTEGERS)

उद्देश्य

इस अध्याय में आप सीखेंगे

(i) प्राकृतिक संख्या से सम्पूर्ण संख्या के अंकों को विस्तृत रूप में समझना।

(ii) सम्पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर अंकित करना।

(iii) सम्पूर्ण संख्याओं के समूह में से बड़ी और छोटी सम्पूर्ण संख्याओं को समझना।

(iv) सम्पूर्ण संख्याओं के जोड़ और व्यकलन से संबंधित सम्बन्धित समस्याओं का निवारण (हल) करना।

4.1 भूमिका (Introduction)

हम पहले ही प्राकृतिक संख्याओं के बारे में पढ़ चुके हैं, जैसे कि 1, 2, 3,4, 5, ... जिसे हम संख्याक भी कहते हैं। हम पूर्ण संख्याओं के बारे में भी पढ़ चुके हैं जैसे 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... जिसे हम प्राकृतिक संख्याओं का विस्तार कहते हैं। हम पहले पढ़ चुके है कि दो पूर्ण संख्याओं का जोड़ एक पूर्ण संख्या होती है परन्तु दो संख्याओं का अंतर हमेशा पूर्ण संख्या नहीं होती। (क्या आप जानते हैं $7 - 5 = 2$ परन्तु $5 - 7 =$) इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए हमे पूर्ण संख्याओं से सम्पूर्ण संख्याओं की ओर जाना पड़ेगा। आओ, दैनिक जीवन से कुछ उदाहरण लेते हैं।

- सचिन पहाड़ी स्थानों पर जाता है जहाँ का तापमान 0°C है। यदि तापमान 2°C और नीचे जाता है तो तापमान 0°C से 2°C कम (नीचे) होगा। क्या आप वर्तमान तापमान बता सकते है?
- रमेश और अर्जुन दुकान पर पैन खरीदने गए। पैन की कीमत 25 रुपये है परन्तु रमेश की जेब में 20 हैं। उसने 5 रुपये अर्जुन से उधार लिए और पैन खरीद लिया। अब रमेश की जेब में कोई पैसा नहीं या '0' पैसे हैं पर उसे उधार लिए गए पैसे याद रखने होंगे। वो ये पाँच रुपये अपनी कॉपी में लिखता है। वह इन उधार वाले पैसों को कैसे लिखेगा?

उपरोक्त उदाहरणों में हम महसूस करते हैं कि उधार वाली स्थिति या 0° से नीचे लिखने के लिए हमें विशेष अंकों की ज़रूरत है। वास्तव में हमें पूर्ण संख्याओं से ऊपर संख्या प्रणाली (Number System) की ज़रूरत है।

उदाहरण के लिए : कमाना और खर्च करना, पूर्व-पश्चिम, जमा करवाना और पैसे निकालना, समुद्र तल से ऊपर या समुद्र तल से नीचे, जमाव बिंदु दर्जे से ऊपर और जमाव बिंदु दर्जे से नीचे आदि के लिए हमें ऋणात्मक अंकों की ज़रूरत है।

4.2 ऋणात्मक संख्याएँ (Negative Numbers)

ऋणात्मक अंक '0' से कम वाले वास्तविक अंक हैं। ऋणात्मक अंक धनात्मक अंकों के उल्ट की व्याख्या करती हैं। यदि धनात्मक अंक दाई ओर को चलते हैं तो ऋणात्मक अंक बाईं ओर को चलते हैं। यदि धनात्मक अंक समुद्र तल से ऊपर की तरफ हैं तो ऋणात्मक अंक समुद्र तल से नीचे की तरफ हैं। यदि धनात्मक अंक जमा करवाना बताते हैं तो ऋणात्मक अंक निकलवाने के लिए बताते हैं। यह हमें ज्यादा या कम के बारे में बताते हैं। यदि किसी को कर्जा देना है तो वह उसका ऋणात्मक प्रयोग है। ऋणात्मक अंक आम तौर पर पैमाने पर '0' से कम के लिए प्रयोग किए जाते हैं जैसे कि तापमान के सेल्सियस और फ़ारेनहाइट पैमाने।

ऋणात्मक संख्याएँ आम तौर पर ऋणात्मक चिन्ह (–) के साथ लिखी जाती हैं। जैसे –1 (घटाओं 1 या ऋणात्मक 1)। '0' से कम वाले अंक ऋणात्मक और अधिक वाले अंक धनात्मक होते हैं और '0' अपने आप में न ऋणात्मक है, न धनात्मक है।

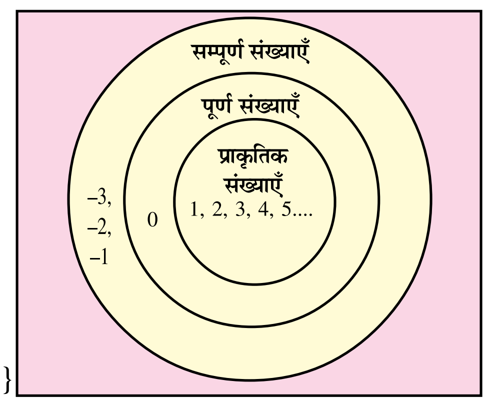
आम भाषा में किसी चीज़ के उल्ट का उल्ट वास्तविक ही होता है। इसी प्रकार ही ऋणात्मक का ऋणात्मक धनात्मक होता है।

उदाहरण के लिए : $-(-1) = 1$

इस प्रकार हमें एक नई प्रकार की संख्याएँ प्राप्त होती हैं जिन्हें हम ऋणात्मक संख्याएँ (ऋणात्मक सम्पूर्ण संख्याएँ) कहते हैं और ये हैं –1, –2, –3, –4, –5, ...

4.3 सम्पूर्ण संख्याएँ (Integers)

सबसे पहले जिनकी खोज हुई, वे थी प्राकृतिक संख्याएँ (गिनती करने वाली संख्याएँ) 1, 2, 3, 4 .... फिर हमने इस समूह में '0' को शामिल किया और हमने नए प्राप्त हुए समूह को पूर्ण संख्याओं का समूह (0, 1, 2, 3, 4..........) कहा। अब हमने देखा कि हमारे पास ऋणात्मक संख्याएँ भी है; यदि हम इन ऋणात्मक संख्याओं (–1, –2, –3, –4 ....) को पूर्ण संख्याओं के समूह में शामिल कर देते हैं। तो हमें संख्याओं का एक बड़ा समूह (0, ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, ...) प्राप्त होता है।



(........... –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5..........)

1, 2, 3, 4, 5......को धनात्मक सम्पूर्ण संख्याएँ कहा जाता है।

–1, –2, –3, –4, –5 ....

को ऋणात्मक सम्पूर्ण संख्याएँ कहा जाता है।

0 (शून्य) न धनात्मक है, न ऋणात्मक है।

N : {1, 2, 3, 4.........}

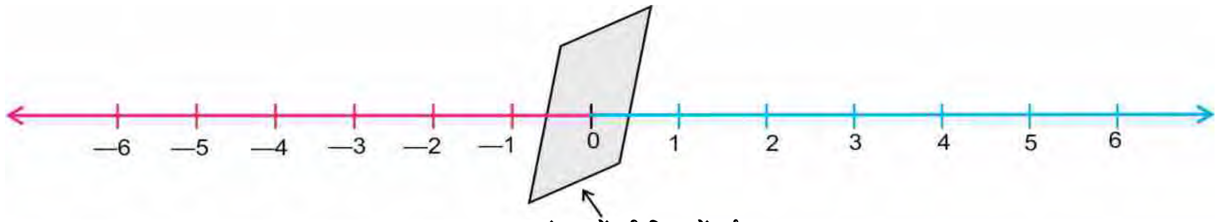
W : {0, 1, 2, 3, 4..........}

Z या I : {.........–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4............}

4.4 सम्पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाना (Representation of Integers on Number Line)

मान लो संख्या रेखा के एक भाग पर हम पूर्ण संख्याएँ 0, 1, 2, 3........ लिखते हैं।

यदि हम शून्य के स्थान पर एक दर्पण संख्याओं 1, 2, 3, 4........... की तरफ मुँह करके रखते हैं तो हमें संख्या रेखा के इस भाग का प्रतिबिंब दर्पण में उल्ट दिशा में प्राप्त होता है। इस भाग पर हमें संख्याओं 1, 2, 3, 4........., के प्रतिबिम्ब प्राप्त होते हैं और हमें इन्हें क्रमशः –1, –2, –3 .... से लिखते हैं।



धनात्मक संख्याओं की दिशा में दर्पण

हमें एक रेखा प्राप्त होती है जो दोनों दिशाओं में अनन्त दूरी तक जाती है और इसके मध्य में शून्य (0) है। शून्य के दाईं तरफ धनात्मक सम्पूर्ण संख्याएँ 1, 2, 3, 4 .... हैं और बाईं तरफ ऋणात्मक सम्पूर्ण संख्याएँ –1, –2, –3, –4........ जो धनात्मक संख्याओं 1, 2, 3...... के प्रतिबिम्ब हैं। यहाँ 1 का प्रतिबिम्ब –1, 2 का प्रतिबिम्ब –2 और इसी प्रकार आगे हैं।

4.5 सम्पूर्ण संख्याओं का क्रम (Ordering of Integers)

संख्या रेखा पर कोई भी संख्या अपने से बाईं ओर की किसी भी संख्या से बड़ी और दाईं ओर की किसी भी संख्या से छोटी होती है।

कुछ महत्वपूर्ण धारणाएँ/निरीक्षण (Some Important Observations:)

(a) प्रत्येक सम्पूर्ण संख्या की एक परवर्ती और पूर्ववर्ती संख्या होती है।

(b) प्रत्येक धनात्मक सम्पूर्ण संख्या '0' से बड़ी तथा प्रत्येक ऋणात्मक सम्पूर्ण संख्या '0' से छोटी होती है।

(c) दो संख्याओं में से बड़ी संख्या का ऋणात्मक, दोनों संख्याओं की ऋणात्मक संख्याओं में से छोटी संख्या होती है।

अर्थात $15 > 13$ परन्तु $-15 < -13$

(d) 0 के दाईं ओर कोई संख्या '0' से जितना दूर होगी उतनी वह संख्या बड़ी होगी।

(e) '0' के बाईं ओर कोई संख्या '0' से जितना दूर होगी उतनी वह संख्या छोटी होगी।

(f) सबसे छोटी धनात्मक सम्पूर्ण संख्या 1 है, परन्तु सबसे बड़ी सम्पूर्ण संख्या लिखना संभव नहीं है।

(g) सबसे बड़ी ऋणामक सम्पूर्ण संख्या '–1' है, परन्तु सबसे छोटी सम्पूर्ण संख्या लिखना संभव नहीं है।

(h) प्रत्येक धनात्मक सम्पूर्ण संख्या प्रत्येक ऋणात्मक सम्पूर्ण संख्या से बड़ी होती है।

(i) '0' न धनात्मक है और न ही ऋणात्मक है।

(j) '0' सभी ऋणात्मक सम्पूर्ण संख्याओं से बड़ा है।

उदाहरण 1: **निम्नलिखित के उल्ट लिखो।**

(a) समुद्र तल से 300 फुट ऊपर

(b) बैंक खाते में से 500 रुपये निकलवाना

हल : (a) समुद्र तल से 300 फुट नीचे।

(b) बैंक खाते में 500 रुपये जमा करवाना

उदाहरण 2: **निम्नलिखित स्थितियों को सम्पूर्ण संख्याओं से दर्शाओ।**

(a) **माऊंट ऐवरेस्ट की समुद्र तल से ऊँचाई 8848 मीटर है।**

(b) **एक पनडुब्बी समुद्र तल से 600 मीटर गहराई पर है।**

(c) **200 रुपये की हानि।**

(d) **शेयर मार्केट में 200 अंकों का उछाल।**

हल : (a) +8848 (यहाँ '+' समुद्र तल से ऊँचाई को मीटरों में दर्शाता है।)

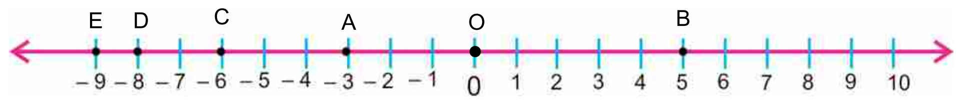
(b) –600 (यहाँ '–' समुद्र तल से गहराई को मीटरों में दर्शाता है।)

(c) –200 (यहाँ '–' रुपये में हानि को दर्शाता है।)

(d) +200 (यहाँ '+' अंकों के उछाल को दर्शाता है।)

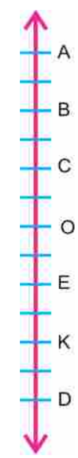
उदाहरण 3: **निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाओ –3, +5, –6, 0, –8, –9**

हल :



संख्या रेखा पर बिंदु 'O' शून्य (0) को दर्शाता है, A , –3 को दर्शाता है। B, +5 को दर्शाता है, C, –6 को दर्शाता है, D, –8 को दर्शाता है और E, –9 को दर्शाता है।

उदाहरण 4: **दिए गए चित्र में अर्ध्वाधर (Vertical) संख्या रेखा है जो कि सम्पूर्ण संख्याओं को दर्शाती है जिसमें बिंदु 'O' संख्या '0'को दर्शाता है तो निम्नलिखित के उत्तर दो।**



(a) यदि बिंदु D, –6 है तो +6 के लिए कौन-सा बिंदु है

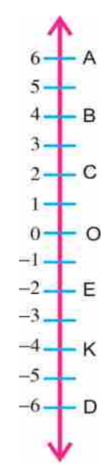
(b) क्या बिंदु A एक ऋणात्मक सम्पूर्ण संख्या है या धनात्मक सम्पूर्ण संख्या?

(c) बिंदु B से E तक सम्पूर्ण संख्याएं लिखो।

(d) सबसे छोटी संख्या वाला बिंदु कौन-सा है?

(e) बिंदु C किस संख्या को दर्शाता है?

हल : हम इस लंबी संख्या रेखा पर बिंदु 'O' को मूल बिंदु मानकर सम्पूर्ण संख्याएँ दर्शाते हैं।



हम धनात्मक सम्पूर्ण संख्याओं को शून्य '0' से ऊपर और ऋणात्मक सम्पूर्ण संख्याओं को शून्य '0' से नीचे क्रमानुसार दर्शायेंगे।

(a) दिया है D, –6 है और इसलिए A, +6 है।

(b) A धनात्मक सम्पूर्ण संख्या है।

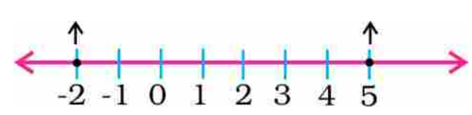
(c) B से E तक सम्पूर्ण संख्याएँ :4, 3, 2, 1, 0, –1,–2

(d) संख्या रेखा पर सबसे छोटी सम्पूर्ण संख्या को दर्शाता बिंदु D है।

(e) बिंदु C, +2 को दर्शाता है।

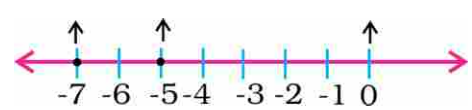
उदाहरण 5. **नीचे दिए गए संख्याओं के जोड़ों में संख्या रेखा पर कौन-सी संख्या दूसरी संख्या के दाईं ओर स्थित है।**

(a) –2, 5 **(b) –7, –5**



हल : (a) संख्या 5, – 2 के दाईं ओर है।

(b) –5, –7 के दाईं ओर है।



उदाहरण 6: **निम्नलिखित संख्याओं में कौन-सी संख्या दूसरी संख्या के बाईं ओर है।**

(a) –10, –20 (b) 7, –6

हल : (a) –20, –10 के बाईं ओर है।

(b) –6, 7 के बाईं ओर है।

उदाहरण 7: **निम्नलिखित संख्याओं के जोड़ों में सारी सम्पूर्ण संख्याएँ लिखो।**

(a) –30 और –20 (b) –8 और –15

(बीच की संख्याएँ अंत बिंदुओं को छोड़कर)

हल: (a) –30 और –20 के बीच सम्पूर्ण संख्याएँ हैं –29, –28, –27, –26, –25, –24, –23, –22,–21

(b) –8 और –15 के बीच सम्पूर्ण संख्याएँ हैं –14, –13, –12, –11, –10, –9

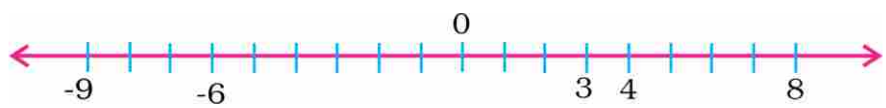
उदाहरण 8: **–9 से बड़ी चार ऋणात्मक सम्पूर्ण संख्याएँ लिखो।**

हल : बड़ी सम्पूर्ण संख्याएँ संख्या रेखा पर दाईं ओर होती है।

–9 के दाईं ओर सम्पूर्ण संख्याएँ है: –8, –7, –6,–5.

उदाहरण 9 : **निम्नलिखित सम्पूर्ण संख्याओं को आरोही क्रम में लिखो।**

(a) –9, 3, 4, –6, 8



हल : आरोही क्रम में –9, –6, 3, 4, 8

प्रश्नावली 4.1

1. दैनिक जीवन में दो ऐसी उदाहरण दो जिसमें हम धनात्मक और ऋणात्मक सम्पूर्ण संख्याओं का प्रयोग कर सकते हैं।
2. निम्नलिखित के उत्तर लिखो:

(a) 500 रुपये का लाभ

(b) बैंक खाते में से 70 रुपये निकलवाना

(c) 1000 रुपये जमा करवाना

(d) 326 B.C (ईसा पूर्व)

(e) समुद्र तल से 500 मीटर नीचे

(f) 0ºC से 25 ऊपर

3. प्रश्न नंबर 2 में दी सारी स्थितियों को सम्पूर्ण संख्याओं से दर्शाओ।
4. नीचे दी स्थितियों को सम्पूर्ण संख्याओं से दर्शाओ।

(a) 500 रुपये जमा करना।

(b) एक हवाई जहाज समुद्र तल से दो हज़ार मीटर ऊँचा उड़ रहा है।

(c) बैंक खाते में से 700 रुपये निकलवाना।

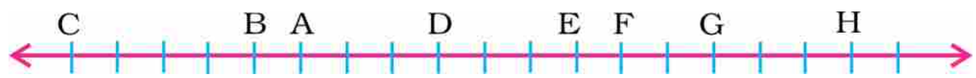
(d) एक गोताखोर तल से 6 फुट की गहराई तक गोता लगाता है।

5. निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाओ।

(a) –5 (b) +6 (c) 0 (d) +1

(e) –9 (f) –4 (g) +8 (h) +3

6. एक क्षैतिज संख्या रेखा पर सम्पूर्ण संख्याओं को दर्शाया गया हैं जैसे A, –2 को दर्शाता हैं। संख्या रेखा अनुसार नीचे दिए प्रश्नों के उत्तर दो।



(a) –3 को दर्शाता बिंदु कौन-सा है?

(b) बिंदु B के उल्ट एक बिंदु पता करो और उसका नाम P लिखो।

(c) बिंदु C और E के लिए सम्पूर्ण संख्याएँ लिखो।

(d) संख्या रेखा पर अंकित किए गए किस बिंदु की कीमत सबसे कम है?

7. नीचे दिए संख्याओं के जोड़ों में से, कौन-सी रेखा, संख्या रेखा पर बाईं ओर है।

(a) 2, 9 (b) –3, –8 (c) 0, –5

(d) –11, 10 (e) –9, 9 (f) 2, –200

8. निम्नलिखित जोड़ो के बीच सारी सम्पूर्ण संख्याएँ लिखो। (आरोही क्रम में)

(a) 0 और –6 (b) –6 और +6 (c) –9 और –17

(d) –19 और –5

9. (a) '–15' से बड़ी पाँच सम्पूर्ण संख्याएँ लिखो।

(b) '–20' से छोटी पाँच सम्पूर्ण संख्याएँ लिखो।

(c) 0 से बड़ी पाँच सम्पूर्ण संख्याएँ लिखो।

(d) 0 से छोटी पाँच सम्पूर्ण संख्याएँ लिखो।

10. निम्नलिखित जोड़ो में से बड़ी संख्या पर चक्कर लगाएँ।

(a) –5, –7 (b) 0, –3 (c) 5, 7

(d) –9, 0 (e) –9, –11 (f) –4, 4

(g) –10, –100 (h) 10, 100

11. नीचे लिखी सम्पूर्ण संख्याओं को आरोही क्रम में लिखें।

(a) 0, –7, –9, 5, –3, 2, –4

(b) 8, –3, 7, 0, –9, –6

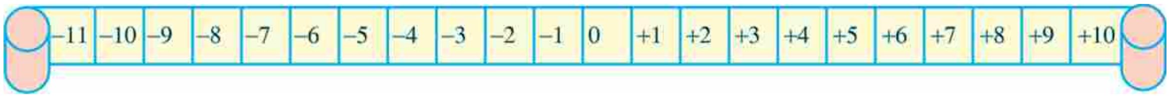
12. नीचे लिखी संख्याओं को अवरोही क्रम में लिखें।

(a) –9, 3, 4, –6, 8, –3

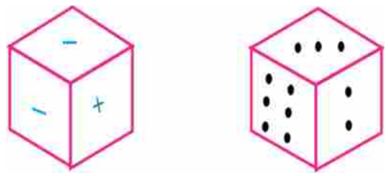
(b) 4, 8, –3, –2, 5, 0

4.6 एक खेल द्वारा सम्पूर्ण संख्याओं को समझना (Understanding integers with a game)

–30 से +30 तक एक पट्टी है, संपूर्ण संख्याएँ अंकित करो। दो पासे लो, (एक पर 1 से 6 तक अंक लिखो और दूसरे पर (+) के चिह्न और (–) के चिह्न लिखो।



दो खिलाड़ी इस खेल को एक समय में खेल सकते हैं। खिलाड़ी अंक पट्टी पर दो अलग-अलग रंगों के बटन 0 स्थान पर रखते हैं।



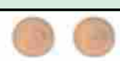
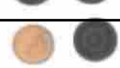
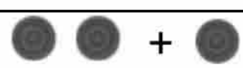
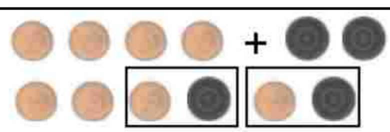
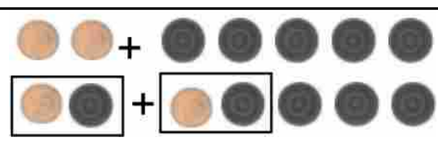
पहले A खिलाड़ी शुरु करेगा। वह दोनों पासे इकट्ठे फैंकेगा। यदि एक पासे पर '+' का चिह्न और दूसरे पासे पर 3 आता है, इसका अर्थ +3 है और A खिलाड़ी +3 पर अपना बटन रखेगा।

अब B खिलाड़ी की बारी है। वह दोनों फैंकेगा। एक पासे पर '–' का चिह्न और दूसरे पासे पर 4 आता है तो इसका अर्थ है वह –4 अंक प्राप्त करता है और उसका बटन –4 पर रखा जाएगा।

अब A खिलाड़ी की बारी है वह दोनों फैंकता है तो उसे –5 प्राप्त होता है और वह 5 कदम बाईं ओर +3 से चलेगा और –2 पर पहुँचेगा और अपना बटन '–2' पर रखेगा। इस प्रकार खेल चलता रहेगा। जो खिलाड़ी '–30' पर पहुँच जाएगा वह खेल में से बाहर हो जाएगा। जो खिलाड़ी '+30' पर पहुँचेगा वह जीत जाएगा।

4.7 सम्पूर्ण संख्याओं का जोड़ (क्रिया द्वारा समझना) (Addition of Integers)

इस क्रिया के लिए कैरम बोर्ड की (काली और सफेद) गीटियाँ लो। आओ मान लें प्रत्येक सफेद गीटी पर '+1' लिखा है और काली गीटी पर '–1' लिखा है।

कैरम बोर्ड की गीटियाँ	दर्शाती सम्पूर्ण संख्या
	= 2
	= –2
	= 0
	= (+3) + (+2) = +5
	= (–2) + (–1) = –3
	(+4) + (–2) = (+2) + 0 +0 = +2
	= (+2) + (–5) = 0 + 0 + (–3) = –3

परीक्षण/निरीक्षण

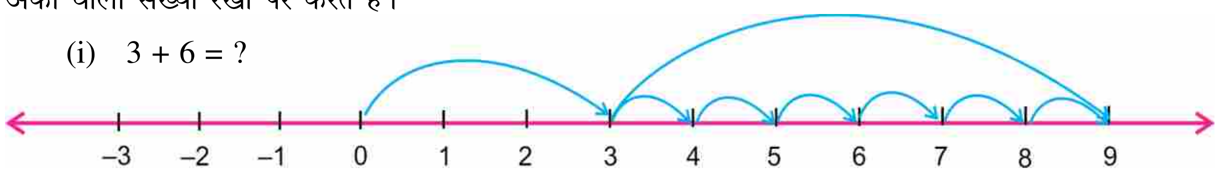
1. हम जोड़ उस समय करते हैं जब दोनों संख्याएँ धनात्मक हो जैसे कि (+3) + (+2) = +5
2. हम उस समय जोड़ करते हैं जब दोनों संख्याएँ ऋणात्मक हो पर उत्तर में ऋणात्मक चिह्न डालते हैं। जैसे कि (−2) + (−1) = −3
3. जब हमारे पास एक ऋणात्मक और एक धनात्मक सम्पूर्ण अंक हो तो घटाओ करते हैं परन्तु उत्तर में चिह्न बड़ी संख्या वाला होगा जैसे कि (+2) + (−5) = −3

4.7.1 संख्या रेखा के प्रयोग से सम्पूर्ण अंकों का जोड़ (सम्पूर्ण संख्याओं के चिह्नों को नज़र अन्दाज करके)

(Addition of Integers using Number line)

हर बार आसान नहीं होता कि कैरम बोर्ड की गीटियों से अंकों को जोड़ किया जाए। आओ इसका प्रदर्शन सम्पूर्ण अंकों वाली संख्या रेखा पर करते हैं।

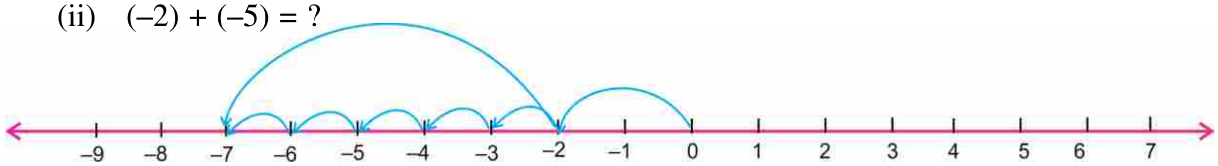
(i) $3 + 6 = ?$



संख्या रेखा पर पहले 0 के दाईं ओर 3 कदम चलते हैं और फिर 3 से आगे 6 कदम चलते हैं। इस प्रकार हम 9 पर पहुँचते हैं और अंतिम उत्तर 9 होता है।

$\Rightarrow \quad 3 + 6 = 9$

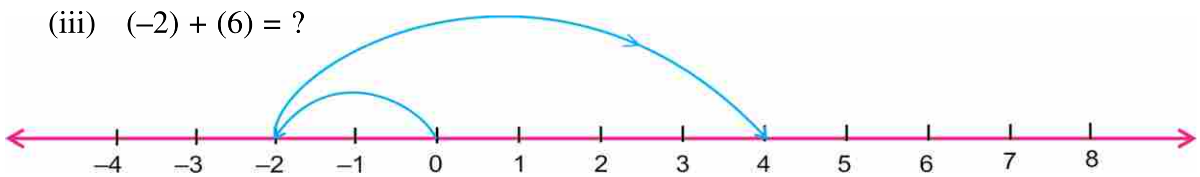
(ii) $(-2) + (-5) = ?$



संख्या रेखा पर हम बाईं ओर की तरफ 2 कदम चलते हैं और फिर आगे 5 कदम बाईं ओर की तरफ चलते हैं। अंत में हम −7 पर पहुँचते हैं। इस प्रकार हमारा अंतिम उत्तर −7 होता है।

$\Rightarrow \quad (-2) + (-5) = -7$

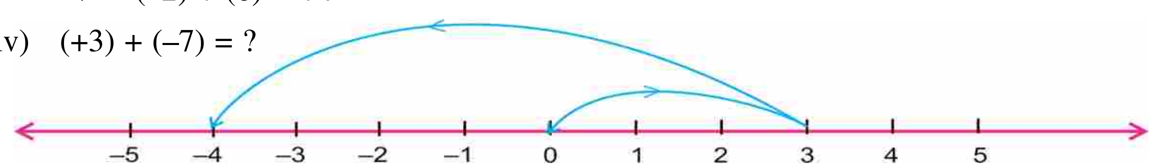
(iii) $(-2) + (6) = ?$



संख्या रेखा पर हम '0' से 2 कदम बाईं ओर जाते हैं, फिर हम 6 कदम दाईं ओर चलते हैं। हम अंत में 4 पर पहुँचते हैं। इस प्रकार 4 प्राप्त होता है।

$\Rightarrow \quad (-2) + (6) = +4$

(iv) $(+3) + (-7) = ?$



संख्या रेखा पर '0' से 3 कदम दाईं ओर जाते हैं और '+3' पर पहुँचते है फिर 7 कदम बाईं ओर जाते हैं और –4 पर पहुँचते हैं। इस प्रकार –4 प्राप्त होता है।

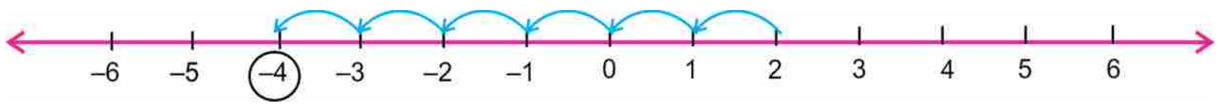
⇒ $(+3) + (-7) = -4$

उदाहरण 10: संख्या रेखा पर प्रयोग करके सम्पूर्ण संख्याएँ पता करो जो

(a) 2 से 6 कम हो **(b) –2 से 3 कम हो**

हल : (a) 2 से 6 कम हो

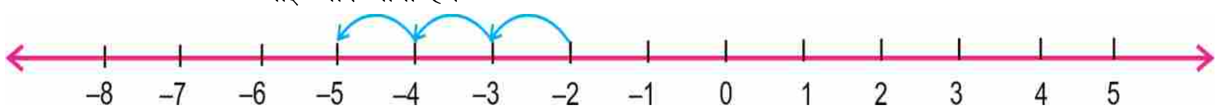
हमें वह संख्या पता करनी है जो 2 से 6 कम हो। इसलिए हम 2 से शुरु करके 6 कदम बाईं ओर जाना है जैसे कि नीचे दर्शाया गया है।



इस प्रकार 2 से 6 कम = –4

(b) –2 से 3 कम

हमें वह संख्या पता करनी है जो –2 से 3 कम हो। इसलिए हमें –2 से शुरु करके 3 कदम बाईं ओर जाना है।



इस प्रकार –2 से 3 कम = –5.

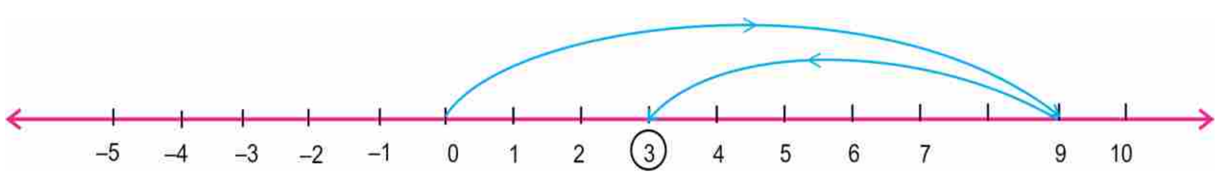
उदाहरण 11: संख्या रेखा का प्रयोग करके सम्पूर्ण संख्याओं का जोड़ पता करो।

(a) $9+(-6)$ **(b) $(-5) + 10$**

(c) $(-2) + 5 + (-3)$

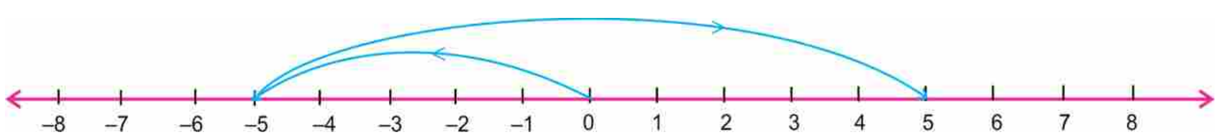
हल : (a) $9 + (-6)$

संख्या रेखा पर '0' से शुरु करके 9 कदम दाईं ओर जाएंगे। फिर 9 से 6 कदम बाईं ओर जाएंगे। हम अंत में +3 पर पहुँचते हैं। इस प्रकार उत्तर '+3' प्राप्त होते है।



⇒ $9 + (-6) = +3$

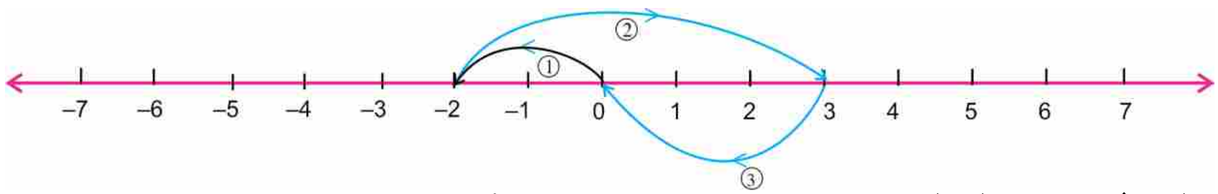
(b) $(-5) + 10 = ?$



संख्या रेखा पर '0' से पाँच कदम बाईं ओर जाते हैं। फिर हम –5 से 10 कदम दाईं ओर जाते हैं और अंत में +5 पर पहुँचते हैं। इस प्रकार '+5' उत्तर प्राप्त होता है।

⇒ $(-5) + 10 = +5$

(c) (–2) + 5 + (–3)



पहला चरण : संख्या रेखा प र '0' से 2 कदम बाईं ओर जाते हैं और –5 पर पहुँचते हैं।

दूसरा चरण : –2 से 5 कदम दाईं ओर जाते हैं और +3 पर पहुँचते हैं।

तीसरा चरण : +3 से 3 कदम बाईं ओर जाते हैं और इस प्रकार अंत में हम '0' पर पहुँचते हैं।

इस प्रकार '0' उत्तर है। इसलिए (–2) + 5 + (–3) = 0

उदाहरण 12: **संख्या रेखा का प्रयोग किए बिना जोड़ पता करो।**

(a) 19 + (–13) **(b) 19 + 13**

(c) (–19) + (–13) **(d) (–19) + 13**

(e) 21 + (–13) + 8 + 7 + (–19) + (–11) + 2

हल : (a) 19 + (–13)

= + (19 –13)

= +6

जब हमारे पास एक धनात्मक और एक ऋणात्मक संपूर्ण संख्या हो फिर हम उनको घटाते हैं। परन्तु उत्तर में चिह्न बड़ी संख्या का आता है। (सम्पूर्ण संख्याओं के चिह्न को छोड़कर निश्चित करो कि कौन-सी संख्या बड़ी हैं।

(b) 19 + 13

= 32

जब दोनों संख्याएँ धनात्मक हो तो हम जोड़ करते हैं।

(c) (–19) + (–13)

= – (19+13)

= –32

यदि हमारे पास दो ऋणात्मक संख्याएँ हो तो हम जोड़ करते हैं परन्तु उत्तर में '–' चिह्न लगाते हैं।

(d) (–19) + 13

= – (19 – 13)

= –6

जब हमारे पास एक धनात्मक और एक ऋणात्मक संख्या हो। फिर हम उनको घटाते हैं परन्तु उत्तर में चिह्न बड़ी संख्या वाला आता है। (सम्पूर्ण संख्याओं के चिह्न को छोड़कर हम बड़ी संख्या देखते हैं।

(e) 21 + (–13) + 8 + 7 + (–19) + (–11) + 2

हम धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं के अलग अलग समूह बनाते हैं।

हमारे पास हैं:

21 + 8 + 7 + 2 + (–13) + (–19) + (–11)

= 38 + (–43)

= 38 – 43

= – (43 – 38)

= –5

	+	–
	21	13
	8	19
	7	11
	2	
जोड़ो	+38	–43

उदाहरण 13: **नीचे दिए की परवर्ती और पूर्ववर्ती संख्या लिखो:**

(a) –69

(b) 59

हल : (a) –69 की परवर्ती संख्या = –69 + 1 = –68

–69 की परवर्ती संख्या = –69 – 1 = –70

(b) 59 की परवर्ती संख्या = 59 + 1 = 60

59 की परवर्ती संख्या = 59 – 1 = 58

प्रश्नावली 4.2

1. संख्या रेखा का प्रयोग करके सम्पूर्ण संख्या लिखो जो

(a) −1 से 5 कम हो (b) −5 से 5 अधिक हो

(c) 5 से 2 कम हो (d) −2 से 3 कम हो

2. संख्या रेखा का प्रयोग करके सम्पूर्ण संख्याओ का जोड़ पता करो।

(a) 9 + (–3) (b) 5 + (–11)

(b) (–1) + (–4) (d) (–5) + 12

(e) (–1) + (–2) + (–4) (f) (–2) + 4 + (–5)

(g) (–3) + (5) + (–4)

3. संख्या रेखा का प्रयोग किए बिना जोड़ पता करो:

(a) 18 + 13 (b) 18 + (–13)

(c) (–18) + 13 (d) (–18) + (–13)

(e) 180 + (–200) (f) 777 + (–67)

(g) 1262 + (–366) + (–962) (h) 30 + (–27) + 21 + (–19) + (–3) + (11) + (–9)

(i) (–7) + (–9) + 4 + 16 (j) 37 + (–2) + (–65) + (–8)

4. निम्नलिखित के परवर्ती और पूर्ववर्ती पता करो।

(a) –15 (b) 27 (c) –79 (d) 0

(e) 29 (f) –18 (g) –21 (h) 99

(i) –1 (j) –13

5. निम्नलिखित जोड़ सारणी पूरी करो।

+	–3	–4	–2	+1	+2	+3
–2						
–3						
0						
+1						
+2						

4.8 योज्य प्रतिलोम (Additive Inverse)

यदि दो सम्पूर्ण संख्याओ का जोड़ '0' है तो उन्हें एक दूसरे का योज्य प्रतिलोम कहा जाता है।

उदाहरण के लिए $(-3) + (3) = 0$

यहाँ (-3) का योज्य प्रतिलोम 3 है।

और (3) का योज्य प्रतिलोम -3 है।

4.9 सम्पूर्ण संख्याओं का व्यवकलन (घटाव) (Subtraction of Integers)

व्यवकलन एक ऐसी क्रिया है जो योग के उल्ट होती है। व्यवकलन में हम निम्नलिखित नियमों का प्रयोग करते हैं–

यदि a और b दो सम्पूर्ण संख्याएँ है तो संख्या a में से b को घटाने के लिए हम a में संख्या b का चिह्न बदलकर जोड़ते हैं।

उदाहरण के लिए $a - b = a + (-b)$

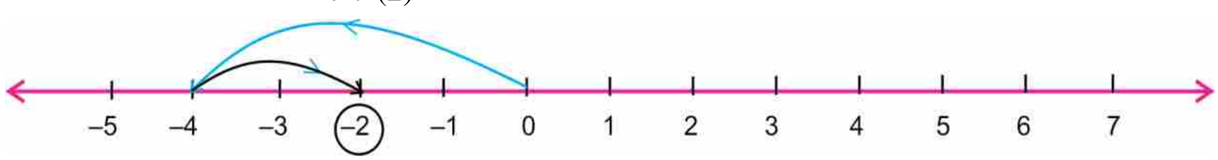
उदाहरण 14: **संख्या रेखा का प्रयोग करके मान पता करो।**

(a) $-4 - (-2)$ **(b) $7 - (-2)$**

हल : (a) $-4 - (-2)$

$= -4 +$ (-2 का योज्य प्रतिलोम)

$= -4 + (2)$

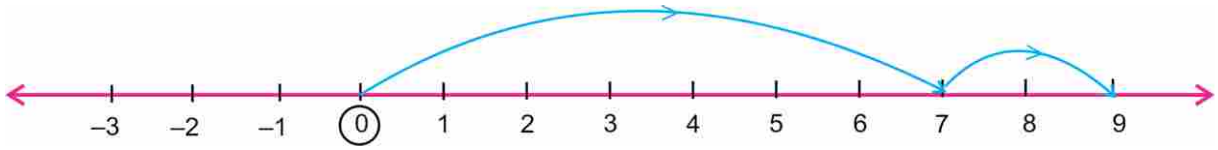


इस प्रकार $-4 + (-2) = -2$

(b) $7 - (-2)$

$= 7 +$ (-2 का योज्य प्रतिलोम)

$= 7 + (2)$



इस प्रकार

तब (फिर) 7 – (–2) = 9

उदाहरण 15: **निम्नलिखित का व्यवकलन करो:-**

(a) 42 में से 27 **(b) 91 में से –13**

(c) –84 में से 16 **(d) –41 में से –61**

हल : (a) 42 – (+27) = 42 + (–27)
= 42 – 27
= 15

(b) 91 – (–13) = 91 +(13)
= 91 + 13
= 104

(c) –84 – (16) = –84 + (–16)
= –84 – 16
= –100

(d) –41 – (–61) = –41 + (61)
= –41 + 61
= +20

उदाहरण 16: **हल करो:-**

(a) (–13) + 32 –8 –1 **(b) 19 – (–45) – (–3)**

हल : (a) (–13) + 32 – 8 – 1
= – 13 + 32 – 8 – 1
= 32 – 13 – 8 – 1
= 32 – 22
= 10

(b) 19 – (–45) – (–3)
= 19 + (45) + (3)
= 19 + 45 + 3
= 67

प्रश्नावली 4.3

1. दिए खाने (डिब्बे) में उचित सम्पूर्ण संख्या भरो-

(a) 2 + ☐ = 0 (b) ☐ + 11 = 0

(c) –5 + ☐ = 0 (d) ☐ + (–9) = 0

(e) 3 + ☐ = 0 (f) ☐ + 0 = 0

2. संख्या रेखा का प्रयोग करके घटाओ-

(a) −7 में से 5 (b) −6 में से −3

(c) 8 में से −2 (d) 9 में से 3

3. संख्या रेखा का प्रयोग किए बिना घटाओ-

(a) 16 में से −6 (b) 55 में से −51

(c) −10 में से 75 (d) −47 में से −31

4. पता करो-

(a) 35 – (20) (b) (–20) – (13)

(c) (–15) – (–18) (d) 72 – (90)

(e) 23 – (–12) (f) (–32) – (–40)

5. सरल करो-

(a) 2 – 4 + 6 – 8 – 10 (b) 4 – 2 + 2 – 4 – 2 + 2

(c) 4 – (–9) + 7 – (–3) (d) (–7) + (–19) + (–7)

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. –3 और 3 के बीच कितनी सम्पूर्ण संख्याएँ है?

(a) 5 (b) 6 (c) 4 (d) 3

2. निम्नलिखित में कौन-सी सम्पूर्ण संख्या –3 से बड़ी है?

(a) –5 (b) –4 (c) 0 (d) –10

3. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ आरोही क्रम में हैं?

(a) –5, –9, –7, –8 (b) –9, –8, –7, –5

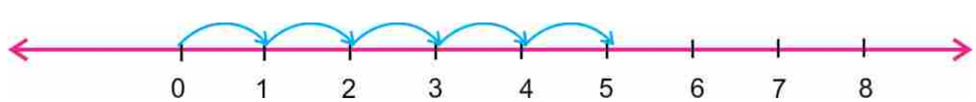
(c) –5, –7, –8, –8, –9 (d) –8, –5, –9, –7

4. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ अवरोही क्रम में हैं?

(a) 3, 0 , –2, –5 (b) –5, –2, 0, 3

(c) –5, 3, –2, 0 (d) –2, 0, –5, 3

5. दी गई संख्या रेखा क्या दर्शाती है?



(a) 5+1 (b) 1+5 (c) 1+1+1+1+1 (d) 5+5+5+5+5

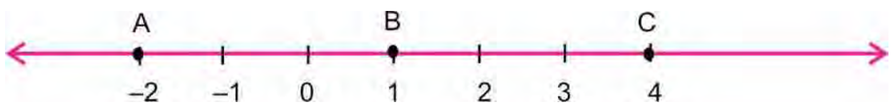
6. −2 से 3 कम

(a) –5 (b) –6 (c) 5 (d) 6

7. (–2) + 8 =

(a) –6 (b) –10 (c) 10 (d) 6

8. दी संख्या रेखा संबंधी निम्नलिखित में से कौन-सा सही है?



(a) A का मान B से अधिक है (b) A का मान C से अधिक है।

(c) B का मान C के मान से कम है। (d) C का मान B के मान से कम है।

9. (–7) + (–12) + 11 =

(a) –19 (b) 30 (c) –23 (d) –8

10. 15 – (–12) + (–27) =

(a) 0 (b) –54 (c) –24 (d) 54

सीखने के परिणाम

इस अध्याय के पूरा होने के बाद विद्यार्थी :

- प्राकृतिक संख्याओं से लेकर सम्पूर्ण संख्याओं के अंकों संबंधी जानकारी के योग्य हैं।
- सम्पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाना और उनका प्रयोग करने के योग्य हैं।
- दिए समूह में से बड़ी और छोटी सम्पूर्ण संख्याओं को पहचानने के योग्य हैं।
- सम्पूर्ण संख्याओं के जोड़ और व्यवकलन संबंधी समस्याओं को हल करने के योग्य हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 4.1

2. (a) 500 रुपये की हानि (b) बैंक खाते में से 70 रुपये जमा कराना

(c) 1000 की निकलवाई राशि (d) 326 AD

(e) समुद्र तल से 500 मीटर ऊपर (f) 0° से 25° कम

(g) बैंक खाते में 70 रुपये जमा करना।

3. (a) +500 (b) –70 (c) +1000

(d) –326 (e) –500m (f) +25

4. (a) +500 (b) +2000 (c) –700

(d) –6

6. (a) B (b) +3 (c) C = –7, E = +4

(d) C

7. (a) 9 (b) –3 (c) 0
(d) 10 (e) 9 (f) 2

8. (a) –5, –4, –3, –2, –1
(b) –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5
(c) –16, –15, –14, –13, –12, –11, –10
(d) –18, –17, –16, –15, –14, –13, –12, –11, –10, –9, –8, –7,–6

10. (a) –5 (b) 0 (c) 7
(d) 0 (e) –9 (f) 4
(g) –10 (h) 100

11. (a) –9, –7, –4, –3, 0, 2,5 (b) –9, –6, –3, 0, 7, 8

12. (a) 8, 4, 3, –3, –6, –9 (b) 8, 5, 4, 0, –2,–3

प्रश्नावली 4.2

3. (a) 31 (b) 5 (c) –5 (d) –31 (e) –20 (f) 710
(g) –66 (h) 4 (i) 4 (j) –38

4. (a) –14 और –16 (b) 28 और 26 (c) –78 और –80
(d) 1 और –1 (e) 30 और 28 (f) –17 और –19
(g) –20 और –22 (h) 100 और 98 (i) 0 और –2
(j) –12 और –14

5.

+	–3	–4	–2	+1	+2	+3
–2	–5	–6	–4	–1	0	+1
–3	–6	–7	–5	–2	–1	0
0	–3	–4	–2	+1	+2	+3
+1	–2	–3	–1	+2	+3	+4
+2	–1	–2	0	+3	+4	+5

प्रश्नावली 4.3

1. (a) –2 (b) –11 (c) 5 (d) 9 (e) –3 (f) 0
2. (a) –12 (b) –3 (c) 10 (d) 6
3. (a) 22 (b) 106 (c) –85 (d) –16
4. (a) 15 (b) –33 (c) 3 (d) –18 (e) 35 (f) 8
5. (a) –14 (b) 0 (c) 23 (d) –33

बहुवैकल्पिक प्रश्न

(1) a **(2)** c **(3)** b **(4)** a **(5)** c
(6) a **(7)** d **(8)** c **(9)** d **(10)** a

भिन्न

(FRACTIONS)

5

इस अध्याय में आप सीखेंगे

(i) अलग-अलग तरह की भिन्नों के बारे में।

(ii) दैनिक जीवन में भिन्नों का प्रयोग के बारे में।

(iii) अलग-अलग इकाइयों में भिन्न का प्रयोग जैसे कि पैसे, लंबाई और तापमान के बारे में।

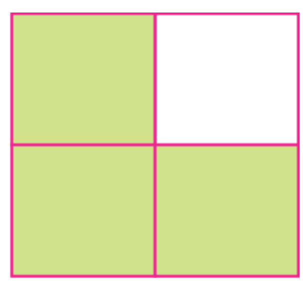
5.1 भूमिका (Introduction)

पिछली कक्षा में, हमनें पढ़ा है कि यदि किसी वस्तु को बराबर भागों में बाँटा जाता है तो उस वस्तु का एक या अधिक हिस्सा भिन्न कहलाता है। हमारे दैनिक जीवन में, हम भिन्नों से संबंधित बहुत सी क्रियाएँ करते हैं-जैसे कि एक माँ अपने बच्चों के लिए नाश्ता बना रही हैं। पहला बच्चा आधी रोटी की माँग करता है और दूसरा बच्चा एक तिहाई रोटी की माँग करता है। उनकी आधी रोटी और एक तिहाई रोटी की माँग पूरी रोटी की भिन्न को दर्शाती है। भिन्न का अर्थ है-पूर्ण या समूह का एक हिस्सा।

$$\text{भिन्न} = \frac{\text{एक वस्तु के भाग}}{\text{वस्तु के कुल भाग}}$$

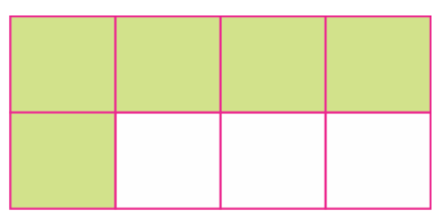
भिन्न का ऊपर वाला भाग अंश और नीचे वाला भाग हर कहलाता है।

नीचे दी गई आकृतियों को देखें:



(i) एक वर्ग को चार बराबर भागों में बांटा गया। 4 भागों में से 3 भागों को छायांकित किया गया। भाव यह है कि तीन चौथाई भागों को रेखांकित किया गया। गाणितक भाषा में हम कह सकते हैं कि $\frac{3}{4}$ भाग रेखांकित किया गया।

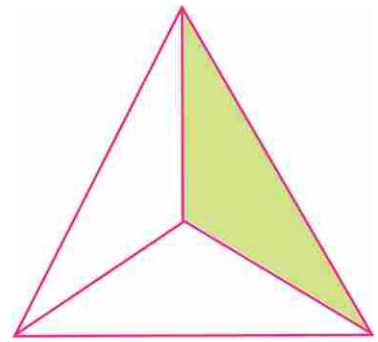
$$\frac{3}{4} = \frac{\text{रेखांकित भाग}}{\text{कुल भाग}} = \frac{\text{अंश}}{\text{हर}}$$



(ii) एक आयत को आठ बराबर भागों में बांटा गया। 8 में से 5 भाग छायांकित किए गए। भाव है कि आयताकार शीट का $\frac{5}{8}$ भाग छाया अंकित है और बाकी $\frac{3}{8}$ भाग छाया अंकित नहीं है।

$\frac{5}{8} = \frac{\text{छायांकित भाग}}{\text{कुल भाग}} = \frac{\text{अंश}}{\text{हर}}$

और $\frac{3}{8} = \frac{\text{बिना छाया किया भाग}}{\text{कुल भाग}} = \frac{\text{अंश}}{\text{हर}}$



(iii) एक त्रिभुज को तीन बराबर भागों में बांटा गया। 3 भागों में से 1 भाग छायांकित है अथवा $\frac{1}{3}$ भाग छायांकित है।

$\frac{1}{3} = \frac{\text{छायांकित भाग}}{\text{कुल भाग}} = \frac{\text{अंश}}{\text{हर}}$

ऊपर की गई चर्चा के बाद हम भिन्न की परिभाषा की ओर जाते हैं। एक भिन्न भाग और पूर्ण का अनुपात है।

> एक भिन्न $\frac{a}{b}$, के रूप में है, जहाँ a और b पूर्ण संख्याएँ हैं और $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$, में a को अंश कहा जाता है और b को हर कहा जाता है।

एक भिन्न $\frac{3}{5}$ लो। इसे तीन-पाँचवां पढ़ा जाता है। इसका मतलब है 5 बराबर भागों में से 3 भाग।

भिन्न $\frac{3}{5}$ में, 3 को अंश कहते हैं और 5 को हर कहते हैं।

नीचे कुछ और भिन्नें दी गई है:-

भिन्न	भिन्न का अर्थ	अंश	हर
$\frac{2}{7}$ या दो सातवां	7 बराबर भागों में से 2 बराबर भाग	2	7
$\frac{3}{4}$ या तीन-चौथा	4 बराबर भागों में से 3 बराबर भाग	3	4
$\frac{5}{11}$ या पाँच-ग्यारहवाँ	11 बराबर भागों में से 5 बराबर भाग	5	11

उदाहरण 1. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए भिन्न लिखें?

(i) आधा (ii) दो-पाँचवां (iii) पाँच-सातवां

हल : (i) आधा = दो में से एक = $\frac{1}{2}$

(ii) दो–पाँचवां = पाँच में से दो = $\frac{2}{5}$

(iii) पाँच–सातवां = सात में से पाँच = $\frac{5}{7}$

उदाहरण 2. **निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए अंश और हर लिखें?**

(i) $\frac{7}{10}$ (ii) $\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{9}{13}$

हल : (i) दी गई भिन्न है $\frac{7}{10} = \frac{\text{अंश}}{\text{हर}}$

∴ अंश = 7 और हर = 10

(ii) दी गई भिन्न है $\frac{3}{5} = \frac{\text{अंश}}{\text{हर}}$

∴ अंश = 3 और हर = 5

(iii) दी गई भिन्न है $\frac{9}{13} = \frac{\text{अंश}}{\text{हर}}$

∴ अंश = 9 और हर = 13

उदाहरण 3. **(i) 4 महीने एक साल की कौन सी भिन्न है?**

(ii) 10 घंटे एक दिन की कौन सी भिन्न है?

(iii) 2 दिन एक हफ्ते की कौन सी भिन्न है?

हल : (i) हम जानते हैं कि 1 साल = 12 महीने

∴ अपेक्षित भिन्न = $\frac{4}{12}$

(ii) हम जानते हैं कि 1 दिन = 24 घंटे

∴अपेक्षित भिन्न = $\frac{10}{24}$

(iii) हम जानते हैं कि 1 हफ्ता = 7 दिन

∴ अपेक्षित भिन्न = $\frac{2}{7}$

उदाहरण 4. **1 से 15 तक प्राकृतिक संख्याएँ लिखें। इनमें से अभाज्य संख्याओं की भिन्न पता करें?**

हल : 1 से 15 तक प्राकृतिक संख्याएँ हैं।

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 भाव 15 संख्याएँ

इनमें से अभाज्य संख्याएँ हैं–

2, 3, 5, 7, 11, 13, भाव 6 संख्याएँ

$\therefore$ अपेक्षित भिन्न = $\frac{6}{15}$

उदाहरण 5. **एक थैले में 8 गेंदें हैं जिनमें से 3 नीली और 5 सफेद हैं। नीली और सफेद गेंदें, कुल गेंदों की कौन सी भिन्न है?**

हल : यहाँ 8 गेंदों में से 3 नीली गेंदें हैं।

नीली गेदों के लिए भिन्न = $\frac{3}{8}$

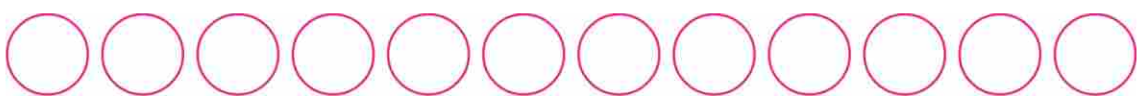
अब 8 गेंदों में से 5 सफेद गेंदे हैं।

सफेद गेंदों के लिए भिन्न = $\frac{5}{8}$

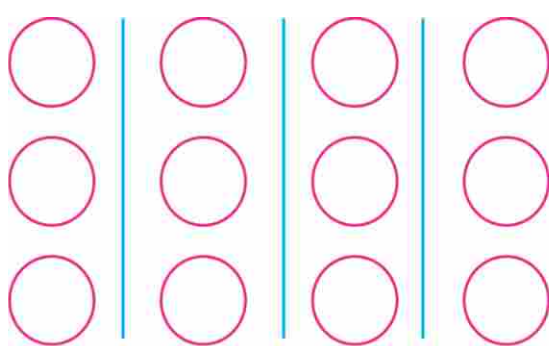
5.2 भिन्न और विभाजन (भिन्न संग्रह का एक हिस्सा) Fraction and Division (Fraction as a part of collection)

एक भिन्न, एक संग्रह के भागों को दर्शाती है। संग्रह में अंश उन भागों की संख्या है जो हमारे पास है और हर कुल भागों की संख्या है।

उदाहरण के तौर पर, आओ 12 गेंदों का एक संग्रह लेते हैं और हम संग्रह का $\frac{1}{4}$ लेना चाहते हैं।



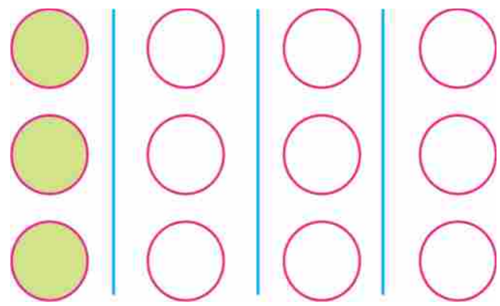
चरण 1. 12 गेंदों में से $\frac{1}{4}$ प्राप्त करने के लिए, हम 12 गेंदों को 4 बराबर समूहों में बाँट लेते हैं।



प्रत्येक समूह में 3 गेंदे हैं।

चरण 2. अब हम समूह को छायांकित करते हैं।

गिनती करने पर, हम देखते हैं कि छायांकित गेंदों की गिनती 3 है।

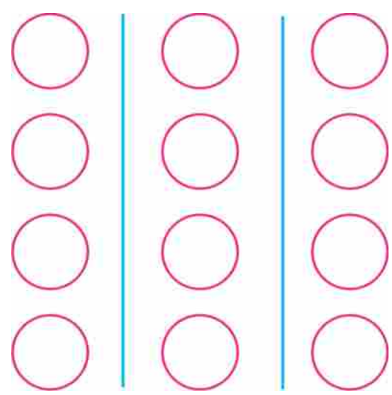


दूसरे शब्दों में 12 गेंदों का , $\frac{1}{4} = 3$ गेंदें

$\therefore \frac{1}{4} \times 12 = \frac{1 \times 12}{4} = \frac{12}{4} = 12 \div 4 = 3$ गेंदें

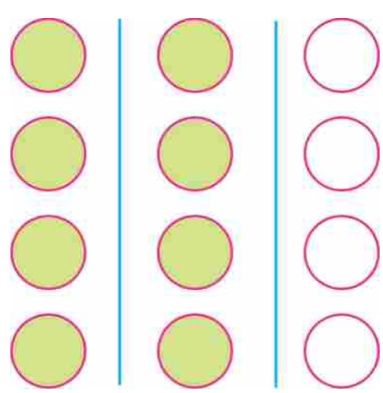
उदाहरण के लिए, 12 गेदों का $\frac{2}{3}$ पता करें।

चरण 1. 12 गेंदों का $\frac{2}{3}$ पता करने के लिए, हम 12 गेंदों को 3 बराबर समूहों में बाँटते हैं।



प्रत्येक समूह में 4 गेंदें हैं।

चरण 2. अब हम 3 समूहों में से 2 समूहों को छायांकित करते हैं।



गिनती करने पर, हम देखते है कि कुल छायांकित समूहों की संख्या 8 है।

दूसरे शब्दों में, 12 गेंदों का $\frac{2}{3}$ = 8 गेंदें

$\frac{2}{3} \times 12 = \frac{2 \times 12}{3} = \frac{24}{3} = 24 \div 3 = 8$ गेंदें

उदाहरण 6. **(i) 16 का $\frac{1}{4}$ क्या है? (ii) 20 का $\frac{2}{5}$ क्या है?**

(iii) 24 का $\frac{3}{4}$ क्या है?

हल : (i) 16 का $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 16 = \frac{1 \times 16}{4} = \frac{16}{4} = 16 \div 4 = 4$

(ii) 20 का $\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times 20 = \frac{2 \times 20}{5} = \frac{40}{5} = 40 \div 5 = 8$

(iii) 24 का $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 24 = \frac{3 \times 24}{4} = \frac{72}{4} = 72 \div 4 = 18$

उदाहरण 7: **(i) जयंत के पास 24 संतरे हैं। उसने इनमें से $\frac{1}{6}$ खा लिए।**

(ii) उसने कितने संतरे खा लिए?

(iii) उसके पास कितने संतरे बच गए?

हल : कुल संतरे = 24

(i) उसने जितने संतरे खा लिए = $\frac{1}{6}$ का $24 = \frac{1}{6} \times 24 = \frac{1 \times 24}{6} = \frac{24}{6} = 24 \div 6 = 4$ संतरे

(ii) जितने संतरे बच गए = 24 – 4 = 20 संतरे

उदाहरण 8: **जैसमीन के पास 20 बिस्कुटों का 1 पैकेट है। उसने इनमें से $\frac{1}{4}$ हरनीत को दिए और $\frac{3}{5}$ सोफिया को दिए। बाकी उसने खा लिए।**

(i) हरनीत के पास कितने बिस्कुट हैं?

(ii) सोफिया के पास कितने बिस्कुट हैं?

(iii) जैसमीन ने कितने बिस्कुट रखे?

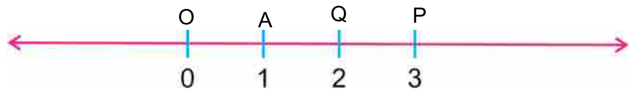
हल : (i) हरनीत के पास बिस्कुट = 20 का $\frac{1}{4} = 20 \times \frac{1}{4} = \frac{20 \times 1}{4} = \frac{20}{4} = 20 \div 4 = 5$ बिस्कुट

(ii) सोफिया के पास बिस्कुट = 20 का $\frac{3}{5} = 20 \times \frac{3}{5} = \frac{20 \times 3}{5} = \frac{60}{5} = 60 \div 5 = 12$ बिस्कुट

(iii) जैसमीन ने बिस्कुट रखे = 20 – 5 – 12 = 3 बिस्कुट

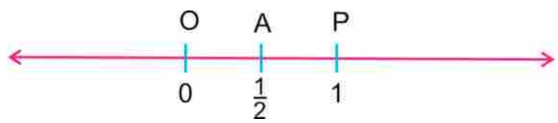
5.3 संख्या रेखा पर भिन्न (Fractions on Number Line)

पिछले अध्याय में हमने पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करना सीखा। पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करने के लिए, हम एक सीधी रेखा खींचते हैं और उसके ऊपर बिंदु 0 अंकित करते हैं। अब 0 से शुरू करते हुए, 0 के दाएँ तरफ बराबर दूरी पर रेखा के ऊपर बिंदु A,Q,P आदि निरूपित करते हैं। ये बिंदु 1, 2, 3 आदि को क्रमवार दर्शाते हैं और O,0 को दर्शाता है।

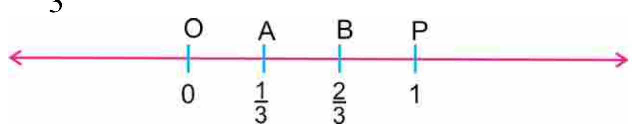


हम संख्या रेखा पर भिन्नों को दर्शा सकते हैं।

- $\frac{1}{2}$ **को संख्या रेखा पर दर्शाने के लिए:-** संख्या रेखा खींचें। 1 को दर्शाने के लिए बिंदु P लगाएँ। अब O और P के बीच की दूरी को 2 बराबर हिस्सों में बाँटें। मान लो A विभाजन बिंदु हैं तो A, $\frac{1}{2}$ को दर्शाता है।



- $\frac{1}{3}$ **को संख्या रेखा पर दर्शाने के लिए:-** संख्या रेखा खींचें। 1 को दर्शाने के लिए बिंदु P लगाएँ। अब O और P के बीच की दूरी को 3 बराबर हिस्सों में बाँटें। मान लो A और B विभाजन बिंदु हैं। A $\frac{1}{3}$ को और B $\frac{2}{3}$ को दर्शाता है।



* इसी तर्क का प्रयोग करते हुए, बिंदु O , $\frac{0}{3}$ को दर्शाता है और बिंदु P, $\frac{3}{3}$ को दर्शाता है।

इस तरह हमारे पास $\frac{0}{3} = 0$ और $\frac{3}{3} = 1$

0 और 1 के बीच में अनगिनत भिन्नें हैं।

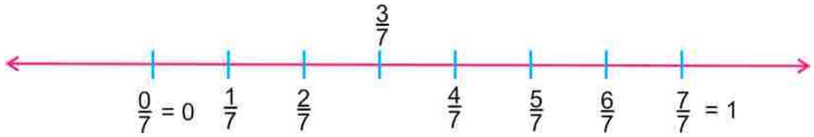
उदाहरण 9: (i) $\frac{4}{5}$ **को संख्या रेखा पर दर्शाएँ।** (ii) $\frac{3}{7}$ **को संख्या रेखा पर दर्शाएँ।**

हल : (i) संख्या रेखा पर $\frac{4}{5}$ को दर्शाने के लिए, हम 0 और 1 के बीच की दूरी को 5 बराबर भागों में बाँटते हैं, जो कि अब हम $\frac{0}{5}=0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ और $\frac{5}{5}=1$ (दिखाया गया)

अब हम 0 से दाएँ तरफ चौथे बिंदु पर निशान लगाते हैं।

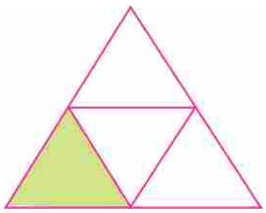
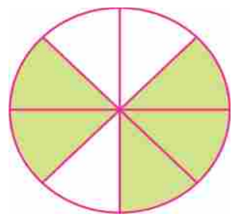
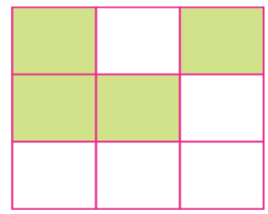
(ii) संख्या रेखा पर $\frac{3}{7}$ को दर्शाने के लिए, हम 0 और 1 के बीच की दूरी को 7 बराबर भागों में बाँटते हैं, जो कि हैं $\frac{0}{7}=0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7}$ (दिखाया गया)

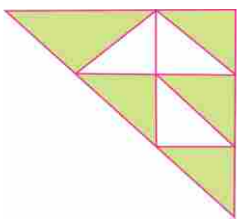
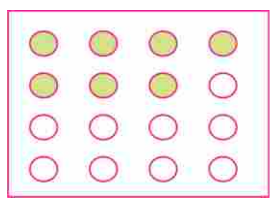
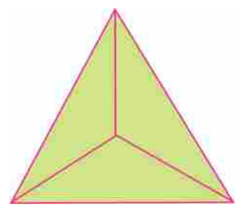
अब हम 0 से दाएँ तरफ तीसरे बिंदु पर निशान लगाते है।

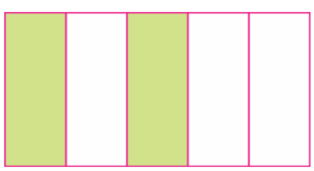


प्रश्नावली 5.1

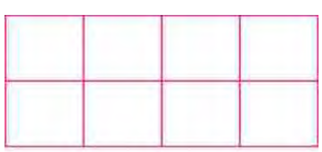
1. छायांकित भाग को दर्शाने के लिए भिन्न लिखें:-

(i)  *(ii)*  *(iii)* 

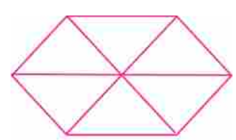
(iv)  *(v)*  *(vi)* 

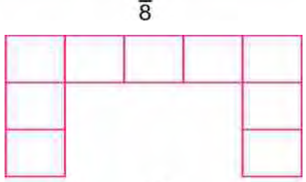
(vii)  *(viii)*

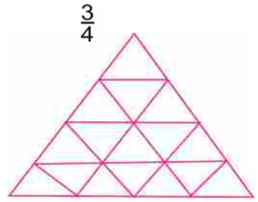
2. दी गई भिन्न के अनुसार रंग भरें:-

(i) 
$\frac{5}{8}$

(ii)
$\frac{3}{4}$

(iii) 
$\frac{2}{6}$

(iv) 
$\frac{7}{9}$

(v) 
$\frac{11}{16}$

3. निम्न में प्रत्येक के लिए भिन्न लिखें:–

(i) तीन–चौथाई (ii) सात–दसवां (iii) एक चौथाई

(iv) पाँच–आठवां (v) तीन–बारहवां

4. निम्नलिखित के लिए भिन्न लिखें:–

(i) अंश = 5
हर = 9

(ii) अंश = 2
हर = 11

(iii) अंश = 6
हर = 7

5. निम्नलिखित के लिए अंश और हर लिखें:–

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{5}{11}$ (iv) $\frac{9}{13}$ (v) $\frac{17}{16}$

6. दर्शाएँ:–

(i) 1 दिन को 1 हफ्ते की भिन्न में

(ii) 40 सैकंड को 1 मिनट की भिन्न में

(iii) 15 घंटों को 1 दिन की भिन्न में

(iv) 2 महीनों को 1 साल की भिन्न में

(v) 45 सेंटीमीटर को 1 मीटर की भिन्न में

7. 1 से 25 तक संख्याएँ लिखें:–

(i) सम संख्याएँ उनकी कौन सी भिन्न हैं?

(ii) विषम संख्याएँ उनकी कौन सी भिन्न हैं?

(iii) 3 के गुणांक उनकी कौन सी भिन्न हैं?

8. छठी कक्षा में, 24 लड़के और 18 लड़कियाँ हैं। लड़के और लड़कियों को कुल विद्यार्थियों की कौन सी भिन्न दर्शाती है?

9. एक थैले में 6 लाल गेंदे और 7 नीली गेंदें हैं। लाल और नीली गेंदें, कुल गेंदों की कौन सी भिन्न हैं?

10. सिद्धार्थ के पास एक केक है। वह उस केक को 10 बराबर भागों में बाँटता है। उसने 2 भाग नमन को, 3 भाग निधि को, 1 भाग सीमा को दे दिया और बाकी 4 भाग उसने अपने लिए रख लिए पता करो।

(i) उसने नमन को केक की कितनी भिन्न दी?

(ii) उसने निधि को केक की कितनी भिन्न दी?

(iii) उसने अपने लिए केक की कितनी भिन्न रखी?

(iv) किसके पास सबसे ज़्यादा केक है?

11. एक बक्से में 12 सेब, 7 संतरे और 5 अमरूद हैं। बक्से में पड़ा प्रत्येक फल कौन सी भिन्न को दर्शाता है?

12. इशमीत के पास 20 पेन हैं। वह बलकीरत को एक चौथाई पेन दे देती है। इशमीत और बलकीरत के पास कितने पेन हैं?

13. निम्न दी गई भिन्न को संख्या रेखा पर दर्शाएँ।

(i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{1}{10}$ (iv) $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$

14. पता करो:-

(i) 20 किताबों का $\frac{3}{5}$ (ii) 32 पैनों का $\frac{5}{8}$ (iii) 36 कॉपियों का $\frac{1}{6}$

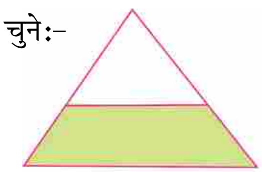
(iv) 21 सेबों का $\frac{4}{7}$ (v) 28 पेंसिलों का $\frac{3}{4}$

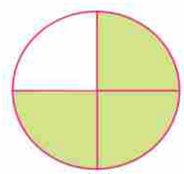
15. हरनेक के पास 36 रबड़ों का एक बकसा है। उसने उनमें से $\frac{1}{2}$ रानी को, $\frac{2}{9}$ युवराज को दे दी और बाकी रख ली।

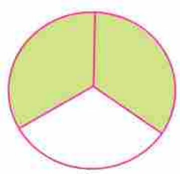
(i) रानी को कितनी रबड़ें मिलीं? (ii) युवराज को कितनी रबड़ें मिलीं?

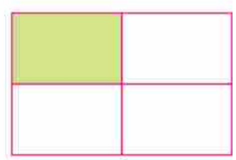
(iii) हरनेक को कितनी रबड़ें मिलीं?

16. सही/गलत चुने:-

(i)

$\frac{1}{2}$

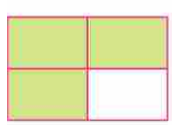
(ii)

$\frac{3}{4}$

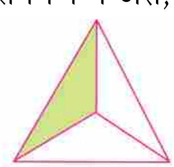
(iii)

$\frac{2}{3}$

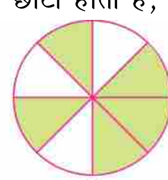
(iv)

$\frac{1}{4}$

5.6 भिन्नों की किस्में (Types of Fractions)

उचित भिन्न (Proper Fraction):- जिस भिन्न में अंश, हर से छोटा होता है, उचित भिन्न कहलाती है।

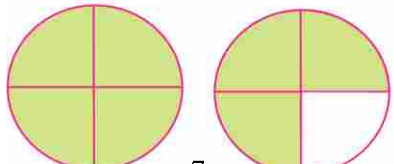

$\frac{3}{4}$

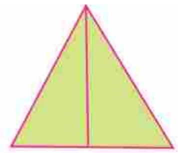

$\frac{1}{3}$

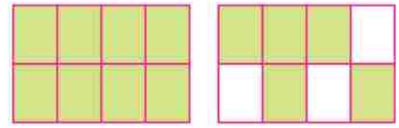

$\frac{5}{8}$

ये सभी उचित भिन्न हैं

विषम भिन्न (Improper Fraction):- जिस भिन्न में अंश, हर के बराबर या हर से बड़ा होता है, विषम भिन्न कहलाती है।


$\frac{7}{4}$

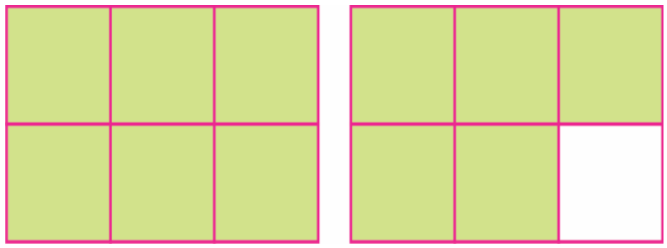

$\frac{2}{2}$


$\frac{13}{8}$

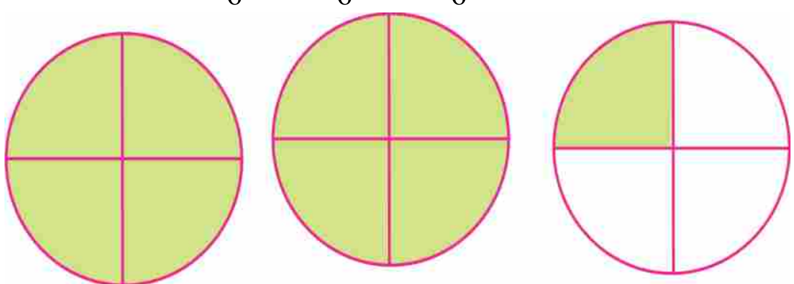
* **विषम भिन्नों को मिश्रित भिन्नों में बदला जाता है।**

मिश्रित भिन्न (Mixed Fraction) :- एक भिन्न जो कि पूर्ण संख्या और उचित भिन्न का मेल होती है, मिश्रित भिन्न कहलाती है।

नीचे मिश्रित भिन्नें हैं:-



यह है $\frac{11}{6} = 1 + \frac{5}{6}$ जिसे $1\frac{5}{6}$ लिखा जाता है।



यह है $\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$ और इसे $2\frac{1}{4}$ लिखा जाता है।

5.4.1 विषम भिन्नों को मिश्रित भिन्नों में बदलना (Conversion of Improper fractions into Mixed fractions)

चरण 1. विषम भिन्न प्राप्त करें।

चरण 2. अंश को हर से भाग करें। फिर भागफल और शेषफल प्राप्त करें।

चरण 3. मिश्रित भिन्न को इस तरह से लिखें-

$$\text{भागफल} \frac{\text{शेषफल}}{\text{हर}} \quad \text{अथवा} \quad \text{भागफल} \frac{\text{शेषफल}}{\text{भाजक}}$$

5.4.2 मिश्रित भिन्नों को विषम भिन्नों में बदलना (Conversion of Mixed fractions into Improper fractions)

चरण 1. मिश्रित भिन्न प्राप्त करें जो कि

$\text{भागफल} \frac{\text{शेषफल}}{\text{भाजक}}$ के रूप में हो।

चरण 2. भिन्न लिखें जिसका अंश (भागफल × हर + शेषफल) के बराबर हो और हर, कदम 1 में दिया गया हर ही है।

इस तरह से, विषम भिन्न = $\frac{\text{भागफल} \times \text{हर} + \text{शेषफल}}{\text{हर}}$

उदाहरण 10. **निम्नलिखित में से उचित और विषम भिन्नों को छाँटें?**

$$\frac{2}{5}, \frac{7}{8}, \frac{11}{5}, \frac{6}{11}, \frac{9}{4}, \frac{5}{13}, \frac{6}{6}$$

हल : उचित भिन्नें : $\frac{2}{5}, \frac{7}{8}, \frac{6}{11}, \frac{5}{13}$

विषम भिन्नें : $\frac{11}{5}, \frac{9}{4}, \frac{6}{6}$

उदाहरण 11. **निम्न प्रत्येक को मिश्रित भिन्न में बदलें:-**

(i) $\frac{16}{5}$ (ii) $\frac{19}{4}$ (iii) $\frac{28}{3}$

हल : (i) $\frac{16}{5}$

भाजक 5) 16 (3 भागफल
– 15
1 शेषफल

$\therefore$ मिश्रित भिन्न = भागफल $\frac{\text{शेषफल}}{\text{भाजक}}$

$= 3\frac{1}{5}$

विकल्प:- $\frac{16}{5} = \frac{5+5+5+1}{5} = \frac{5}{5}+\frac{5}{5}+\frac{5}{5}+\frac{1}{5}$

$= 1 + 1 + 1 + \frac{1}{5} = 3\frac{1}{5}$

(ii) $\frac{19}{4}$

भाजक 4) 19 (4 भागफल
– 16
3 शेषफल

$\therefore$ मिश्रित भिन्न = भागफल $\frac{\text{शेषफल}}{\text{भाजक}}$

$= 4\frac{3}{4}$

(iii) $\frac{28}{3}$

$$\text{भाजक } 3 \overline{)\, 28 \,(} \; 9 \quad \text{भागफल}$$
$$-27$$
$$\overline{\quad 1} \quad \text{शेषफल}$$

$\therefore$ मिश्रित भिन्न = भागफल $\frac{\text{शेषफल}}{\text{भाजक}}$

$= 9\frac{1}{3}$

उदाहरण 12. निम्नलिखित मिश्रित भिन्नों को विषम भिन्नों में बदलें:-

(i) $5\frac{3}{4}$ (ii) $7\frac{2}{5}$ (iii) $8\frac{2}{7}$

हल : (i) $5\frac{3}{4} = \frac{5 \times 4 + 3}{4} = \frac{20+3}{4} = \frac{23}{4}$

(ii) $7\frac{2}{5} = \frac{7 \times 5 + 2}{5} = \frac{35+2}{5} = \frac{37}{5}$

(iii) $8\frac{2}{7} = \frac{8 \times 7 + 2}{7} = \frac{56+2}{7} = \frac{58}{7}$

प्रश्नावली 5.2

1. निम्नलिखित का उचित और विषम भिन्नों में वर्गीकरण करें:-

$\frac{5}{4}, \frac{9}{13}, \frac{6}{11}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{6}, \frac{7}{9}, \frac{2}{15}, \frac{4}{17}, \frac{7}{8}$

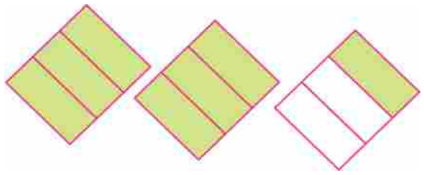
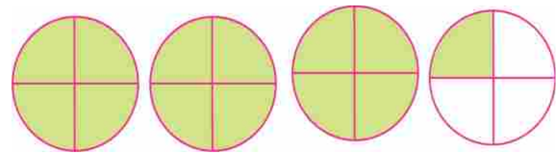
2. निम्नलिखित में प्रत्येक के लिए मिश्रित भिन्न को चित्र सहित दर्शाएँ:-

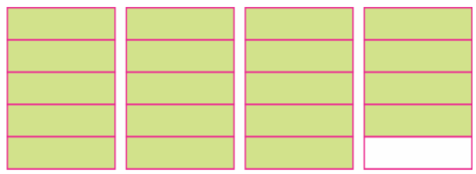
(i) $\frac{27}{5}$ (ii) $\frac{13}{4}$ (iii) $\frac{43}{8}$ (iv) $\frac{51}{7}$ (v) $\frac{20}{3}$

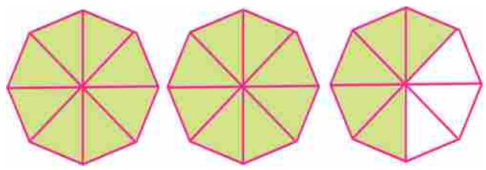
3. निम्नलिखित में प्रत्येक मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न के रूप में दर्शाएँ:-

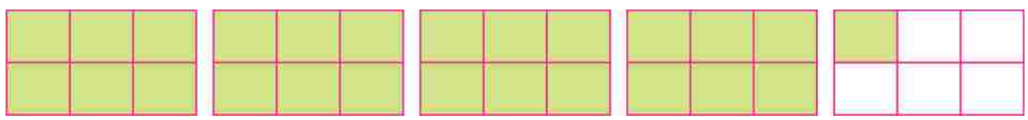
(i) $2\frac{1}{3}$ (ii) $5\frac{2}{7}$ (iii) $4\frac{3}{5}$ (iv) $3\frac{3}{4}$ (v) $9\frac{5}{8}$

4. छायांकित भागों को विषम भिन्न और मिश्रित भिन्न के रूप में दर्शाएँ:–

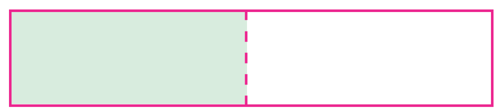
(i)  (ii) 

(iii) 

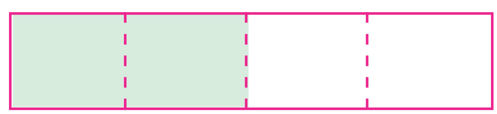
(iv) 

(v) 

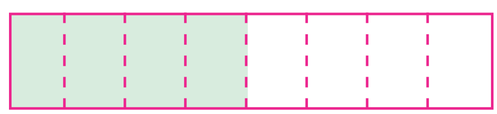
5.5. तुल्य भिन्न (Equivalent Fractions)



- कागज़ के टुकड़े को दो बराबर भागों में मोड़ें। कागज़ को खोलें। एक भाग में रंग भरें। प्रत्येक भाग कागज़ का $\frac{1}{2}$ हिस्सा दर्शाता है।



- अब इसे फिर से मोड़ें और फिर से खोलें।
  $\frac{1}{2}$ रंगदार भाग, अब कागज़ के $\frac{2}{4}$ भाग को दर्शाता है।



- अब, इसे फिर से मोड़ें और फिर से खोलें। रंगदार हिस्सा, अब कागज़ के $\frac{4}{8}$ भाग को दर्शाता है।

इन आकृतियों से हम निरीक्षण कर सकते हैं कि $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}$ ये सभी कागज़ के एक ही भाग को दर्शाते हैं।

ऐसी भिन्नें तुल्य भिन्नें कहलाती हैं।

- **तुल्य भिन्नें वे भिन्नें हैं जो कि एक ही मूल्य को दर्शाती हैं।**

जैसा कि हमने उपरोक्त क्रिया में देखा, हमारे पास , $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}$ तुल्य भिन्नें हैं।

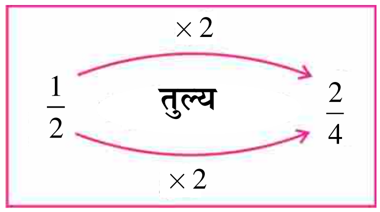
$\frac{2}{4}$ का अंश और हर, $\frac{1}{2}$ के अंश और हर से दुगुना है।

$\therefore \frac{2}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2}$

इसी तरह, $\frac{4}{8}$ का अंश और हर, $\frac{1}{2}$ के अंश और हर का चार गुणा है।

$\therefore \frac{4}{8} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4}$

हम देखते हैं कि $\frac{1}{2}$ के अंश और हर को क्रमवार 2 और 4 के साथ गुणा करने पर $\frac{2}{4}, \frac{4}{8}$ प्राप्त होता है।



इसी तरह से किसी भिन्न के अंश और हर को एक ही संख्या (0 के अतिरिक्त) से गुणा करने पर तुल्य भिन्न प्राप्त की जा सकती है।

आगे $\frac{2}{4} = \frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$

$\frac{4}{8} = \frac{4 \div 4}{8 \div 4} = \frac{1}{2}$

हम देखते हैं कि $\frac{2}{4}, \frac{4}{8}$ प्रत्येक के अंश और हर को उनके उभयनिष्ठ गुणनखंड अर्थात क्रमवार 2 और 4 से विभाजित करने पर एक तुल्य भिन्न $\frac{1}{2}$ प्राप्त की जा सकती है।

* इसके अंश और हर को एक ही संख्या (0 के अतिरिक्त) से गुणा करने पर
* इसके अंश और हर को उनके उभयनिष्ठ गुणनखंड (1 के अतिरिक्त) से भाग करने पर

उदाहरण 13. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए तीन तुल्य भिन्नें ज्ञात कीजिए?

(i) $\frac{2}{5}$ **(ii)** $\frac{3}{4}$ **(iii)** $\frac{7}{9}$

हल : (i) $\frac{2}{5}$ की तुल्य भिन्नें हैं:

$\frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$; $\frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$; $\frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$

(ii) $\frac{3}{4}$ की तुल्य भिन्नें हैं:

$$\frac{3\times2}{4\times2}=\frac{6}{8}\ ;\ \frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12}\ ;\ \frac{3\times4}{4\times4}=\frac{12}{16}$$

(iii) $\frac{7}{9}$ की तुल्य भिन्नें हैं:

$$\frac{7\times2}{9\times2}=\frac{14}{18}\ ;\ \frac{7\times3}{9\times3}=\frac{21}{27}\ ;\ \frac{7\times4}{9\times4}=\frac{28}{36}$$

उदाहरण 14: सबसे छोटी तुल्य भिन्न (सरलतम रूप) लिखें:-

(i) $\frac{9}{15}$ (ii) $\frac{24}{32}$ (iii) $\frac{60}{75}$ (iv) $\frac{20}{36}$ (v) $\frac{56}{84}$

हल : (i) $\frac{9}{15}=\frac{9\div3}{15\div3}=\frac{3}{5}$

[अंश और हर को 9 और 15 के म.स.व अर्थात 3 से भाग]

(ii) $\frac{24}{32}=\frac{24\div8}{32\div8}=\frac{3}{4}$

[अंश और हर को 24 और 32 के म.स.व अर्थात 8 से भाग]

(iii) $\frac{60}{75}=\frac{60\div15}{75\div15}=\frac{4}{5}$

[अंश और हर को 60 और 75 के म.स.व अर्थात 15 से भाग]

(iv) $\frac{20}{36}=\frac{20\div4}{36\div4}=\frac{5}{9}$

[अंश और हर को 20 और 36 के म.स.व अर्थात 4 से भाग]

(v) $\frac{56}{84}=\frac{56\div28}{84\div28}=\frac{2}{3}$

[अंश और हर को 56 और 84 के म.स.व अर्थात 28 से भाग]

एक भिन्न को न्यूनतम पद या सरलतम रूप में कहा जाता है जब इसके अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई भी उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो।

5.4.1 तुल्य भिन्नों की जाँच (तिरछी गुणा के माध्यम से)

दी गई भिन्नें तुल्य भिन्नें है यदि पहली भिन्न के अंश और दूसरी भिन्न के हर का गुणनफल, पहली भिन्न के हर और दूसरी भिन्न के अंश के गुणनफल के समान हो। उदाहरण देखें।

$$\frac{2}{7} \times \frac{6}{21}$$

$2 \times 21 = 42$ और $6 \times 7 = 42$

दोनों तिरछे गुणनफल समान हैं।

इसलिए, दो भिन्नें तुल्य होती हैं यदि उनकी तिरछी गुणा समान हो।

उदाहरण 15: क्या निम्न भिन्नें तुल्य भिन्नें हैं?

(i) $\frac{3}{4}$ **और** $\frac{12}{16}$ **(ii)** $\frac{5}{6}$ **और** $\frac{25}{30}$ **(iii)** $\frac{4}{7}$ **और** $\frac{24}{27}$

हल : (i) हमारे पास है $\frac{3}{4} \times \frac{12}{16}$

तिरछी गुणा के माध्यम से, $3 \times 16 = 48$ और $12 \times 4 = 48$

क्योंकि दोनों गुणनफल समान हैं, इसलिए

दी गई भिन्नें तुल्य भिन्नें हैं।

(ii) हमारे पास है $\frac{5}{6} \times \frac{25}{30}$

तिरछी गुणा के माध्यम से, $5 \times 30 = 150$ और $25 \times 6 = 150$

क्योंकि दोनों गुणनफल समान हैं, इसलिए

दी गई भिन्नें तुल्य भिन्नें हैं।

(iii) हमारे पास है $\frac{4}{7} \times \frac{24}{27}$

तिरछी गुणा के माध्यम से, $4 \times 27 = 108$ और $24 \times 7 = 168$

क्योंकि दोनों गुणनफल समान नहीं हैं, इसलिए

दी गई भिन्नें तुल्य भिन्नें नहीं हैं।

उदाहरण 16: निम्न भिन्नों में □ में सही संख्या भरें:-

(i) $\frac{3}{4} = \frac{15}{\square}$ **(ii)** $\frac{2}{5} = \frac{\quad}{30}$ **(iii)** $\frac{20}{28} = \frac{5}{\square}$

हल : (i) अंशों को देखने पर हमारे पास $15 \div 3 = 5$

इसलिए हम $\frac{3}{4}$ के अंश और हर दोनों को 5 से गुणा करते हैं।

अर्थात $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$

विकल्प : हम इसे तिरछी गुणा के माध्यम से भी हल कर सकते हैं।

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{\square}$$

मान लो $\square$ में x सही संख्या है।

$\Rightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{15}{x} \qquad \Rightarrow 3 \times x = 15 \times 4$

$$\Rightarrow x = \frac{15 \times 4}{3} = 20$$

(ii) हर को देखने पर हमारे पास है $30 \div 5 = 6$

इसलिए, हम $\frac{2}{5}$ के अंश और हर को 6 से गुणा करते हैं।

अर्थात $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{12}{30}$

(iii) अंशों को देखने पर, हमारे पास है $20 \div 5 = 4$

इसलिए, हम $\frac{20}{28}$ के अंश और हर को 4 से भाग करते हैं।

अर्थात $\frac{20}{28} = \frac{20 \div 4}{28 \div 4} = \frac{5}{7}$

उदाहरण 17: **(i)** $\frac{2}{3}$ **की तुल्य भिन्न लिखें जिसका अंश 16 हो।**

(ii) $\frac{5}{7}$ **की तुल्य भिन्न लिखें जिसका हर 28 हो।**

(iii) $\frac{30}{45}$ **की तुल्य भिन्न लिखें जिसका अंश 6 हो।**

हल : (i) हमें $\frac{2}{3}$ की तुल्य भिन्न चाहिए जिसका अंश 16 हो।

अथवा $\frac{2}{3} = \frac{16}{\square}$

अंशों को देखने पर, हमारे पास है $16 \div 2 = 8$

इसलिए, हम $\frac{2}{3}$ के अंश और हर को 8 से गुणा करते हैं।

अर्थात $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = \frac{16}{24}$

इस प्रकार, $\frac{16}{24}$ तुल्य भिन्न हैं।

(ii) हमें $\frac{5}{7}$ की तुल्य भिन्न चाहिए जिसका हर 28 हो।

अथवा $\frac{5}{7} = \frac{\square}{28}$

हर को देखने पर, हमारे पास है 28 ÷ 7 = 4

इसलिए, हम $\frac{5}{7}$ के अंश और हर को 4 से गुणा करते हैं।

i.e $\frac{5}{7} = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = \frac{20}{28}$

इस प्रकार $\frac{20}{28}$ तुल्य भिन्न हैं।

(iii) हमें $\frac{30}{45}$ की तुल्य भिन्न चाहिए, जिसका अंश 6 हो।

अथवा $\frac{30}{45} = \frac{6}{\square}$

अंशों को देखने पर, हमारे पास है 30 ÷ 6 = 5

इसलिए $\frac{30}{45}$ के अंश और हर को 5 से भाग करते हैं।

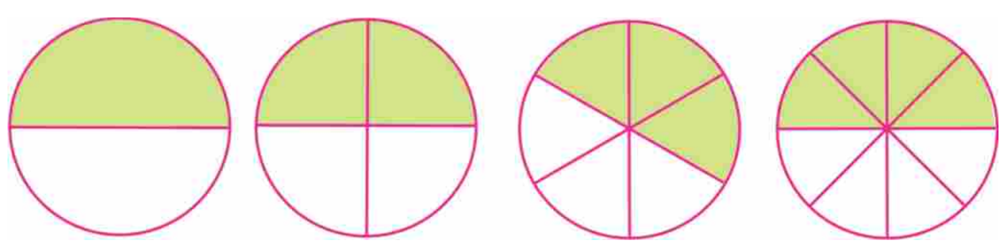
अर्थात $\frac{30}{45} = \frac{30 \div 5}{45 \div 5} = \frac{6}{9}$

इस प्रकार, $\frac{6}{9}$ तुल्य भिन्न है।

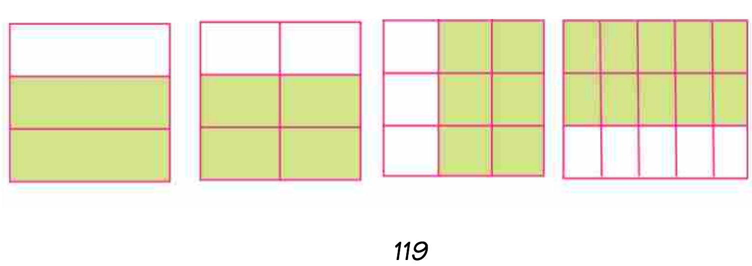
प्रश्नावली 5.3

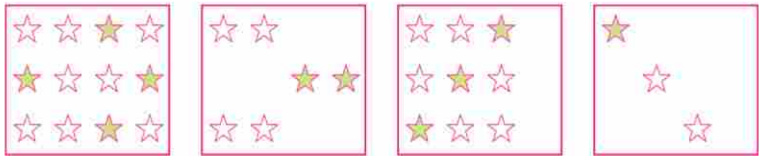
1. छायांकित भाग के लिए भिन्न लिखें और जाँच करें कि यह भिन्नें तुल्य भिन्नें हैं या नहीं?

(i)



(ii)



(iii) 

2. निम्नलिखित में प्रत्येक के लिए चार तुल्य भिन्न लिखें:-

(i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{7}{9}$ (iv) $\frac{5}{11}$ (v) $\frac{2}{3}$

3. सबसे छोटी तुल्य भिन्न (सरलतम रूप) लिखें:-

(i) $\frac{10}{25}$ (ii) $\frac{27}{54}$ (iii) $\frac{48}{72}$ (iv) $\frac{150}{60}$ (v) $\frac{162}{90}$

4. क्या निम्न दी गई भिन्नें तुल्य भिन्नें हैं या नहीं?

(i) $\frac{5}{12}, \frac{25}{60}$ (ii) $\frac{6}{7}, \frac{36}{42}$ (iii) $\frac{7}{9}, \frac{56}{72}$

5. निम्नलिखित में $\square$ को सही संख्या में भरें:-

(i) $\frac{2}{7} = \frac{12}{\square}$ (ii) $\frac{5}{8} = \frac{35}{\square}$ (iii) $\frac{24}{36} = \frac{6}{\square}$ (iv) $\frac{30}{48} = \frac{\square}{8}$ (v) $\frac{7}{4} = \frac{42}{\square}$

6. $\frac{3}{5}$, की तुल्य भिन्न पता करें, जिसमें

(i) अंश = 18 (ii) हर = 20 (iii) अंश = 24 हो।

7. $\frac{24}{40}$ की तुल्य भिन्न पता करें, जिसमें

(i) अंश = 6 (ii) अंश = 48 (iii) हर = 20 हो।

5.6 समान, असमान भिन्नें और इकाई भिन्नें (Like, Unlike Fractions and Unit Fractions)

* **समान भिन्नें (Like Fraction):-** समान हर वाली भिन्नें समान भिन्नें कहलाती हैं।

जैसे $\frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}$ समान भिन्नें हैं।

* **असमान भिन्नें (Unlike Fractions):-** अलग-अलग हर वाली भिन्नें असमान भिन्नें कहलाती हैं।

जैसे $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$ आदि असमान भिन्नें हैं।

* **इकाई भिन्नें (Unit Fractions):-** एक भिन्न जिसका अंश 1 हो, इकाई भिन्न कहलाती है।

जैसे $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{8}$ आदि।

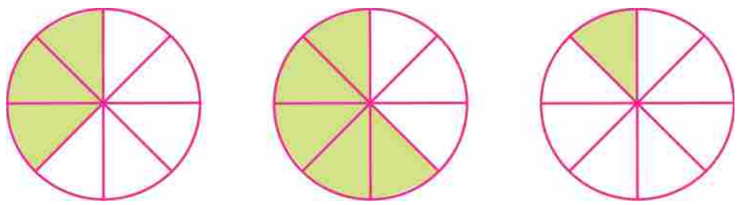
5.7 भिन्नों की तुलना और सही क्रम में लगाना (Comparing and Ordering of Fractions)

हम प्राकृतिक संख्याओं, पूर्ण संख्याओं और संपूर्ण संख्याओं की तुलना करना पहले ही सीख चुके हैं। यहाँ, हम उन भिन्नों की तुलना करना सीखेंगे जो तीन भागों में बँटी हुई है।

5.7.1 समान हर वाली भिन्नें (Fractions with the Same Denominator)

आओ! समान हर वाली कुछ भिन्नें देखते हैं। जैसे $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}$

इन भिन्नों को चित्र के रूप में दर्शाया गया है।



$\frac{3}{8}$ A $\quad$ $\frac{5}{8}$ B $\quad$ $\frac{1}{8}$ C

चित्रों (आकृतियों) को देखने पर परिणाम निकलता है कि B का छायांकित भाग >A का छायांकित भाग >C का छायांकित भाग

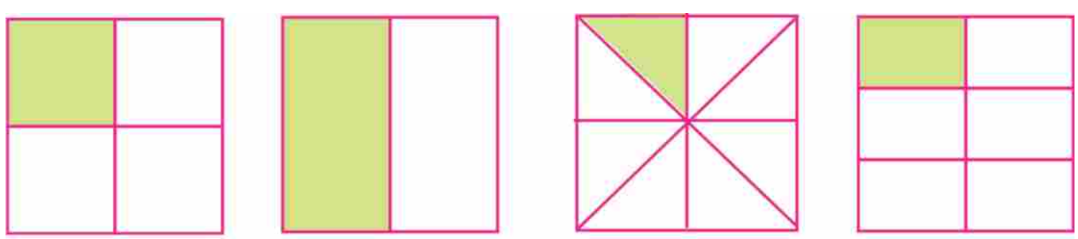
अर्थात $\frac{5}{8} > \frac{3}{8} > \frac{1}{8}$

इस प्रकार, यदि दो या अधिक भिन्नों के हर समान हों, तो बड़े अंश वाली भिन्न, बड़ी भिन्न कहलाती है।

5.7.2 समान अंश वाली भिन्नें (Fraction with the same Numerator)

आओ! समान अंश वाली कुछ भिन्नें देखते हैं। जैसे $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}$

इन भिन्नों को चित्र के रूप में निम्न दर्शाया गया है।



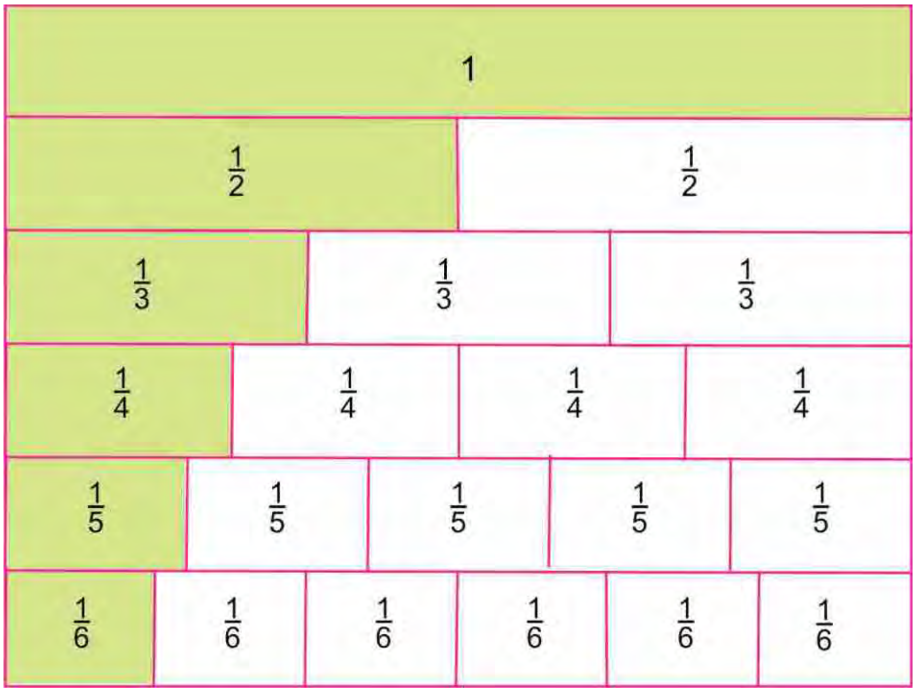
$\frac{1}{4}$ (A) $\quad$ $\frac{1}{2}$ (B) $\quad$ $\frac{1}{8}$ (C) $\quad$ $\frac{1}{6}$ (D)

चित्रों (आकृतियों) को देखने पर परिणाम निकलता है कि B का छायांकित भाग > A का छायांकित भाग > D का छायांकित भाग >C का छायांकित भाग

अर्थात $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{6} > \frac{1}{8}$

इस प्रकार, यदि दो या अधिक भिन्नों के अंश समान हों, तो छोटे हर वाली भिन्न, बड़ी भिन्न कहलाती है।

तुल्य भिन्नों का निरूपण।



इस तरह से परिणाम निकलता है कि यदि दो या अधिक भिन्नों के अंश बराबर हो तो छोटे हर वाली भिन्न बड़ी भिन्न कहलाती है।

अर्थात $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$

यह गतिविधि चार्ट या रंगों के प्रयोग से भी की जा सकती है।

5.7.3 अलग-अलग (भिन्न-भिन्न) अंश और हर वाली भिन्नें (Fraction with different numerators and denominators)

अलग-अलग अंश और हर वाली भिन्नों की तुलना करने के लिए, सबसे पहले हम इन भिन्नों को नीचे लिखे चरणों का प्रयोग करते हुए, समान भिन्नों में बदलेंगे:-

चरण 1 : भिन्नों के हर का ल.स.व पता करो।

चरण 2 : प्रत्येक भिन्न को इसकी तुल्य भिन्न में बदलें जिसका हर चरण 1 में प्राप्त ल.स.व के बराबर हो।

चरण 3 : समान हर वाली तुल्य भिन्नों के अंशों की तुलना करो।

उदाहरण 18 : **$\frac{2}{3}$ और $\frac{5}{6}$ में कौन सी भिन्न बड़ी है?**

हल : पहले 3 और 6 का ल.स.व = 6 है।

अब हम दी गई भिन्न को ऐसी भिन्न में बदलेंगे जिसका हर 6 हो।

हमारे पास $\frac{2}{3} = \frac{2\times2}{3\times2} = \frac{4}{6}$ और दूसरी भिन्न $\frac{5}{6}$

स्पष्ट रूप में, $\frac{4}{6} < \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{5}{6}$

3	3, 6
2	1, 2
	1, 1

$\therefore$ 3 और 6 का ल.स.व. $3 \times 2 = 6$

विकल्पः-

यदि दो भिन्नें हों तो हम तिरछी गुणा के माध्यम से भी तुलना कर सकते हैं।

$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}$

$2 \times 6 = 12$ और $5 \times 3 = 15$

इसलिए $12 < 15 \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{5}{6}$

उदाहरण 19: $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{12}$ **भिन्नों को घटते क्रम में व्यवस्थित करें।**

हल : सबसे पहले हर 4, 8 और 12 का ल.स.व पता करें।

अब हम दी गई भिन्नों को ऐसी भिन्नों में परिवर्तित करेंगे जिसका हर 24 हो।

$\frac{3}{4} = \frac{3\times6}{4\times6} = \frac{18}{24}$

$\frac{7}{8} = \frac{7\times3}{8\times3} = \frac{21}{24}$

और $\frac{5}{12} = \frac{5\times2}{12\times2} = \frac{10}{24}$

2	4, 8, 12
2	2, 4, 6
2	1, 2, 3
3	1, 1, 3
	1, 1, 1

ल.स.व $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

$\Rightarrow \frac{21}{24} > \frac{18}{24} > \frac{10}{24} \quad \Rightarrow \frac{7}{8} > \frac{3}{4} > \frac{5}{12}$

उदाहरण 20: $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{3}{5}, \frac{7}{15}$ **भिन्नों को बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करें-**

हल : सबसे पहले हर 3, 9, 5, 15 का ल.स.व पता करें।

अब, हम दी गई भिन्नों को ऐसी भिन्नों में परिवर्तित करेंगे। जिनका हर 45 हो।

3	3, 9, 5, 15
3	1, 3, 5, 5
5	1, 1, 5, 5
	1, 1, 1, 1

ल.स.व $= 3 \times 3 \times 5 = 45$

हमारे पास $\frac{2}{3} = \frac{2\times15}{3\times15} = \frac{30}{45}$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \times 5}{9 \times 5} = \frac{25}{45}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 9}{5 \times 5} = \frac{27}{45}$$

$$\frac{7}{15} = \frac{7 \times 3}{15 \times 3} = \frac{21}{45}$$

$\therefore$ आरोही (बढ़ते) क्रम में है।

$$\Rightarrow \quad \frac{21}{45} < \frac{25}{45} < \frac{27}{45} < \frac{30}{45}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{15} < \frac{5}{9} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$$

उदाहरण 21: एक लड़का एक किताब का $\frac{2}{5}$ भाग पहले दिन पढ़ता है और उस किताब का $\frac{1}{4}$ भाग दूसरे दिन पढ़ता है। उसने किस दिन किताब का अधिक भाग पढ़ा?

हल : यहाँ, हम दोनों भिन्नों $\frac{2}{5}$ और $\frac{1}{4}$ की तुलना करेंगे और पता करेंगे कि कौन सा भाग बड़ा है।

तिरछी गुणा के माध्यम से $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{4}$

$2 \times 4 = 8$ और $1 \times 5 = 5$

इसलिए $8 > 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} > \frac{1}{4}$

इस प्रकार, उसने पहले दिन किताब का अधिक भाग पढ़ा।

उदाहरण 22: अरुण ने एक घंटे का $\frac{3}{4}$ हिस्सा अभ्यास किया है जबकि जसप्रीत ने एक घंटे का $\frac{3}{10}$ हिस्सा अभ्यास किया। किसने अधिक समय के लिए अभ्यास किया?

हल : अरुण ने अभ्यास किया = 1 घंटे का $\frac{3}{4}$

जसप्रीत ने अभ्यास किया = 1 घंटे का $\frac{3}{10}$

स्पष्ट रूप में, दोनों भिन्नों में अंश समान हैं।

इसलिए छोटे हर वाली भिन्न बड़ी है।

अर्थात $\frac{3}{4} > \frac{3}{10}$

इस प्रकार, अरुण ने अधिक समय के लिए अभ्यास किया।

विकल्प:-

अरुण ने अभ्यास किया = 1 घंटे का $\frac{3}{4}$ = $\frac{3}{4} \times 60$ मिनट

= 45 मिनट [∴ 1 घंटा = 60 मिनट]

जसप्रीत ने अभ्यास किया = 1 घंटे का $\frac{3}{10}$ = $\frac{3}{10} \times 60$ मिनट

= 18 मिनट [∴ 1 घंटा = 60 मिनट]

$\Rightarrow \quad 45 > 18$

इस प्रकार अरुण ने अधिक समय के लिए अभ्यास किया।

प्रश्नावली 5.4

1. समान भिन्नों का अलग-अलग समूह बनाएँ:-

$\frac{3}{7}, \frac{5}{11}, \frac{2}{7}, \frac{6}{13}, \frac{3}{11}, \frac{1}{11}, \frac{2}{13}, \frac{5}{13}, \frac{6}{7}, \frac{10}{13}$

2. कोई भी तीन समान भिन्नें लिखें:-

(i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{11}{6}$

3. इकाई भिन्नों पर गोला लगाएँ:-

$\frac{6}{11}, \frac{2}{3}, \frac{1}{8}, \frac{15}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{3}{3}$

4. रिक्त स्थान में >, = या < भरो:

(i) $\frac{4}{7} \square \frac{6}{7}$ (ii) $\frac{4}{5} \square \frac{3}{5}$ (iii) $\frac{7}{8} \square \frac{0}{8}$ (iv) $\frac{2}{3} \square \frac{5}{3}$ (v) $\frac{5}{13} \square \frac{7}{13}$

5. >, < या = चिह्नों का प्रयोग करते हुए तुलना करें:-

(i) $\frac{5}{7} \square \frac{5}{9}$ (ii) $\frac{1}{3} \square \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{6}{11} \square \frac{6}{13}$ (iv) $\frac{11}{12} \square \frac{11}{17}$ (v) $\frac{7}{13} \square \frac{7}{10}$

6. > , < या = चिह्नों का प्रयोग करते हुए तुलना करें:-

(i) $\frac{5}{6} \square \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{3}{4} \square \frac{1}{3}$ (iii) $\frac{3}{7} \square \frac{5}{9}$ (iv) $\frac{7}{10} \square \frac{4}{5}$ (v) $\frac{7}{7} \square 1$

7. निम्नलिखित दी गई भिन्नों को बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करें–

(i) $\frac{7}{10}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}$ (ii) $\frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}$ (iii) $\frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}$ (iv) $\frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{3}$

(v) $\frac{3}{11}, \frac{3}{7}, \frac{3}{13}$ (vi) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{12}$ (vii) $\frac{2}{7}, \frac{11}{35}, \frac{9}{14}, \frac{13}{28}$ (viii) $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}, \frac{4}{15}$

8. निम्नलिखित दी गई भिन्नों को घटते क्रम में व्यवस्थित करें:–

(i) $\frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{1}{9}$ (ii) $\frac{3}{11}, \frac{5}{11}, \frac{2}{11}, \frac{7}{11}$ (iii) $\frac{2}{7}, \frac{2}{13}, \frac{2}{9}$

(iv) $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}$ (v) $\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{5}{18}, \frac{2}{3}$ (vi) $\frac{3}{4}, \frac{9}{20}, \frac{11}{15}, \frac{17}{30}$

9. साक्षी अपनी यात्रा का $\frac{1}{3}$ हिस्सा कार से, $\frac{1}{5}$ हिस्सा रिक्शा से और $\frac{2}{15}$ हिस्सा पैदल तय करती है। पता करो कि उसने अपनी यात्रा का अधिक हिस्सा किस साधन के माध्यम से तय किया?

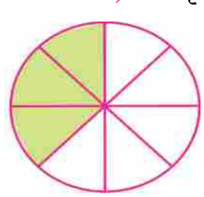
10. पिता ने अपनी संपत्ति तीन पुत्रों में बाँटी। सबसे बड़े को $\frac{3}{10}$, बीच वाले को $\frac{1}{6}$ और सबसे छोटे को संपत्ति को $\frac{1}{5}$ हिस्सा प्राप्त हुआ। तीनों पुत्रों की संपत्ति को बढ़ते क्रम में लिखिए।

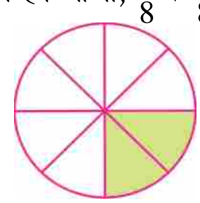
5.8 भिन्नों पर संचालन (Operations on Fractions)

पिछले भाग में हमने समान, असमान भिन्नें और उनकी तुलना के बारे में सीखा। इस भाग में, हम भिन्नों के जोड़ और घटाने के बारे में सीखेंगे। इन क्रियाओं को करने के लिए हम कई विधियों/ढंगों का इस्तेमाल करते हैं:–

5.8.1 समान भिन्नों को जोड़ना और घटाना (Addition and Subtraction of like fractions)

• **जोड़ (Addition):-** आकृति की तरफ देखें, इस वृत में 8 भाग हैं। आओ, $\frac{3}{8} + \frac{2}{8}$ को निरूपित करते हैं।

$\frac{3}{8}$ = 

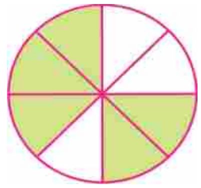
$\frac{2}{8}$ = 

छायांकित भाग :- 8 में से 3 भागों में हरा रंग किया गया।

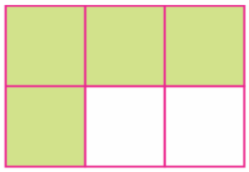
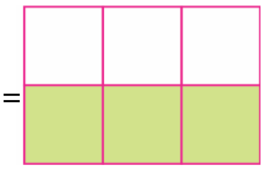
छायांकित भाग :- 8 में से 2 भागों में हरा रंग किया गया।

छायांकित भागों की गिनती करने पर 8 में से 5 प्राप्त होते हैं। अर्थात $\frac{5}{8}$

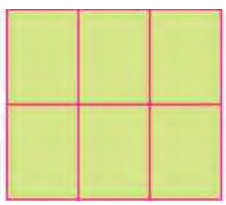
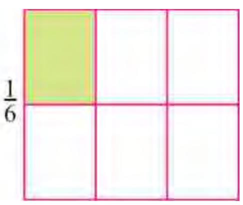
i.e $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$



- आओ, $\frac{4}{6} + \frac{3}{6}$ को निरूपित करें।

$\frac{4}{6} =$  , $\frac{3}{6} =$ 

छायांकित भाग 1 :- 6 में से 4 डिब्बों में हरा रंग किया गया।

$\frac{6}{6} = 1$  $\frac{1}{6}$ 

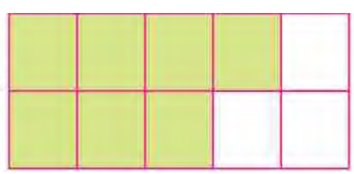
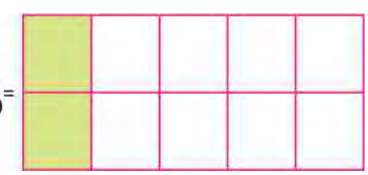
छायांकित भाग 2 :- यहां, हमें 6 में से 3 डिब्बों को छायांकित करना है, परंतु हमारे पास 2 डिब्बे बचे हैं और हम दो से अधिक भाग छायांकित नहीं कर सकते। इसलिए हम 2 भागों को छायाकित करने के बाद उसी आकार की 6 भागों वाली एक और आकृति बनाते हैं और बाकी 1 को उन भागों में से छायांकित करते हैं।

अर्थात $\frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

- **समान भिन्नों को घटाना (Subtraction of Like fractions):-** आओ, $\frac{7}{10}$ में से $\frac{2}{10}$ घटाइए

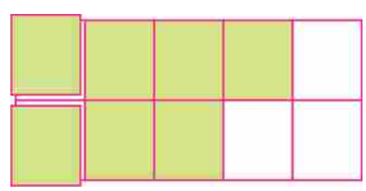
अर्थात $\frac{7}{10} - \frac{2}{10}$

- 10 में से 7 हिस्सों को छायांकित करे।

$\frac{7}{10} =$  $\frac{2}{10} =$ 

- 10 में से 2 छायांकित हिस्से अलग कर लीजिए।
  अब, बाकी बचे छायांकित हिस्से 5 हैं।

  इसलिए $\frac{7}{10} - \frac{2}{10} = \frac{5}{10}$



इस प्रकार, दो या दो से अधिक समान भिन्नों का जोड़ और अंतर निम्न ढंग से पता लगाया जा सकता है:–

चरण 1:– सभी भिन्नों के अंशों को जोड़ना/घटाना

चरण 2:– सभी भिन्नों का सांझा हर रखें।

चरण 3:- भिन्नों को इस प्रकार लिखें $\frac{\text{अंशों का जोड़/अंतर}}{\text{सांझा हर}}$

उदाहरण 23: **हल करो:-**

(i) $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}$ (ii) $\frac{5}{11}+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}$ (iii) $\frac{5}{14}+\frac{8}{14}+\frac{2}{14}$

(iv) $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}$ (v) $\frac{4}{7}+\frac{5}{7}-\frac{6}{7}$ (vi) $\frac{8}{9}-\frac{2}{9}-\frac{3}{9}$

हल : (i) $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{3+4}{10}=\frac{7}{10}$

(ii) $\frac{5}{11}+\frac{2}{11}+\frac{1}{11}=\frac{5+2+1}{11}=\frac{8}{11}$

(iii) $\frac{5}{14}+\frac{8}{14}+\frac{2}{14}=\frac{5+8+2}{14}=\frac{15}{14}$

(iv) $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5-3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ $\left[\frac{2}{8}=\frac{2\div 2}{8\div 2}=\frac{1}{4}\right]$

(v) $\frac{4}{7}+\frac{5}{7}-\frac{6}{7}=\frac{4+5-6}{7}=\frac{3}{7}$

(vi) $\frac{8}{9}-\frac{2}{9}-\frac{3}{9}=\frac{8-2-3}{9}=\frac{3}{9}$

5.8.2 असमान भिन्नों को जोड़ना/घटाना (Addition / Subtraction of Unlike Decimals)

पिछले भाग में, हमने समान भिन्नों को जोड़ना और घटाना सीखा। इस भाग में हम असमान भिन्नों को जोड़ना और घटाना सीखेंगे। सबसे पहले हम असमान भिन्नों को समान तुल्य भिन्नों में बदलते हैं और फिर जोड़ते या घटाते हैं। हम इन चरणों का प्रयोग करते हैं।

चरण 1:- हरों का ल.स.व पता करें।

चरण 2:- प्रत्येक भिन्न को ऐसी तुल्य भिन्न में बदलें जिसका हर प्राप्त किए गए लघुत्तम समापवर्तक (ल.स.व) के बराबर हो।

चरण 3:- समान भिन्नों की तरह ज़रूरत के अनुसार जोड़ें या घटाएँ।

आइए, नीचे दिए गए उदाहरण के माध्यम से समझते हैं::

उदाहरण 24: $\frac{2}{3}$ **और** $\frac{3}{10}$ **को जोड़िए।**

हल : $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{10}$, को जोड़ने के लिए हम 3 और 10 का ल.स.व जो कि (30) लेते हैं।

तुल्य भिन्नें जिनका हर 30 हो:

$\frac{2}{3}=\frac{2\times10}{3\times10}=\frac{20}{30}$ और $\frac{3}{10}=\frac{3\times3}{10\times3}=\frac{9}{30}$

इस प्रकार $\frac{2}{3}+\frac{3}{10}=\frac{20}{30}+\frac{9}{30}=\frac{20+9}{30}=\frac{29}{30}$

विकल्पः- $\frac{(\text{पहली भिन्न})\times \text{ल.स.व} + (\text{दूसरी भिन्न})\times \text{ल.स.व}}{\text{दोनों हरों का ल.स.व}}$

अर्थात $\frac{\frac{2}{3}\times30+\frac{3}{10}\times30}{30}=\frac{2\times10+3\times3}{30}=\frac{20+9}{30}=\frac{29}{30}$

विकल्पः- तिरछी गुणा विधि

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d+b\times c}{b\times d}$

इस प्रकार $\frac{2}{3}+\frac{3}{10}=\frac{2\times10+3\times3}{3\times10}=\frac{20+9}{30}=\frac{29}{30}$

यह तब लागू होता है जब हरों के बीच में कोई भी साँझा गुणनखंड न हो।

उदाहरण 25: $\frac{5}{6}+\frac{1}{4}$ को हर कीजिए :

हल : $\frac{5}{6}$ और $\frac{1}{4}$, को जोड़ने के लिए हम 6 और 4 का ल.स.व = (12) लेते हैं।

इसलिए तुल्य भिन्नें जिसका हर 12 हो:

$\frac{5}{6}=\frac{5\times2}{6\times2}=\frac{10}{12}$ और $\frac{1}{4}=\frac{1\times3}{4\times3}=\frac{3}{12}$

2	6, 4
	3, 2

ल.स.व = 2 × 3 ×2 =12

इस प्रकार $\frac{5}{6}+\frac{1}{4}=\frac{10}{12}+\frac{3}{12}=\frac{10+3}{12}=\frac{13}{12}$

विकल्पः-

$\frac{(\text{पहली भिन्न})\times \text{ल.स.व} + (\text{दूसरी भिन्न})\times \text{ल.स.व}}{\text{दोनों हरों का ल.स.व}}$

अर्थात $\frac{\left[\frac{5}{6}\times12\right]+\left[\frac{1}{4}\times12\right]}{12}=\frac{10+3}{12}=\frac{13}{12}$

उदाहरण 26: $3\frac{1}{4}+2\frac{4}{5}$ **को सरल कीजिए :**

हल : मिश्रित भिन्नों को विषम भिन्नों में बदलें:-

अर्थात $3\frac{1}{4}+2\frac{4}{5} = \frac{13}{4}+\frac{14}{5} =$

$$= \frac{13\times5}{4\times5}+\frac{14\times14}{5\times4} = \frac{65}{20}+\frac{56}{20}$$

$$= \frac{65+50}{20} = \frac{121}{20} = 6\frac{1}{20}$$

[∴ 4 और 5 का ल.स.व. 20 है इसलिए प्रत्येक भिन्न को 20 हर वाली तुल्य भिन्न में बदलें]

∵ 20) 121 (1
   −120
   1

विकल्प:-

$$3\frac{1}{4}+2\frac{4}{5}$$

$$= 3+\frac{1}{4}+2+\frac{4}{5} = 5+\left[\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\right]$$

$$= 5 + \left(\frac{1\times5}{4\times5}+\frac{4\times4}{5\times4}\right)$$

हर 20 वाली तुल्य भिन्न में बदले

$$= 5 + \left(\frac{5}{20}+\frac{16}{20}\right)$$

$$= 5 + \left(\frac{21}{20}\right) = 5 + \left(1\frac{1}{20}\right)$$

∵ 20) 21 (1
   − 20
   1

$$= 5 + 1 + \frac{1}{20} = 6 + \frac{1}{20} = 6\frac{1}{20}$$

उदाहरण 27: हल कीजिए।

(i) $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$

हल : (i) $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$

$\frac{3}{4}$ और $\frac{5}{8}$ को घटाने के लिए , हम 4 और 8 का ल.स.व = 8 लेते हैं।

2	4, 8
2,	2, 4
	1, 2

ल.स.व = 2 × 2 ×2 = 8

इसलिए तुल्य भिन्नें जिनका हर 8 हो-

$$\frac{3}{4} = \frac{3\times2}{4\times2} = \frac{6}{8} \text{ और } \frac{5}{8}$$

इस प्रकार $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=\frac{6}{8}-\frac{5}{8}=\frac{6-5}{8}=\frac{1}{8}$

(ii) $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$

$\frac{2}{3}$ और $\frac{1}{2}$ को घटाने के लिए, हम 3 और 4 का ल.स.व = 12 लेते हैं।

इसलिए तुल्य भिन्नें जिनका हर 12 हो।

इस प्रकार $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{2\times 4}{3\times 4}-\frac{1\times 3}{4\times 3}$

$=\frac{8}{12}-\frac{3}{12}=\frac{8-3}{12}=\frac{5}{12}$

उदाहरण 28 : **$4\frac{3}{5}$ में से $1\frac{1}{2}$ घटाइए:-**

हल : (i) $4\frac{3}{5}-1\frac{1}{2}$

मिश्रित भिन्नों को विषम भिन्नों में बदलें।

[∵ 5 और 2 का ल.स.व 10 है, इसलिए प्रत्येक भिन्न को हर 10 वाली तुल्य भिन्न में बदलें]

अर्थात $4\frac{3}{5}-1\frac{1}{2}=\frac{23}{5}-\frac{3}{2}$

$=\frac{23\times 2}{5\times 2}-\frac{3\times 5}{2\times 5}$

$=\frac{46}{10}-\frac{15}{10}=\frac{46-15}{10}$

$=\frac{31}{10}=3\frac{1}{10}$

∵ 10) 31 (3
−30
1

अन्य विधि:-

$4\frac{3}{5}-1\frac{1}{2}=(4-1)+\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)$

$=3+\left(\frac{3\times 2}{5\times 2}-\frac{1\times 5}{2\times 5}\right)=3+\left(\frac{6}{10}-\frac{5}{10}\right)$

$=3+\frac{1}{10}=3\frac{1}{10}$

उदाहरण 29:- हल कीजिए :-

(i) $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}-\frac{5}{6}$ **(ii)** $\frac{3}{5}+\frac{7}{10}-\frac{1}{4}$

(iii) $\frac{5}{12}-\frac{1}{6}+\frac{4}{15}$

हल : (i) $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}-\frac{5}{6}$

सबसे पहले हम 3, 8 और 6 का ल.स.व = 24 लेते हैं, फिर प्रत्येक भिन्न को हर 24 वाली तुल्य भिन्न में बदलेंगे।

3	3, 8, 6
2	1, 8, 2
	1, 4, 1

ल.स.व = 3 × 2 × 4 = 24

$$\therefore \frac{2}{3}+\frac{3}{8}-\frac{5}{6}=\frac{2\times 8}{3\times 8}+\frac{3\times 3}{8\times 3}-\frac{5\times 4}{6\times 4}$$

$$=\frac{16}{24}+\frac{9}{24}-\frac{20}{24}=\frac{16+9-20}{24}=\frac{5}{24}$$

(ii) $\frac{3}{5}+\frac{7}{10}-\frac{1}{4}$

सबसे पहले हम 5, 10 और 4 का ल.स.व = 20 लेते हैं, फिर प्रत्येक भिन्न को हर 20 वाली तुल्य भिन्न में बदलेंगे:-

2	5, 10, 4
5	5, 5, 2
	1, 1, 2

ल.स.व = 2 × 5 × 2 = 20

$$\therefore \frac{3}{5}+\frac{7}{10}-\frac{1}{4}=\frac{3\times 4}{5\times 4}+\frac{7\times 2}{10\times 2}-\frac{1\times 5}{4\times 5}$$

$$=\frac{12}{20}+\frac{14}{20}+\frac{5}{20}=\frac{12+14-5}{20}=\frac{21}{20}$$

(iii) $\frac{5}{12}-\frac{1}{6}+\frac{4}{15}$

2	12, 6, 15
3	6, 3, 15
	2, 1, 5

ल.स.व = 2 × 3 × 2 × 5 = 60

हर 12, 6 और 15 का ल.स.व = 60

$$=\frac{5\times 5}{12\times 5}-\frac{1\times 10}{6\times 10}+\frac{4\times 4}{15\times 4}$$

$$=\frac{25}{60}-\frac{10}{60}+\frac{16}{60}=\frac{25-10+16}{60}=\frac{31}{60}$$

5.8.3 पूर्ण संख्याओं में भिन्न का जोड़ना/घटाना (Adding or Subtracting a fraction from a whole number)

इस भाग में, हम पूर्ण संख्याओं में भिन्न का जोड़ना/घटाना सीखेंगे। हम पूर्ण संख्या के हर में 1 लिखकर इसे भिन्न के रूप में प्रकट करते हैं।

उदाहरण 30: **हल कीजिए:-**

(i) $4+\frac{2}{3}$ **(ii)** $2-\frac{5}{6}$

हल : (i) $4+\frac{2}{3}=\frac{4}{1}+\frac{2}{3}=\frac{4\times 3}{1\times 3}+\frac{2}{3}$ (∵ 1 और 3 का ल.स.व 3 है)

$=\frac{4\times 3+2\times 1}{3}=\frac{12+2}{3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$

अन्य विधि:-

जोड़ने पर, हम इसे लिख सकते हैं-

अर्थात $4+\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$

(ii) $2-\frac{5}{6}=\frac{2}{1}-\frac{5}{6}$ (∵ 1 और 6 का ल.स.व 6 है)

$=\frac{2\times 6}{1\times 6}-\frac{5}{6}=\frac{12}{6}-\frac{5}{6}$

$=\frac{12-5}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$

6) 7 (1
−6
1

उदाहरण 31:- **सोफिया सुबह के समय $\frac{3}{8}$ कि.मी दौड़ी और शाम के समय $2\frac{7}{10}$ कि.मी दौड़ी। वह उस दिन कितना दौड़ी?**

हल : सोफिया कुल दूरी तक दौड़ी = $\frac{3}{8}+2\frac{7}{10}$

$\frac{3}{8}+\frac{27}{10}$

$=\frac{3\times 5}{8\times 5}+\frac{27\times 4}{10\times 4}$

$=\frac{15}{40}+\frac{108}{40}=\frac{15+108}{40}=\frac{123}{40}=3\frac{3}{40}$

∴ सोफिया उस दिन $3\frac{3}{40}$ कि.मी दौड़ी।

2	8, 10
	4, 5

8 और 10 का ल.स.व = 2x4 x5 = 40

∵ 40) 123 (3
−120
3

उदाहरण 32:- **एक $3\frac{3}{4}$ मीटर लंबे तार के टुकड़े दो हिस्सों में तोड़ा गया। एक टुकड़ा $2\frac{5}{6}$ मीटर लंबा था। दूसरा टुकड़ा कितना लंबा है?**

हल : दूसरे टुकड़े की लंबाई = $3\frac{3}{4}-2\frac{5}{6}$

$=\frac{15}{4}-\frac{17}{6}$ (∵ 4 और 6 का ल.स.व = 12)

$=\frac{15\times 3}{4\times 3}-\frac{17\times 2}{6\times 2}=\frac{45}{12}-\frac{34}{12}=\frac{11}{12}$

इसलिए, दूसरे टुकड़े की लंबाई $\frac{11}{12}$ मीटर है।

उदाहरण 33: **पंकज ने एक कॉपी ₹ $11\frac{1}{2}$, एक पेंसिल ₹ $2\frac{3}{4}$ और रंगों की डिब्बी ₹ $6\frac{2}{5}$ में खरीदी। उसने कितने रुपये खर्च किए?**

हल : कुल रुपये जो पंकज ने खर्च किए $= 11\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}+6\frac{2}{5}$

$= \frac{23}{2}+\frac{11}{4}+\frac{32}{5}$ (∵ 2,4 5, का ल.स.व = 20)

$= \frac{23\times10}{2\times10}+\frac{11\times5}{4\times5}+\frac{32\times4}{5\times4}$

$= \frac{230}{20}+\frac{55}{20}+\frac{128}{20}=\frac{230+55+128}{20}$

$= \frac{413}{20}=20\frac{13}{20}$

20)413(20
–400
13

उसने ₹ $20\frac{13}{20}$ खर्च किए।

प्रश्नावली 5.5

1. निम्नलिखित को हल कीजिए:–

(i) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{2}{11}+\frac{4}{11}$ (iii) $\frac{6}{13}+\frac{5}{13}$ (iv) $\frac{5}{14}+\frac{9}{14}+\frac{3}{14}$

(v) $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ (vi) $\frac{1}{6}+\frac{5}{12}$ (vii) $\frac{6}{13}+\frac{5}{13}$ (viii) $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$

(ix) $\frac{5}{9}+4$ (x) $\frac{4}{7}+\frac{2}{3}+\frac{5}{21}$ (ix) $\frac{3}{4}+\frac{7}{12}+\frac{2}{3}$ (xii) $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$

2. निम्नलिखित को हल कीजिए:–

(i) $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}$ (ii) $\frac{6}{17}-\frac{3}{17}$ (iii) $\frac{7}{10}-\frac{3}{10}$ (iv) $\frac{11}{13}-\frac{6}{13}-\frac{2}{13}$

(v) $\frac{5}{12}-\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{3}{5}-\frac{2}{10}$ (vii) $\frac{6}{7}-\frac{2}{3}$ (viii) $\frac{5}{6}-\frac{1}{4}$

(ix) $\frac{8}{3}-\frac{5}{9}$ (x) $2-\frac{1}{7}$ (xi) $\frac{13}{7}-\frac{3}{4}-\frac{1}{14}$ (xii) $\frac{17}{24}-\frac{5}{16}-\frac{1}{3}$

3. निम्नलिखित को हल कीजिए:–

(i) $4\frac{2}{5}+2\frac{1}{5}$ (ii) $5\frac{3}{4}+2\frac{1}{6}$ (iii) $6\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}$ (iv) $4\frac{3}{4}-1\frac{5}{6}$

(v) $2\frac{7}{10}-1\frac{2}{15}$ (vi) $5-3\frac{1}{2}$ (vii) $7+\frac{7}{4}+5\frac{1}{6}$ (viii) $2\frac{1}{8}+1\frac{1}{2}-\frac{7}{16}$

(ix) $5\frac{2}{3}+6-3\frac{1}{4}$ (x) $2-\frac{7}{16}$ (xi) $6+1\frac{1}{2}$ (xii) $2\frac{5}{6}-3\frac{5}{8}+2$

4. लोहे की $6\frac{2}{3}$ मीटर लम्बी एक पाइप दो हिस्सों में काटी गयी है। एक टुकड़ा $4\frac{3}{7}$ मीटर लंबा है। दूसरे टुकड़े की लंबाई क्या है?

5. अशोक ने $\frac{7}{10}$ कि.ग्रा आम खरीदे और तरुण ने $\frac{11}{15}$ कि.ग्रा. सेब खरीदे। उन्होंने कुल कितने फल खरीदे?

6. अवि ने शनिवार को अपने घर के काम का $\frac{3}{5}$ भाग किया और उसी काम का $\frac{1}{10}$ भाग रविवार को किया। उन्होंने सप्ताह के अंतिम दो दिनों में कुल कितना काम किया?

7. चरण ने अपनी जेब खर्च का $\frac{1}{4}$ हिस्सा फ़िल्म देखने पर और $\frac{3}{8}$ हिस्सा नए पेन पर और $\frac{1}{8}$ हिस्सा पेंसिल पर खर्च किया। उसने अपनी जेब खर्च का कितना हिस्सा खर्च किया?

8. सिमर स्कूल से 4 कि.मी की दूरी पर रहता है। प्रभजोत, सिमर के स्कूल की दूरी से $\frac{2}{3}$ कि.मी दूरी पर रहता है। प्रभजोत स्कूल से कितनी दूरी पर रहता है?

5.9 एक भिन्न की पूर्ण संख्या से गुणा (Multiplication of a fraction by a whole number)

हमने अलग-अलग तरह की भिन्नों को जोड़ना और घटाना सीखा। यहाँ हम एक भिन्न की एक पूर्ण संख्या से गुणा संक्षेप में सीखेंगे। हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं में गुणा का अर्थ है बार-बार जोड़ना।

उदाहरण $4 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6 = 24$

इसी तरह, उस नियम का प्रयोग करते हुए हम एक भिन्न को एक पूर्ण संख्या से गुणा करते हैं।

आओ! एक उदाहरण लेते हैं:-

$$\frac{1}{3}\times 5 = 5\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1+1+1+1+1}{3} = \frac{5}{3}$$

अथवा हम कह सकते हैं कि $\frac{1}{3}\times 5 = 5\times\frac{1}{3} = \frac{5\times 1}{3} = \frac{5}{3}$

इस प्रकार, एक भिन्न को एक पूर्ण संख्या से गुणा करने के लिए हम भिन्न के अंश को पूर्ण संख्या से गुणा करते हैं और भिन्न का हर वैसे ही रहता है।

उदाहरण 34:- गुणा करो:-

(i) $\frac{1}{8}\times 3$ **(ii)** $\frac{5}{12}\times 4$ **(iii)** $6\times\frac{7}{10}$

हल : (i) $\frac{1}{8}\times 3 = \frac{1}{8}\times\frac{3}{1} = \frac{1\times 3}{8} = \frac{3}{8}$

(ii) $\frac{5}{12}\times 4 = \frac{5}{12}\times\frac{4}{1} = \frac{5\times 4}{12} = \frac{20}{12} = \frac{20\div 4}{12\div 4} = \frac{5}{3}$

(∵ 12 और 20 का म.स.व 4 है। सरलतम रूप में बदलें)

(iii) $6\times\frac{7}{10} = \frac{6}{1}\times\frac{7}{10} = \frac{6\times 7}{10} = \frac{42}{10} = \frac{42\div 2}{10\div 2} = \frac{21}{5}$

(∵ 42 और 10 का म.स.व 2 है। सरलतम रूप में बदलें)

5.10 एक भिन्न की एक प्राकृतिक संख्या से भाग (Division of a Fraction by a natural number)

आओ, $\frac{1}{4}$ को 3 से भाग करें।

इस आकृति को 4 समान भागों में बाँटें। अब हम प्रत्येक भाग को 3 समान भागों में बाँटते हैं। इस तरह से पूरी आकृति 12 समान भागों में बाँटी गई है।

आकृति में, दोहरा छायांकित भाग, पूरी आकृति का $\frac{1}{12}$ हिस्सा दर्शाती है।

अर्थात $\frac{1}{4}\div 3 = \frac{1}{12}$

$$\frac{1}{4}\div\frac{3}{1} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

इस प्रकार, एक भिन्न को एक प्राकृतिक संख्या से भाग करने के लिए, हम भिन्न को प्राकृतिक संख्या के उलटक्रम से गुणा करते हैं।

उदाहरण 35:- **भाग करो:-**

(i) $\frac{1}{6}$ **को 2 से** **(ii)** $\frac{2}{3}$ **को 5 से**

(iii) $\frac{2}{5}$ **को 4 से**

हल : (i) $\frac{1}{6} \div 2 = \frac{1}{6} \div \frac{2}{1} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{6 \times 2} = \frac{1}{12}$

(ii) $\frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \div \frac{5}{1} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2 \times 1}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$

(iii) $\frac{2}{5} \div 4 = \frac{2}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2 \times 1}{5 \times 4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

प्रश्नावली 5.6

1. गुणा कीजिए :-

(i) $\frac{1}{5} \times 4$ (ii) $\frac{2}{7} \times 3$ (iii) $\frac{5}{8} \times 2$ (iv) $\frac{7}{12} \times 4$ (v) $10 \times \frac{4}{5}$

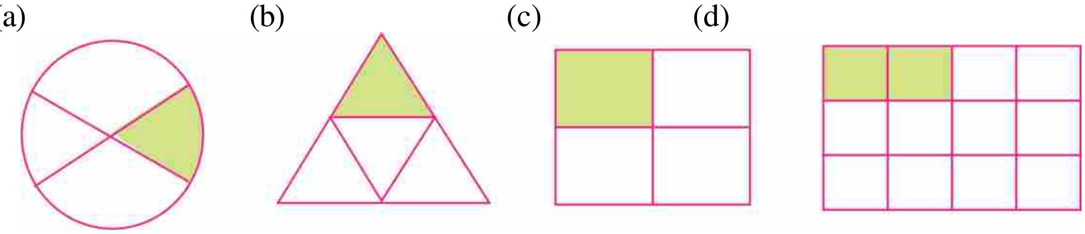
2. भाग कीजिए :-

(i) $\frac{1}{4} \div 5$ (ii) $\frac{3}{5} \div 3$ (iii) $\frac{5}{8} \div 3$ (iv) $\frac{6}{7} \div 2$ (v) $\frac{12}{15} \div 6$

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. निम्नलिखित में कौन सी उचित भिन्न नहीं है?

(a) (b) (c) (d)



2. निम्नलिखित में से कौन सी उचित भिन्न है?

(a) $\frac{5}{5}$ (b) $\frac{12}{11}$ (c) $\frac{7}{9}$ (d) 7

3. निम्नलिखित में से कौन सी विषम भिन्न है?

(a) $\frac{5}{8}$ (b) $2\frac{3}{4}$ (c) $\frac{7}{11}$ (d) $\frac{15}{16}$

4. वे भिन्नें जिनका अंश 1 होता है .... भिन्नें कहलाती है।

(a) समान (b) असमान (c) इकाई (d) उचित

5. वे भिन्नें जिनके हर समान होते हैं .... भिन्नें कहलाती हैं।

(a) उचित (b) इकाई (c) विषम (d) समान

6. अलग-अलग हर वाली भिन्नें .... भिन्नें कहलाती हैं।

(a) असमान (b) समान (c) विषम (d) इकाई

7. 8 घंटों को 1 दिन की भिन्न में दर्शाएँ:-

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{8}{1}$ (d) $\frac{1}{8}$

8. ₹ 20 का $\frac{2}{5}$ पता करो।

(a) ₹ 8 (b) ₹ 10 (c) ₹ 12 (d) ₹ 40

9. $\frac{19}{4}$ को मिश्रित भिन्न में बदलें:-

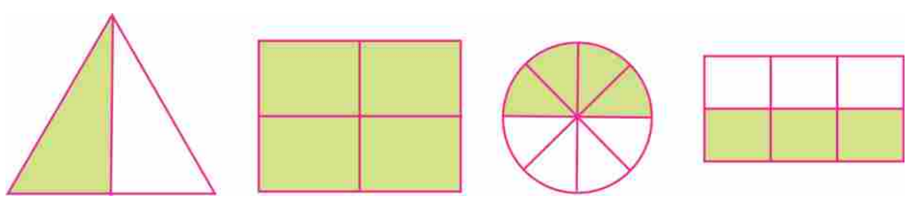
(a) $3\frac{4}{5}$ (b) $4\frac{4}{3}$ (c) $4\frac{3}{4}$ (d) $5\frac{1}{4}$

10. $7\frac{2}{3}$ = ...

(a) $\frac{17}{3}$ (b) $\frac{23}{3}$ (c) $\frac{13}{3}$ (d) $\frac{42}{3}$

11. निम्नलिखित आकृतियों में से कौन सी आकृति विषम भिन्न को दर्शाती है?

(a) (b) (c) (d)



12. कौन सी भिन्न $\frac{5}{7}$ के तुल्य है?

(a) $\frac{25}{49}$ (b) $\frac{20}{35}$ (c) $\frac{35}{49}$ (d) $\frac{35}{28}$

13. $\frac{5}{8} = \frac{20}{\square}$ में $\square$ में सही संख्या भरें:-

(a) 32 (b) 24 (c) 40 (d) 16

14. निम्नलिखित में कौन सी भिन्नें आरोही (बढ़ते) क्रम में हैं?

(a) $\frac{2}{3}, \frac{2}{7}, \frac{2}{5}$ (b) $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}$ (c) $\frac{2}{7}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}$ (d) $\frac{2}{7}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}$

15. निम्नलिखित में कौन सी भिन्नें अवरोही (घटते) क्रम में हैं?

(a) $\frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$ (b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$ (c) $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}$

16. $\frac{4}{6} + \frac{3}{6}$ = ...

(a) $\frac{7}{12}$ (b) $\frac{7}{8}$ (c) $1\frac{1}{6}$ (d) $1\frac{1}{12}$

17. $\frac{4}{9} + \frac{5}{9} - \frac{2}{9}$ = ...

(a) $\frac{7}{9}$ (b) $\frac{7}{18}$ (c) $\frac{11}{9}$ (d) $\frac{5}{9}$

18. $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ = ...

(a) $\frac{3}{9}$ (b) $\frac{5}{6}$ (c) $\frac{7}{6}$ (d) $\frac{5}{9}$

19. $4 - \frac{1}{3}$ = ...

(a) $4\frac{1}{3}$ (b) $3\frac{1}{3}$ (c) $4\frac{2}{3}$ (d) $3\frac{2}{3}$

20. $\frac{1}{6}$ को 2 से भाग करें:-

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{12}$ (c) $\frac{1}{18}$ (d) 12

सीखने के परिणाम

इस अध्याय के पूरा होने के बाद विद्यार्थी :

- अलग-अलग तरह की भिन्नें और उनके चित्र निरूपण को पहचानने के योग्य हैं।
- भिन्नों को दैनिक जीवन में प्रयोग करने योग्य हैं।
- अलग-अलग इकाइयाँ जैसे कि- रुपये, लंबाई और तापमान में भिन्नों का प्रयोग करने के योग्य हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 5.1

1. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{4}{9}$ (iv) $\frac{5}{8}$ (v) $\frac{7}{16}$ (vi) $\frac{3}{3}$ (vii) $\frac{2}{5}$ (viii) $\frac{4}{7}$

3. (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{10}$ (iii) $\frac{1}{4}$ (iv) $\frac{5}{8}$ (v) $\frac{3}{12}$ **4.** (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{2}{11}$ (iii) $\frac{6}{7}$

5. (i) अंश = 2, हर = 3 (ii) अंश = 1, हर = 4

(iii) अंश = 5, हर = 11 (iv) अंश = 9, हर = 13

(v) अंश = 17, हर = 16

6. (i) $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{40}{60}$ या $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{15}{24}$ या $\frac{5}{8}$ (iv) $\frac{2}{12}$ या $\frac{1}{6}$ (v) $\frac{45}{100}$ या $\frac{9}{20}$

7. (i) $\frac{12}{25}$ (ii) $\frac{9}{25}$ (iii) $\frac{8}{25}$ **8.** $\frac{24}{42}$ या $\frac{4}{7}$, $\frac{18}{42}$ या $\frac{3}{7}$ **9.** $\frac{6}{13}, \frac{7}{13}$

10. (i) $\frac{2}{10}$ या $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{3}{10}$ (iii) $\frac{4}{10}$ या $\frac{2}{5}$ (iv) सिद्धार्थ

11. सेब = $\frac{12}{24}$ या $\frac{1}{2}$, संतरे = $\frac{7}{24}$, अमरूद = $\frac{5}{24}$ **12.** इशमीत = 5, बलकीरत = 15

14. (i) 12 किताबें (ii) 20 पेन (iii) 6 कापियां (iv) 12 सेब (v) 21 पेंसिलें

15. (i) 18 (ii) 8 (iii) 10

16. (i) गलत (ii) सही (iii) सही (iv) सही

प्रश्नावली 5.2

1. उचित भिन्नें :- $\frac{9}{13}, \frac{6}{11}, \frac{7}{9}, \frac{2}{15}, \frac{4}{17}, \frac{7}{8}$ विषम भिन्नें :- $\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{6}$

2. (i) $5\frac{2}{5}$ (ii) $3\frac{1}{4}$ (iii) $5\frac{3}{8}$ (iv) $7\frac{2}{7}$ (v) $6\frac{2}{3}$

3. (i) $\frac{7}{3}$ (ii) $\frac{37}{7}$ (iii) $\frac{23}{5}$ (iv) $\frac{15}{4}$ (v) $\frac{77}{8}$

4. (i) $\frac{7}{3}, 2\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{13}{4}, 3\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{19}{5}, 3\frac{4}{5}$ (iv) $\frac{21}{8}, 2\frac{5}{8}$ (v) $\frac{25}{6}, 4\frac{1}{6}$

प्रश्नावली 5.3

1. (i) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$; हाँ (ii) $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{3}{9}, \frac{10}{15}$; हाँ (iii) $\frac{4}{12}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{1}{3}$; हाँ

2. (i) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20}$ (ii) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25}$

(ii) $\frac{7}{9} = \frac{14}{18} = \frac{21}{27} = \frac{28}{36} = \frac{35}{45}$ (iv) $\frac{5}{11} = \frac{10}{22} = \frac{15}{33} = \frac{20}{44} = \frac{25}{55}$

(v) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15}$

3. (i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) $\frac{3}{2}$ (v) $\frac{9}{5}$ **4.** (i) हाँ (ii) हाँ (iii) हाँ

5. (i) 42 (ii) 56 (iii) 9 (iv) 5 (v) 24

6. (i) $\frac{18}{30}$ (ii) $\frac{12}{20}$ (iii) $\frac{24}{40}$ **7.** (i) $\frac{6}{10}$ (ii) $\frac{48}{80}$ (iii) $\frac{12}{20}$

प्रश्नावली 5.4

1. $\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}$; $\frac{5}{11}, \frac{3}{11}, \frac{1}{11}$; $\frac{6}{13}, \frac{2}{13}, \frac{5}{13}; \frac{10}{13}$ **3.** $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}$

4. (i) $<$ (ii) $>$ (iii) $>$ (iv) $<$ (v) $<$

5. (i) $>$ (ii) $<$ (iii) $>$ (iv) $>$ (v) $<$

6. (i) $>$ (ii) $>$ (iii) $<$ (iv) $<$ (v) $=$

7. (i) $\frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}$ (ii) $\frac{17}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}$ (iii) $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ (iv) $\frac{5}{9}, \frac{5}{7}, \frac{5}{3}$

(v) $\frac{3}{13}, \frac{3}{11}, \frac{3}{7}$ (vi) $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}$ (vii) $\frac{2}{7}, \frac{11}{35}, \frac{13}{28}, \frac{8}{14}$ (viii) $\frac{4}{15}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{4}{9}$

(ix) $\frac{3}{16}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}$ (x) $\frac{2}{9}, \frac{7}{12}, \frac{11}{18}, \frac{5}{6}$

8. (i) $\frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{1}{9}$ (ii) $\frac{7}{11}, \frac{5}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}$ (iii) $\frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{2}{13}$ (iv) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$

(v) $\frac{2}{3}, \frac{5}{12}, \frac{5}{18}, \frac{1}{6}$ (vi) $\frac{3}{4}, \frac{11}{15}, \frac{17}{30}, \frac{9}{20}$

9. कार **10.** $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}$

प्रश्नावली 5.5

1. (i) $\frac{5}{7}$ (ii) $\frac{6}{11}$ (iii) $\frac{11}{13}$ (iv) $\frac{17}{14}$ (v) $\frac{11}{12}$ (vi) $\frac{7}{12}$ (vii) $\frac{17}{30}$

(viii) $\frac{5}{8}$ (ix) $\frac{41}{9}$ (x) $\frac{31}{21}$ (xi) 2 (xii) $\frac{14}{15}$

2. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{3}{17}$ (iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{1}{6}$ (vi) $\frac{2}{5}$ (vii) $\frac{4}{21}$

(viii) $\frac{7}{12}$ (ix) $\frac{19}{9}$ (x) $\frac{13}{7}$ (xi) $\frac{29}{28}$ (xii) $\frac{1}{16}$

3. (i) $6\frac{3}{5}$ (ii) $7\frac{11}{12}$ (iii) $9\frac{1}{6}$ (iv) $2\frac{11}{12}$ (v) $1\frac{7}{30}$ (vi) $1\frac{1}{2}$ (vii) $13\frac{11}{12}$

(viii) $3\frac{3}{16}$ (ix) $8\frac{5}{12}$ (x) $1\frac{9}{16}$ (xi) $7\frac{1}{2}$ (xii) $1\frac{5}{24}$

4. $2\frac{5}{21}$ मी. **5.** $1\frac{13}{30}$ कि.ग्रा. **6.** $\frac{7}{10}$ **7.** $\frac{3}{4}$ **8.** $3\frac{1}{3}$

प्रश्नावली 5.6

1. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{6}{7}$ (iii) $\frac{5}{4}$ (iv) $\frac{7}{3}$ (v) 8 **2.** (i) $\frac{1}{20}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{5}{24}$ (iv) $\frac{3}{7}$ (v) $\frac{2}{15}$

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. a **2.** c **3.** b **4.** c **5.** d **6.** a **7.** b **8.** a **9.** c **10.** b
11. b **12.** c **13.** a **14.** d **15.** b **16.** c **17.** a **18.** b **19.** d **20.** b

6

दशमलव
(DECIMALS)

उद्देश्य

इस अध्याय में आप सीखेंगे

(i) दशमलव स्थानों के बारे में।

(ii) दशमलव अंकों के जोड़ और घटाओ के बारे में।

(iii) लम्बाई, आयतन और भार आदि में दशमलव का प्रयोग करना।

(iv) दैनिक जीवन की समस्याओं में दशमलव का प्रयोग करना।

6.1 भूमिका (Introduction)

दशमलव शब्द, लातिनी भाषा के शब्द डैसम से लिया गया है। जिसका अर्थ है '10' है। हम दशमलव के बारे में पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं। इस कक्षा में हम दशमलव संख्याओं के स्थानीय मान सारणी से आगे दशमलव भिन्न के विस्तृत रूप और दशमलव संख्याओं के जोड़ और घटाव के बारे में पढ़ेंगे।

6.2 दशमलव संख्या (Decimal Number)

मान लो एक संख्या 2145 है। इस स्थानीय मान सारणी में इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$2145 = 2000 + 100 + 40 + 5 = 2 \times 1000 + 1\times 100 + 4\times 10 + 5 \times 1$

यह देखा गया कि स्थानीय मान सारणी में प्रत्येक स्थानीय मान अपने से दाएँ ओर के स्थानीय मान का दस गुणा है। उदाहरण के लिए, दहाई का स्थानीय मान इकाई के स्थानीय मान से 10 गुणा है। सैकड़े का स्थानीय मान, दहाई के स्थानीय मान से 10 गुणा है और हज़ार का स्थानीय मान, सैकड़े के स्थानीय मान से दस गुणा है और यह ऐसे ही आगे चलता रहता है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि जैसे जैसे हम बाएँ से दाएँ की तरफ जाते हैं तो स्थानीय मान 10 से भाग हो जाता है। यदि इस प्रक्रिया को हम संख्या 5 (ऊपर दी गई उदाहरण के अनुसार) के दायीं ओर लेकर जाएं तो उसका स्थानीय मान 5 के दाई ओर का दसवां भाग अर्थात $\frac{1}{10}$ होगा और उससे अगला स्थानीय मान सौवां भाग अर्थात $\frac{1}{100}$ और उससे अगला हज़ारवां भाग अर्थात $\frac{1}{1000}$ होगा और यह आगे इसी प्रकार चलता रहेगा।

इस प्रकार स्थानीय मान सारणी निम्नलिखित अनुसार होगी।

हज़ार	**सैकड़ा**	**दहाई**	**इकाई**	**दशांश**	**शतांश**	**हज़ारवें**
(1000)	(100)	(10)	(1)	$\left(\frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{1}{100}\right)$	$\left(\frac{1}{1000}\right)$

संख्या 5432.167 लो

हज़ार	**सैकड़ा**	**दहाई**	**इकाई**	**दशांश**	**शतांश**	**हज़ारवें**
(1000)	(100)	(10)	(1)	$\left(\frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{1}{100}\right)$	$\left(\frac{1}{1000}\right)$
5	4	3	2	1	6	7

संख्या 5432.167 को स्थानीय मान अनुसार निम्नलिखित अनुसार लिखा जा सकता है।

5432 + .167

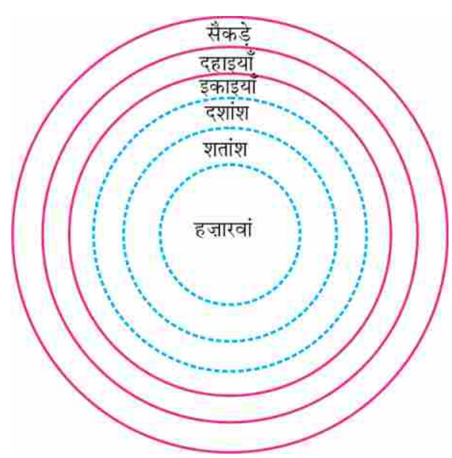
$$\underbrace{5\times1000+4\times100+3\times10+2\times1}_{\text{पूर्ण संख्या भाग}} + \underbrace{1\times\frac{1}{10}+6\times\frac{1}{100}+7\times\frac{1}{1000}}_{\text{भिन्न भाग}}$$

पूर्ण संख्या और भिन्न संख्या को अलग करने के लिए हम इनके बीच एक छोटा बिंदु लगाते हैं जो कि दशमलव कहलाता है।

इस संख्या को इस प्रकार पढ़ा जा सकता है: पाँच हज़ार चार सौ बत्तीस दशमलव एक छह सात या पाँच हज़ार चार सौ बत्तीस और एक सौ सड़सठ हज़ारवें

विद्यार्थियों, आओ! अंकों के साथ एक खेल खेलें। एक गत्ते पर कुछ समकेन्द्रिक वृत (चित्र अनुसार) बनाएँ। उसमें इकाइयाँ, दहाइयाँ, सैकड़े तथा दशांश, शतांश, हज़ारवें लिखें।

कुछ काँच की गोलियाँ लें और इन गोलियों को आराम से गत्ते पर फैंके जिस पर वृत्त बनाए गए हैं। मान लेते हैं कि गोलियाँ चित्र अनुसार स्थानीय मान वृत्तों में गिरते हैं।



अलग-अलग स्थानीय मान वाले वृत्तों में गोलियों की संख्या देखें।

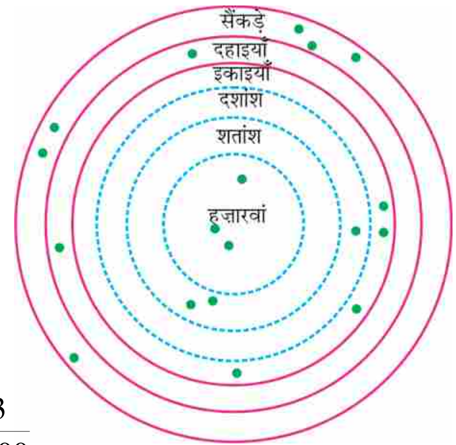
सैकड़ा मान वाले वृत्त में गोलियों की संख्या = 6

इसलिए स्थानीय मान = $6 \times 100 = 600$

दहाई मान वाले वृत्त में गोलियों की संख्या = 2

इसलिए स्थानीय मान = $2 \times 10 = 20$

इकाई मान वाले वृत्त में गोलियों की संख्या = 4



इसलिए स्थानीय मान $= 4 \times 1 = 4$

दशांश मान वाले वृत्त में गोलियों की संख्या $= 1$

इसलिए स्थानीय मान $= 1 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

शतांश मान वाले वृत्त में गोलियों की संख्या $= 2$

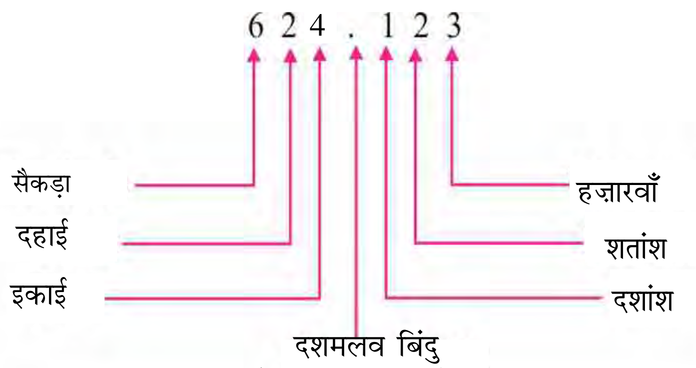
इसलिए स्थानीय मान $= 2 \times \frac{1}{100} = \frac{2}{100}$

हज़ारवें मान वाले वृत्त में गोलियों की संख्या $= 3$

इसलिए स्थानीय मान $= 3 \times \frac{1}{1000} = \frac{3}{1000}$

इस प्रकार दशमलव संख्या $= 600 + 20 + 4 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000}$

$= 624.123$



अब हम दशमलव भिन्न, दशांश, शतांश और हज़ारवें के बारे में विस्तार से पढ़ेंगे।

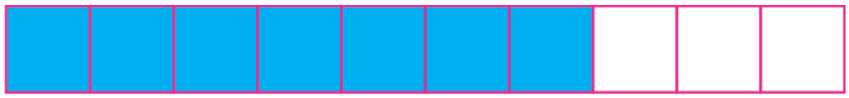
6.3 दशमलव भिन्न (Decimal Fractions)

इससे पहले वाले भाग में हमने देखा है कि दशमलव हमारी संख्या प्रणाली का ही विस्तार है। अब हम जानेंगे कि दशमलव उन भिन्नों का ही दूसरा नाम है जिनका हर 10, 100 या 1000 आदि हो। आओ सबसे पहले दशांश, शतांश और हज़ारवाँ आदि, भिन्नों को परिभाषित करें।

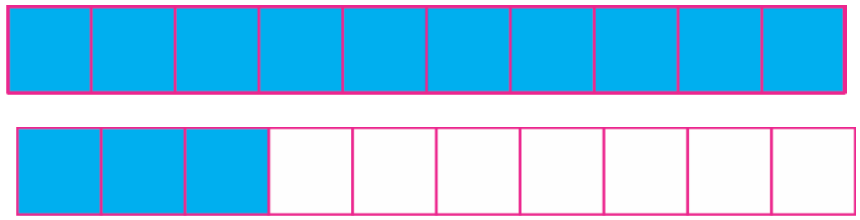
6.3.1 दशांश (Tenths)

⇒ मान लो एक आयत को दस बराबर भागों में बाँटा गया है और उसके एक भाग में रंग करो। रंगीन भाग पूरी आकृति का दसवाँ भाग दर्शाता है। इसे $\frac{1}{10}$ या .1 लिखा जाता है और एक दशांश या दशमलव एक पढ़ा जाता है।

⇒ नीचे दी गई आकृति में आयत को दस बराबर भागों में बाँटा गया है और सात भागों में रंग किया गया है। रंगीन भाग सात दशांश भाग को दर्शाता है। इसे $\frac{7}{10}$ या .7 लिखा जाता है और दशमलव सात पढ़ा जाता है।



⇒ इसी प्रकार नीचे दी गई आकृति में एक पूरी आयत और दूसरी आयत के 3 भागों में रंग किया गया है।



रंगीन भाग को $1\frac{3}{10}$ या 1.3 लिखा जाता है और एक दशमलव तीन या एक और तीन दशांश पढ़ा जाता है।

इसलिए $.1 = \frac{1}{10} = 1$ दशांश

आओ, इसकी कुछ उदाहरण दें।

उदाहरण 1: **निम्नलिखित में प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखो।**

(i) सात और तीन दशांश **(ii) दो दशांश**

(iii) चौबीस और एक दशांश

हल : (i) सात और तीन दशांश $= 7 + \frac{3}{10}$

$= 7\frac{3}{10} = 7.3$

(ii) दो दशांश $= \frac{2}{10} = .2$

(iii) चौबीस और एक दशांश $= 24\frac{1}{10} = 24.1$

उदाहरण 2: **निम्नलिखित में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखें।**

(i) $\mathbf{10 + 3 + \frac{2}{10}}$ **(ii)** $\mathbf{200 + 7 + \frac{5}{10}}$ **(iii)** $\mathbf{\frac{9}{10}}$

हल : (i) $10 + 3 + \frac{2}{10}$

यहाँ एक दहाई, तीन इकाइयां और 2 दशांश है।

$\therefore \quad 10 + 3 + \frac{2}{10} = 13 + \frac{2}{10} = 13.2$

(ii) $200 + 7 + \frac{5}{10}$

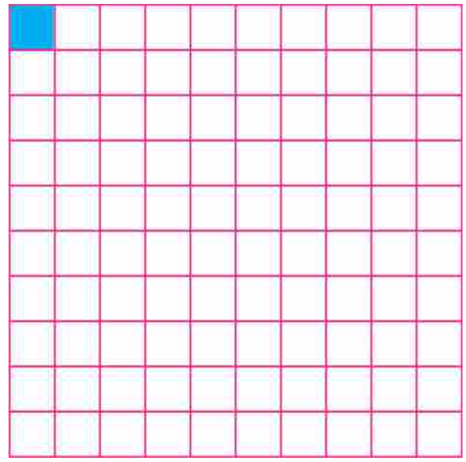
यहाँ 2 सैकड़े, 7 इकाइयां और 5 दशांश हैं।

$\therefore \quad 200 + 7 + \frac{5}{10} = 207 + \frac{5}{10} = 207.5$

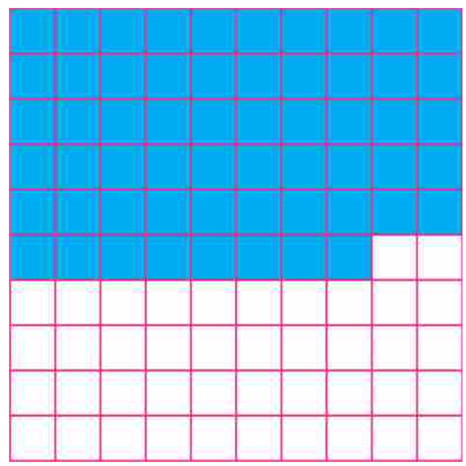
(iii) $\frac{9}{10}$, यहाँ केवल 9 दशांश हैं।

$\therefore \quad \frac{9}{10} = .9$

6.3.2 शतांश (Hundredths)

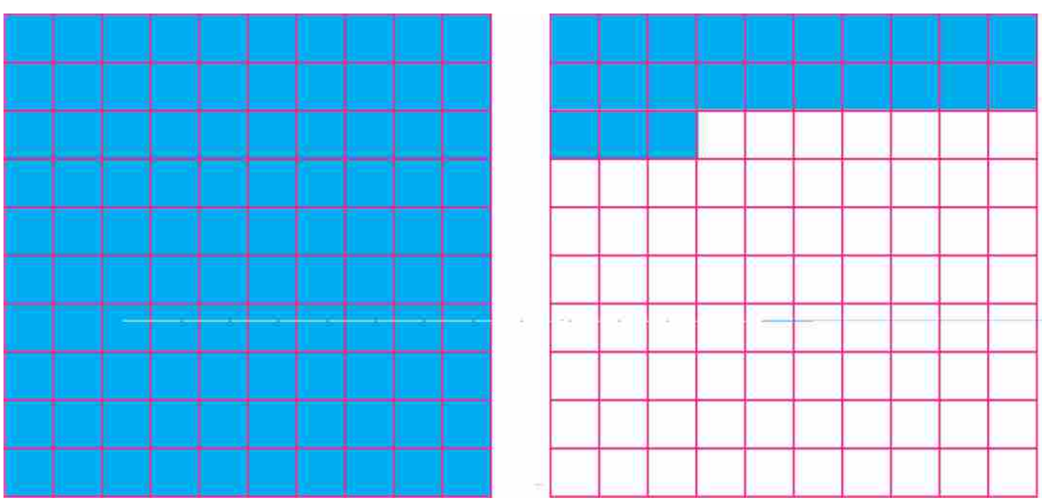


⇒ नीचे दी गई आकृति में एक वर्ग को 100 बराबर भागों में बाँटा गया है और एक भाग में रंग किया गया है। एक रंगीन भाग पूरी आकृति के एक शतांश भाग को दर्शाता है और इसे $\frac{1}{100}$ या .01 लिखा जाता है
और एक शतांश या दशमलव शून्य एक पढ़ा जाता है।



⇒ दी गई आकृति में एक वर्ग को 100 बराबर भागों में बाँटा गया है। जिसमें से 58 में रंग किया गया है। इस प्रकार रंगीन भाग अठ्ठावन शतांश का दर्शाता है और इसे $\frac{58}{100}$ या .58 लिखा जाता है और दशमलव पाँच आठ पढ़ा जाता है।

⇒ इसी प्रकार नीचे दी गई आकृति में एक पूरा वर्ग और उस प्रकार के दूसरे वर्ग के 23 भागों को रंग किया गया है। रंगीन भाग $1\frac{23}{100}$ या 1.23 लिखा जाता है। एक दशमलव दो तीन या एक और तेईस शतांश पढ़ा जाता है।



6.3.3 हज़ारवाँ (Thousandths)

यदि किसी वस्तु को हज़ार बराबर भागों में बाँटा जाए तो प्रत्येक भाग पूरी आकृति का एक हज़ारवाँ भाग है। इसे $\frac{1}{1000}$ या .001 लिखा जाता है तथा दशमलव शून्य शून्य एक पढ़ा जाता है।

- यदि हम 1000 बराबर भागों में से 19 भाग लेते हैं तो 19 भाग पूरी आकृति का $\frac{19}{1000}$ भाग बनाते हैं और इसे .019 लिखा जाता है और दशमलव शून्य एक नौ पढ़ा जाता है।

  इसी प्रकार

  $\frac{102}{1000} = .102,\ \frac{519}{1000} = .519,\ \frac{1439}{1000} = 1.439$

  $\frac{12508}{1000} = 12.508$ आदि।

दशमलव का गठन: (How to mark decimal ?)

⇒ एक भिन्न जो कि $\frac{\text{संख्या}}{10}$ के रूप में है, को संख्या के दायीं ओर से पहले अंक से पहले दशमलव लगाकर, दशमलव रूप में बनाया जा सकता है। उदाहरण के लिए:

$\frac{34}{10} = 3.4$

⇒ एक भिन्न जो कि $\frac{\text{संख्या}}{100}$ के रूप में है, को संख्या की दायीं ओर से पहले दो अंकों से पहले दशमलव लगाकर, दशमलव रूप में बनाया जा सकता है। उदाहरण के लिए:

(i) $\frac{1258}{100} = 12.58$ (ii) $\frac{6}{100} = .06$

एक भिन्न जो कि $\frac{\text{संख्या}}{1000}$ के रूप में है, को संख्या की दायीं ओर से पहले तीन अंकों से पहले दशमलव लगाकर, दशमलव रूप में बनाया जा सकता है। उदाहरण के लिए:

(i) $\frac{2345}{1000} = 2.345$ (ii) $\frac{16}{1000} = .016$

दशमलव में हमारे पास कुछ विभिन्नताएँ हैं जो कि निम्नलिखित अनुसार हैं–

(i) एक दशमलव संख्या में हमारे पास एक पूर्ण संख्या और दशमलव भाग हो सकते हैं। जैसे कि– .4, .23, 6.25 आदि

(ii) यदि एक दशमलव संख्या में केवल दशमलव भाग है तो शून्य को पूर्ण संख्या भाग लिया जा सकता है।
जैसे .3 = 0.3

.05 = 0.05 आदि।

(iii) यदि एक दशमलव संख्या में केवल पूर्ण भाग है तो शून्य को दशमलव भाग की तरह लिखा जा सकता है।

जैसे 2 = 2.0

40 = 40.0 आदि

आओ दशमलव की मूल धारणा को समझने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 3: **निम्नलिखित में से प्रत्येक को अंकों में दर्शाएं।**

(i) चौबीस दशमलव पाँच

(ii) उनहत्तर दशमलव तीन आठ

(iii) एक हज़ार बावन दशमलव शून्य सात

(iv) शून्य दशमलव छह शून्य नौ

(v) दो दशमलव शून्य शून्य एक

हल :

(i) चौबीस दशमलव पाँच = 24.5

(ii) उनहत्तर दशमलव तीन आठ = 69.38

(iii) एक हज़ार बावन दशमलव शून्य सात = 1052.07

(iv) शून्य दशमलव छह शून्य नौ = 0.609

(v) दो दशमलव शून्य शून्य एक = 2.001

उदाहरण 4: **निम्नलिखित में से प्रत्येक को संख्याओं में लिखें।**

(i) पाँच और सात दशांश

(ii) उनतीस और इकसठ शतांश

(iii) बयासी और एक सौ बावन हज़ारवें

(iv) चार शतांश

(v) सत्तर और दो हज़ारवें

हल :

(i) पाँच और सात दशांश= $5+\frac{7}{10} = 5.7$

(ii) उनतीस और इकसठ शतांश = $29 + \frac{61}{100} = 29.61$

(iii) बयासी और एक सौ बावन हज़ारवें = $82 + \frac{152}{1000} = 82.152$

(iv) चार शतांश = $\frac{4}{100} = 0.04$

(v) सत्तर और दो हज़ारवें = $70 + \frac{2}{1000} = 70.002$

उदाहरण 5: **निम्नलिखित दशमलव को स्थानीय मान सारणी बनाकर लिखें:-**

(i) 125.67 **(ii) 5.3** **(iii) 0.56**

(iv) 3.148 **(v) 10.007**

हल :

संख्या	हज़ार	सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश	हज़ारवें
125.67	–	1	2	5	6	7	–
5.3	–	–	–	5	3	–	–
0.56	–	–	–	0	5	6	–
3.148	–	–	–	3	1	4	8
10.007	–	–	1	0	0	0	7

उदाहरण 6: **निम्नलिखित दशमलव को शब्दों में लिखो–**

(i) 64.58 (ii) 0.63 (iii) 7.006 (iv) 712.05 (v) 0.725

हल : (i) 64.58 = चौसठ दशमलव पाँच आठ

या चौसठ और अठावन शतांश

(ii) 0.63 = शून्य दशमलव छः तीन

या शून्य और तिरसठ शतांश

(iii) 7.006 = सात दशमलव शून्य शून्य छः

या सात और छह हजारवें

(iv) 712.05 = सात सौ बारह दशमलव शून्य पाँच

या सात सौ बारह और पाँच शतांश

(v) 0.725 = शून्य दशमलव सात दो पाँच

या शून्य और सात सौ पच्चीस हज़ारवें

उदाहरण 7: **स्थानीय मान सारणी को देखकर दशमलव रूप में लिखें:–**

	हज़ार (1000)	सैकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$	शतांश $\left(\frac{1}{100}\right)$	हज़ारवें $\left(\frac{1}{1000}\right)$
(i)	–	5	6	0	3	4	–
(ii)	1	0	2	3	0	5	2
(iii)	2	1	5	0	0	0	6
(iv)	–	–	2	1	1	2	–
(v)	–	–	–	5	0	0	4

हल : (i) इस प्रकार $5 \times 100 + 6 \times 10 + 0 \times 1 + 3 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{1}{100}$

$$= 500 + 60 + 0 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} = 560.34$$

(ii) इस प्रकार $1 \times 1000 + 0 \times 100 + 2 \times 10 + 3\times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100} + 2\times \frac{1}{1000}$

$$= \quad 1000 + 0 + 20 + 3 + 0 + \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}$$

$$= \quad 1023.052$$

(iii) इस प्रकार $2\times 1000 + 1 \times 100 + 5 \times 10 + 0\times 1 + 0\times\frac{1}{10} + 0 \times\frac{1}{100} + 6 \times\frac{1}{1000}$

$$= \quad 2000 + 100 + 50 + 0 + 0 + 0 + \frac{6}{1000} = 2150.006$$

(iv) इस प्रकार $2\times 10 + 1 \times 1 + 1 \times \frac{1}{10} + 2\times\frac{1}{100}$

$$= \quad 20 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} = 21.12$$

(v) इस प्रकार $5 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{1}{100} + 4\times \frac{1}{1000}$

$$= \quad 5 + 0 + 0 + \frac{4}{1000} = 5.004$$

उदाहरण 8: **निम्नलिखित दशमलव को विस्तृत रूप में लिखें:-**

(i) 5.6 (ii) 2.12 (iii) 14.89 (iv) 45.067 (v) 130.008

हल :

(i) 5.6 $= 5+.6 = 5 + \frac{6}{10}$'

(ii) 2.12 $= 2 + .12 = 2 + .1 + .02$

$$= 2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$$

(iii) 14.89 $= 14 + .89$

$$= 10 + 4 + .8 + .09$$

$$= 10 + 4 + \frac{8}{10} + \frac{9}{100}$$

(iv) 45.067 $= 45 + .067$

$$= 40 + 5 + .06 + .007$$

$$= 40 + 5 + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000}$$

(v) 130.008 $= 130 + .008$

$$= 100 + 30 + \frac{8}{1000}$$

प्रश्नावली 6.1

1. निम्नलिखित को अकों में लिखें:-

(i) बहत्तर दशमलव एक चार
(ii) दो सौ सत्तावन दशमलव शून्य आठ
(iii) आठ दशमलव दो पाँच छः
(iv) पैंतालीस और तेईस शतांश
(v) छह सौ इक्कीस और दो सौ
(vi) बारह और आठ हज़ारवें

2. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं को शब्दों में लिखें:-

(i) 12.52 (ii) 7.148 (iii) 0.24 (iv) 5.018 (v) .009

3. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं को स्थानीय को स्थानीय मान सारणी में लिखें:-

(i) 21.569 (ii) 0.64 (iii) 3.51 (iv) 14.087 (v) 3.002

4. निम्नलिखित संख्याओं को दशमलव रूप में लिखें:-

(i) $40 + \frac{2}{10}$
(ii) $700 + 5 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100}$
(iii) $10 + \frac{5}{100} + \frac{3}{1000}$
(iv) $\frac{7}{10} + \frac{4}{1000}$
(v) $\frac{5}{1000}$

5. स्थानीय मान सारणी को देखते हुए दशमलव रूप में लिखें:-

	हज़ार	सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश	हज़ारवें
(i)	–	5	2	4	1	2	–
(ii)	2	0	3	4	2	1	–
(iii)	–	–	6	1	0	2	3
(iv)	–	–	–	4	0	0	1
(v)	–	1	0	0	0	3	

6. निम्नलिखित दशमलव को विस्तृत रूप में लिखो:-

(i) 2.5 (ii) 18.43 (iii) 4.05 (iv) 13.123 (v) 245.456 (vi) 20.057

6.4 दशमलव और भिन्न का रूपान्तरण (Conversion of decimals and fractions)

पिछले भाग में हमने दशमलव को लिखने, पढ़ने और विस्तृत रुप से लिखने के बारे में सीखा है, अब हम दशमलव को भिन्न में तथा भिन्न को दशमलव में बदलने के बारे में सीखेंगे।

6.4.1 दशमलव को भिन्न में (Decimals into fractions)

आओ देखें 2.3 दशमलव संख्या को भिन्न के रूप में किस प्रकार लिख सकते हैं:-

$$2.3 = 2 + .3 = 2 + \frac{3}{10}$$

$$= \frac{20}{10} + \frac{3}{10} = \frac{20+3}{10} = \frac{23}{10}$$

इसलिए $2.3 = \frac{2.3}{1} = \frac{23}{10}$

$$2.3 = \frac{23}{10} = \frac{\text{बिना दशमलव संख्या}}{\text{दशमलव के स्थान पर 1 तथा उसके साथ दशमलव के बाद जितने अंक है, उतनी ही संख्या में शून्य}}$$

उदाहरण 9: **निम्नलिखित दशमलव को भिन्न में बदलें और इसे न्यूनतम रूप में लिखें:-**

(i) 2.5 (ii) 1.52 (iii) .006 (iv) 24.6 (v) 4.32

हल : (i) 2.5

$$2.5 = \frac{25}{10} = \frac{25 \div 5}{10 \div 5} = \frac{5}{2}$$ (25 तथा 10 का म.स.व. = 5)

यहाँ भिन्न का अंश दशमलव के बिना दी गई संख्या है, अर्थात 25 और दशमलव के बाद एक अंक है।

इसलिए भिन्न का हर 1 तथा इसके साथ 1 शून्य है।

(ii) 1.52

$$1.52 = \frac{152}{100} = \frac{152 \div 4}{100 \div 4}$$ (152 तथा 100 का म.स.व. = 4)

$$= \frac{38}{25}$$

यहाँ भिन्न का अंश दशमलव के बिना दी गई संख्या है, अर्थात 152 और दशमलव के बाद 2 अंक है।

इसलिए भिन्न का हर 1 तथा इसके साथ 2 शून्य है।

(iii) $.006 = \frac{6}{1000} = \frac{6 \div 2}{1000 \div 2}$ (6 तथा 1000 का म.स.व. = 2)

$$= \frac{3}{500}$$

(iv) $24.6 = \frac{246}{10} = \frac{246 \div 2}{10 \div 2}$ (246 तथा 10 का म.स.व. = 2)

$$= \frac{123}{5}$$

(v) $4.32 = \frac{432}{100} = \frac{432 \div 4}{100 \div 4}$ (432 तथा 100 का म.स.व. = 4)

$$= \frac{108}{25}$$

6.4.2 भिन्न को दशमलव में बदलना (Fractions into decimals)

जैसे कि हम पहले ही पढ़ चुके हैं कि भिन्न, जिनके हर में 10, 100 या 1000 हो, उन्हें आसानी से दशमलव में बदला जा सकता है।

उदाहरण के लिए $\frac{43}{10} = 4.3;$ $\frac{125}{100} = 1.25;$ $\frac{65}{1000} = 0.065$

$\frac{2143}{1000} = 2.143;$ $\frac{619}{100} = 6.19$ आदि।

> अर्थात् भिन्न, जिनके हर में 10, 100 या 1000 हो, उन्हें दशमलव में बदलने के लिए अंश में (दाएँ से बाएँ) दशमलव उतने अंक छोड़कर ही लगाया जाए, जितने कि हर में शून्य हैं।

परन्तु कुछ भिन्नों के हर में 10, 100 तथा 1000 के अतिरिक्त कोई और संख्या होती है, उन भिन्नों को ऐसी भिन्नों में बदला जाता है, जिनके हर 10, 100 तथा 1000 हों या उन्हें भाग विधि द्वारा दशमलव रूप में बदला जा सकता है।

इस कक्षा में हम केवल उन भिन्नों के बारे में पढ़ेंगे जिनके हर 2 या 5 या दोनों के गुणांक हों।

तुल्य भिन्न विधि (Equivalent Fractions Method)

⇒ उदाहरण के लिए $\frac{3}{5}$ लो

यहाँ हर 5 है, इसलिए इसे 10, 100 या 1000 में बदलना पड़ेगा। हम जानते हैं कि 5 को 2 से गुणा करने पर 10 प्राप्त होता है।

$$\therefore \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0.6$$

अब $\frac{5}{4}$ लो, इसका हर 4 है, इसलिए हमें 4 को 10, 100 और 1000 में बदलेंगे। हम जानते हैं कि 4 को 25 से गुणा करने पर 100 प्राप्त होता है।

$$\therefore \quad \frac{5}{4} = \frac{5 \times 25}{4 \times 25} = \frac{125}{100} = 1.25$$

भाग विधि (Division Method)

जैसे कि ऊपर दिया ढंग ऐसे हालात में मुश्किल है जब हर 8, 16 या 40 आदि हो। इसलिए हमारे पास एक दूसरी विधि भाग विधि है, जो कि बहुत आसान है।

उदाहरण के लिए $\frac{14}{5}$ लो,

हम जानते हैं कि यहाँ भाज्य = 14

और भाजक = 5

चरण 1 : 14 को 5 से भाग करने पर हम जानते हैं कि भागफल 2 और शेष 4 होगा।

चरण 2 : भाज्य में दशमलव लगाएँ और इसके दाईं तरफ शून्य लिखें।

अर्थात् 14 = 14.0

चरण 3 : 14.0 में से 0 को नीचे लेकर आएँ जिससे शेष 4, 40 बन जाए।

चरण 4 : भागफल में 2 के बाद दशमलव लगाएँ 1 अर्थात 2.

```
   2
5 ) 14 (
   – 10
     4

   2
5 ) 14.0 (
   – 10
     4

   2.8
5 ) 14.0 (
   – 10 ↓
     4 0
    –4 0
       0
```

चरण 5 : अब 40 को 5 से भाग करें, तो हमें भागफल 8 मिलता है।

अर्थात $\frac{14}{5} = 2.8$

आओ, कुछ और उदाहरण लें

उदाहरण 10: **निम्नलिखित भिन्न को तुल्य भिन्न विधि से दशमलव में बदलें।**

(i) $\frac{5}{10}$ **(ii)** $\frac{423}{100}$ **(iii)** $\frac{9}{1000}$

(iv) $\frac{15}{2}$ **(v)** $\frac{12}{25}$ **(vi)** $\frac{23}{20}$

हल : (i) $\frac{5}{10}$ = .5 या 0.5 (यहाँ हर 10 है)

(ii) $\frac{423}{100}$ = 4.23 (यहाँ हर 100 है)

(iii) $\frac{9}{1000}$ = .009 या 0.009 (यहाँ हर 1000 है)

(iv) $\frac{15}{2}$

यहाँ हर 2 है, इसको ऐसी तुल्य भिन्न जिसका हर 10 हो, में बदलने के लिए हम अंश तथा हर को 5 से गुणा करेंगे।

$$\frac{15}{2} = \frac{15\times5}{2\times5} = \frac{75}{10} = 7.5$$

(v) $\frac{12}{25}$

यहाँ हर 25 है।

$\frac{12}{25}$ को तुल्य भिन्न, जिसका हर 100 हो, में बदलने के लिए अंश तथा हर को 4 से गुणा करेंगे।

अर्थात

$$\frac{12}{25} = \frac{12\times4}{25\times4} = \frac{48}{100} = .48 \text{ or } 0.48$$

(vi) $\frac{23}{20}$

यहाँ हर 20 हैं,

को तुल्य भिन्न, जिसका हर 100 हो, में बदलने के लिए अंश तथा हर को 5 से गुणा करेंगे।

अर्थात $\frac{23}{20} = \frac{23\times5}{20\times5} = \frac{115}{100} = 1.15$

उदाहरण 11: **निम्नलिखित भिन्नों को भाग विधि द्वारा दशमलव में बदलो।**

(i) $\frac{13}{2}$ **(ii)** $\frac{34}{5}$ **(iii)** $\frac{47}{4}$ **(iv)** $\frac{21}{8}$ **(v)** $\frac{18}{25}$

हल : (i) $\frac{13}{2} = 6.5$

```
     6.5
2 ) 13.0 (
  - 12 ↓
     1 0
  -  1 0
       ×
```

(ii) $\frac{34}{5} = 6.8$

```
     6.8
5 ) 34.0 (
  - 30 ↓
     4 0
  -  4 0
       ×
```

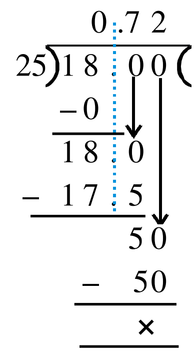
(iii) $\frac{47}{4} = 11.75$

```
     11.75
4 ) 47.00 (
  - 4
     7
  -  4
     3 0
   - 2 8
       2 0
     - 2 0
         ×
```

(iv) $\frac{21}{8} = 2.625$

```
     2.625
8 ) 21.000 (
  - 16
     5 0
  -  4 8
       2 0
     - 1 6
         4 0
       - 4 0
           ×
```

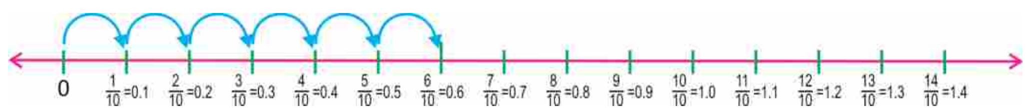
(v) $\frac{18}{25} = 0.72$



6.5 दशमलव को संख्या रेखा पर दर्शाना (Representation of Decimals on Number line)

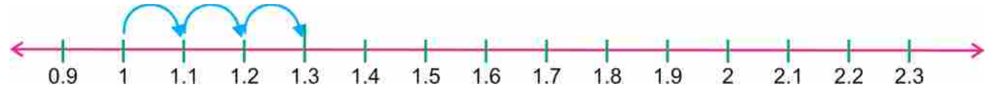
हमने प्राकृतिक संख्याओं, पूर्ण संख्याओं और भिन्नों को संख्या रेखा पर दर्शाना सीख लिया है, यहाँ हम दशमलव को संख्या रेखा पर दर्शाना सीखेंगे। दशमलव को भिन्नों की तरह ही दर्शाया जाता है।

⇒ आओ .6 या $\frac{6}{10}$ को संख्या रेखा पर दर्शाएँ। $\frac{6}{10}$ भिन्न 1 से छोटी है परन्तु 0 से बड़ी है, इसलिए हम संख्या रेखा पर 0 और 1 की दूरी को 10 बराबर भागों में बाँटेंगे और 0 से दाई ओर 6 कदम गिनेंगें।



क्योंकि $\frac{6}{10}$ = 0.6, 0.6 संख्या रेखा पर उसी बिंदु को दर्शाता है, जो कि $\frac{6}{10}$ है,

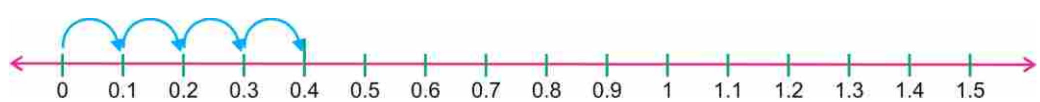
⇒ अब हम 1.3 को संख्या रेखा पर दर्शायेंगे। हम जानते हैं कि 1.3 = 1 + .3 भाव 1 + 3 दशांश 1 से अधिक हैं और 2 से कम। इसलिए हम 1 से शुरु करके दाईं ओर 3 कदम चलेंगे।



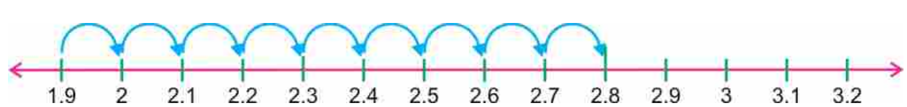
उदाहरण 12: **निम्नलिखित दशमलव को संख्या रेखा पर दर्शाओ।**

(i) 0.4 (ii) 2.8 (iii) 4.5

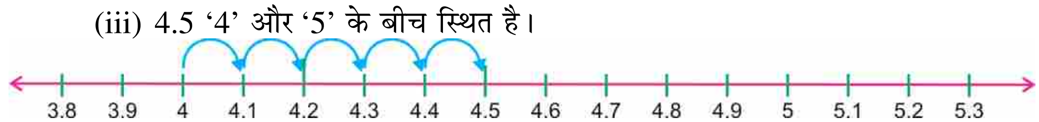
हल : (i) 0.4 '0' और '1' के बीच स्थित है।



(ii) 2.8 '2' और '3' के बीच स्थित है।.



(iii) 4.5 '4' और '5' के बीच स्थित है।



6.6 समान और असमान दशमलव (Like and unlike decimals)

जैसे कि हम जानते हैं कि किसी दशमलव संख्या के दशमलव भाग में अंकों की संख्या दशमलव स्थान बताती है।

उदाहरण के लिए $\Rightarrow$ 5.34 के दो दशमलव स्थान हैं।

$\Rightarrow$ 4.156 के तीन दशमलव स्थान हैं।

$\Rightarrow$ 42.01 के दो दशमलव स्थान हैं।

समान दशमलव (Like Decimals) : वो दशमलव जिनमें दशमलव स्थानों की संख्या बराबर होती है वे समान दशमलव कहलाते हैं। उदाहरण के लिए 2.56, 42.01, 1.68,2.30 समान दशमलव हैं, जिनमें प्रत्येक के दो दशमलव स्थान है।

असमान दशमलव (Unlike Decimals): वो दशमलव जिनमें दशमलव स्थानों की संख्या बराबर नहीं होती, वे असमान दशमलव कहलाते हैं। उदाहरण के लिए 2.1, 3.14, 42.356 असमान दशमलव हैं जिनमें एक, दो, तीन दशमलव स्थान हैं

अब, असमान दशमलव को दशमलव संख्या के साथ अंत में शून्य लगा कर समान दशमलव में बदलो ताकि प्रत्येक दशमलव बिंदु के बाद अंकों की संख्या समान हो।

जैसे कि 2.1 = 2.100 ; 3.14 = 3.140; 42.356 समान दशमलव हैं।

दशमलव के दाई ओर अंत में शून्य लिखने से इसका मूल्य नहीं बदलता।

जैसे कि 2.5 = 2.50 = 2.500

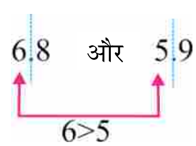
6.7 दशमलवों की तुलना करना (Comparing Decimals)

दशमलवों की तुलना करने के लिए निम्नलिखित चरण अपनाए जाते हैं:

चरण 1 : असमान दशमलवों को समान दशमलवों मे बदलो।

चरण 2 : संख्या के पूर्ण भाग की तुलना करो, जिस संख्या का पूर्ण भाग अधिक है, वह दशमलव संख्या बड़ी है।

उदाहरण



यहाँ 6 और 5 क्रमशः दशमलव की पूर्ण संख्याएँ है और 6>5

$\therefore$ 6.8 > 5.9

चरण 3 : यदि संख्या का पूर्ण भाग बराबर है तो दसवें भाग के अंकों की तुलना करो। जिस दशमलव संख्या का पूर्ण भाग बड़ा है, वह दशमलव संख्या बड़ी है।

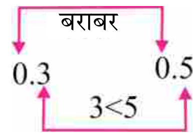
उदाहरण 1: 0.3 और 0.5 की तुलना करो।

$0.3 = \frac{3}{10}$ भाव 10 में से 3 भागों का रंग किया गया है।

और $0.5 = \frac{5}{10}$ भाग 10 में से 5 भागों को रंग किया गया है।

∴ 0.5 > 0.3

जैसे कि



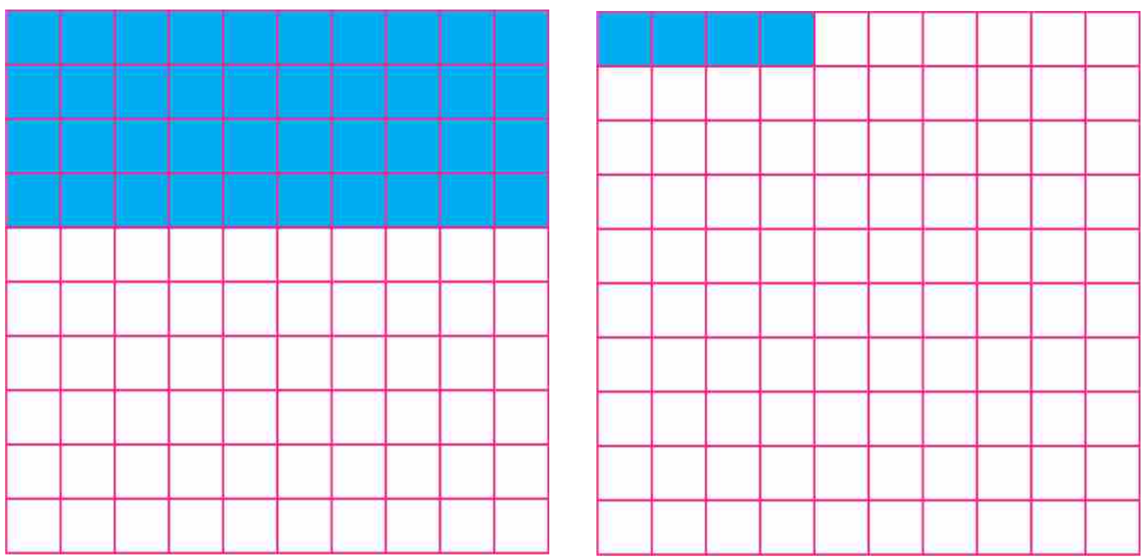
∴ 0.3 < 0.5 or 0.5 > 0.3

(ii) अब 0.4 और 0.04 की तुलना करो

$0.4 = \frac{4}{10} = \frac{40}{100}$ भाव 100 में से 40 भागों में रंग किया गया।

और $0.04 = \frac{4}{100}$ भाव 100 में से 4 भागों में रंग किया गया है।

अब 40 > 4



इसलिए $\frac{40}{100} > \frac{4}{100}$ अथवा = 0.4 > 0.04

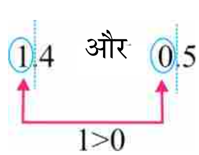
चरण 4 : यदि दसवें भाग में अंक समान हैं तो सौवें भाग के अंकों की तुलना करो और इसी क्रम में चलता रहेगा।

उदाहरण 2: **कौन सा बड़ा है?**

(i) 1.4 और 0.5 **(ii) 3.18 और 13.28**

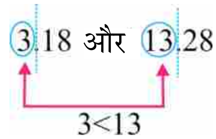
(iii) 4.3 और 4.03 **(iv) 5.168 और 5.169** **(v) 24.3 और 24.31**

हल : (i)



क्योंकि 1>0, इसलिए 1.4 > 0.5

(ii)



क्योंकि 3<13, इसलिए 3.18 < 13.28

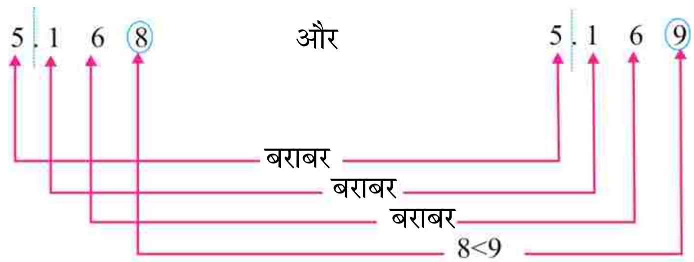
(iii)

(4.3 को 4.30 में बदलें)

क्योंकि पूर्ण भाग बराबर हैं, इसलिए दसवें भाग के अंकों की तुलना करें 3 > 0

⇒ 4.3 > 4.03

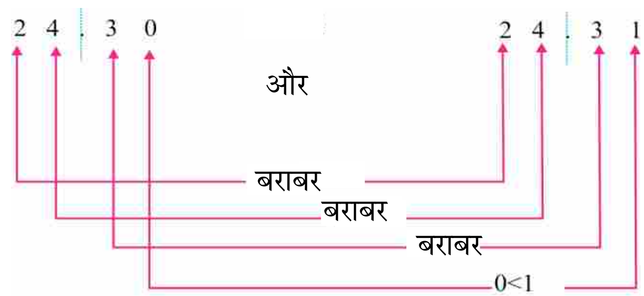
(iv)



हज़ारवें भाग के अंकों की तुलना करने पर 8<9.

⇒ 5.169>5.168

(v)



सौवें भाग के अंकों की तुलना करने पर 0<1

⇒ 24.31> 24.3

प्रश्नावली 6.2

1. निम्नलिखित दशमलव को भिन्न में बदलो और उन्हें न्यूनतम रूप में लिखो।

(i) 1.4 (ii) 2.25 (iii) 18.6 (iv) 4.04 (v) 21.6

2. निम्नलिखित भिन्नों को दशमलव में बदलों:

(i) $\frac{7}{100}$ (ii) $\frac{12}{10}$ (iii) $\frac{215}{100}$ (iv) $\frac{18}{1000}$ (v) $\frac{245}{10}$

3. निम्नलिखित भिन्नों को समान भिन्न विधि से दशमलव में बदलों।

(i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{28}{5}$ (iv) $\frac{135}{20}$ (v) $\frac{17}{4}$

4. निम्नलिखित भिन्नों को लम्बी भाग विधि से दशमलव में बदलों।

(i) $\frac{17}{2}$ (ii) $\frac{33}{4}$ (iii) $\frac{76}{5}$ (iv) $\frac{24}{25}$ (v) $\frac{5}{8}$

5. निम्नलिखित दशमलवों को संख्या रेखा पर दर्शाओ।

(i) 0.7 (ii) 1.6 (iii) 3.7 (iv) 6.3 (v) 5.4

6. दिए गए दशमलवों के बीच 3 दशमलव संख्याएँ लिखें:

(i) 1.2 और 1.6 (ii) 2.8 और 3.2

(iii) 5 और 5.5

7. कौन सी संख्या बड़ी है:

(i) 0.4 या 0.7 (ii) 2.6 या 2.5 (iii) 1.23 या 1.32

(iv) 12.3 या 12.4 (v) 18.35 या 18.3 (vi) 12 या 1.2

(vii) 5.06 या 5.061 (viii) 2.34 या 23.3 (ix) 13.08 या 13.078

(x) 2.3 या 2.03

8. दिए दशमलवों को आरोही क्रम में लिखो:-

(i) 2.5, 2, 1.8, 1.9 (ii) 3.4, 4.3, 3.1, 1.3

(iii) 1.24, 1.2, 1.42, 1.8

9. दिए दशमलवों को अवरोही क्रम में लिखो:-

(i) 4.1, 4.01, 4.12, 4.2 (ii) 1.3, 1.03, 1.003, 13

(iii) 8.02, 8.2, 8.1, 8.002

6.8 दैनिक जीवन में दशमलव का प्रयोग (Use of decimals in daily life)

दशमलव हमारे दैनिक जीवन में धन, भार, घनत्व आदि के रूप में बहुत महत्वपूर्ण है। इस भाग में हम दशमलव के दैनिक जीवन के भिन्न-भिन्न क्षेत्रों में प्रयोग के बारे में सीखेंगे।

6.8.1 मुद्रा (धन) (Currency or Money))

भारत में धन, रुपये और पैसों में दर्शाया जाता है

जहाँ 100 पैसे = ₹1

इसलिए 1 पैसा 1 रुपये का सौवां भाग है।

भाव 1 पैसा = ₹ $\frac{1}{100}$ = ₹ 0.01

इसी प्रकार 2 पैसे = ₹ $\frac{2}{100}$ = ₹0.02

5 पैसे = ₹ $\frac{5}{100}$ = ₹0.05

45 पैसे = ₹ $\frac{45}{100}$ = ₹0.45

आओ, कुछ उदाहरण लें:

उदाहरण 14: **नीचे लिखे धन को दशमलव का प्रयोग करके रुपयों में बदलों:-**

(i) 60 पैसे (ii) 125 पैसे (iii) 5 रुपये 50 पैसे

(iv) 18 रुपये 99 पैसे (v) 25 रुपये 5 पैसे

हल : (i) 60 पैसे = ₹ $\frac{60}{100}$ = ₹0.60 (∵ 1 पैसा = ₹ $\frac{1}{100}$)

(ii) 125 पैसे = ₹ $\frac{125}{100}$ = ₹1.25 (∵ 1 पैसा = ₹ $\frac{1}{100}$)

(iii) 5 रुपये 50 पैसे

= (5 रुपये) + (50 पैसे)

= 5 +₹ $\frac{50}{100}$ = ₹5 + ₹0.50 = ₹ 5.50 (∵ 1 पैसा = ₹ $\frac{1}{100}$)

(iv) 18 रुपये 99 पैसे

= 18 रुपये + 99 पैसे

= ₹18 + ₹ $\frac{99}{100}$ (∵ 1 पैसा = ₹ $\frac{1}{100}$)

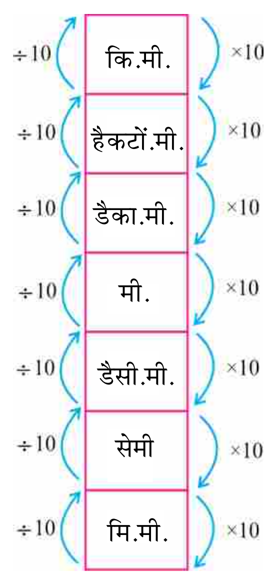
= ₹18 + ₹0.99 = ₹18.99

(v) 25 रुपये 5 पैसे

= 25 रुपये + 5 पैसे

= 25 + ₹ $\frac{5}{100}$ (∵ 1 पैसा = ₹ $\frac{1}{100}$)

= ₹25 + ₹0.05 = ₹25.05



6.8.2 लम्बाई या दूरी (Length or Distance)

सेंटीमीटर को मीटर में बदलना

हम जानते हैं कि 100 सेमी = 1मी

1सेमी = $\frac{1}{100}$ मी = 0.01मी

इसी प्रकार 2 सेमी = $\frac{2}{100}$ मी = 0.02मी

7 सेमी $= \frac{7}{100}$ मी $= 0.07$मी

35 सेमी $= \frac{35}{100}$ मी $= 0.35$मी

उदाहरण 15: **दशमलव का प्रयोग करके मीटर में बदलों**

(i) 4 सेमी (ii) 185 सेमी (iii) 3मी 32 सेमी

हल : (i) 4 सेमी $= \frac{4}{100}$ मी $= 0.04$मी. ($\because$ 1 सेमी. $= \frac{1}{100}$ मी)

(ii) 185सेमी. $= \frac{185}{100}$ मी $= 1.85$मी. ($\because$ 1सेमी. $= \frac{1}{100}$ मी)

(ii) 3मी 32सेमी. = 3मी + 32सेमी.

$=$ 3मी $+ \frac{32}{100}$ मी ($\because$ 1सेमी. $= \frac{1}{100}$ मी)

$=$ 3मी + 0.32मी = 3.32मी

मिलीमीटर को सैंटीमीटर में बदलना

हम जानते हैं कि 10मिमी= 1 सेमी.

$\Rightarrow$ 1मि.मी. $= \frac{1}{10}$ सैं.मी. $= 0.1$ सेमी.

इसी प्रकार 3मि.मी. $= \frac{3}{10}$ सेमी. $= 0.3$सेमी.

8मि.मी. $= \frac{8}{10}$ सेमी. $= 0.8$सेमी.

उदाहरण 16: **दशमलव का प्रयोग करके सेंटीमीटर में लिखो:-**

(i) 5मि.मी. (ii) 28मि.मी. (iii) 5सैं.मी. 3मि.मी.

हल : (i) 5मि.मी. $= \frac{5}{10}$ सेमी. $= 0.5$सेमी. (1मि.मी. $= \frac{1}{10}$ सेमी.)

(ii) 28मि.मी. $= \frac{28}{10}$ सेमी. $= 2.8$सेमी. (1मि.मी. $= \frac{1}{10}$ सेमी.)

(iii) 5सेमी. 3मि.मी. = 5सेमी. + 3मि.मी.

$=$ 5सेमी. $+ \frac{3}{10}$ सेमी.

$= 5 + 0.3 = 5.3$सेमी.

मीटर को किलोमीटर में बदलना

- हम जानते हैं कि 1000मीटर = 1कि.मी.

$\Rightarrow$ 1मीटर $= \frac{1}{1000}$ कि.मी. $= 0.001$कि.मी.

इसी प्रकार 42मीटर $= \frac{42}{1000}$ कि.मी. $= 0.042$कि.मी.

$$180\text{मीटर} = \frac{180}{1000}\text{कि.मी.} = 0.180\text{कि.मी.}$$

उदाहरण 17: **दशमलव का प्रयोग करके किलोमीटर में बदलो**

(i) 35मीटर (ii) 1250मीटर (iii) 5 कि.मी 45मीटर

हल : (i) $35\text{मीटर} = \frac{35}{1000}\text{कि.मी} = 0.035\text{कि.मी} \quad (\therefore 1\text{मीटर} = \frac{1}{1000}\text{कि.मी})$

(ii) $1250\text{मीटर} = \frac{1250}{1000}\text{कि.मी} = 1.250\text{कि.मी} \quad (\therefore 1\text{मीटर} = \frac{1}{1000}\text{कि.मी})$

(iii) 5कि.मी 45मीटर = 5कि.मी + 45मीटर

$$= 5\text{कि.मी} + \frac{45}{1000}\text{कि.मी} \quad (\therefore 1\text{मीटर} = \frac{1}{1000}\text{कि.मी})$$

= 5कि.मी + 0.045 कि.मी = 5.045कि.मी

6.8.3. भार (Weight)

ग्रामों को किलोग्रामों में बदलना

हम जानते हैं कि 1000ग्राम = 1कि.ग्रा.

$$1\text{ग्राम} = \frac{1}{1000}\text{कि.ग्रा.} = 0.001\text{कि.ग्रा.}$$

इसी प्रकार $8\text{ग्राम} = \frac{8}{1000}\text{कि.ग्रा.} = 0.008\text{ कि.ग्रा.}$

इसी प्रकार $72\text{ग्राम} = \frac{72}{1000}\text{कि.ग्रा.} = 0.072\text{कि.ग्रा}$

$$430\text{ग्राम} = \frac{430}{1000}\text{कि.ग्रा} = 0.430\text{कि.ग्रा}$$

उदाहरण 18: **दशमलव का प्रयोग करके किलोग्राम में बदलों**

(i) 3ग्राम (ii) 765ग्राम (iii) 4कि.ग्रा 80ग्राम

हल : (i) $3\text{ग्राम} = \frac{3}{1000}\text{कि.ग्रा} = 0.003\text{कि.ग्रा} \quad (\because 1\text{ग्राम} = \frac{1}{1000}\text{कि.ग्रा})$

(ii) $765\text{ग्राम} = \frac{765}{1000}\text{कि.ग्रा} = 0.765\text{कि.ग्रा} \quad (\because 1\text{ग्राम} = \frac{1}{1000}\text{कि.ग्रा})$

(iii) 4कि.ग्रा 80ग्राम = 4कि.ग्रा + 80ग्राम

$$= 4\text{कि.ग्रा} + \frac{80}{1000}\text{कि.ग्रा} = 4\text{कि.ग्रा} + 0.080\text{ कि.ग्रा}$$

= 4.080 कि.ग्रा

6.8.4 घनत्व (Capacity)

मिलीलीटर को लीटर में बदलना

हम जानते हैं कि 1000 मि.ली. = 1लीटर

$$1 \text{ मि.ली.} = \frac{1}{1000} \text{लीटर} = 0.001\text{लीटर}$$

इसी प्रकार
$$9 \text{ मि.ली.} = \frac{9}{1000} \text{लीटर} = 0.009\text{लीटर}$$

$$65 \text{ मि.ली} = \frac{65}{1000} \text{लीटर} = 0.065\text{लीटर}$$

$$325 \text{ मि.ली.} = \frac{325}{1000} \text{लीटर} = 0.325\text{लीटर}$$

उदाहरण 19: **दशमलव का प्रयोग करके लीटर में बदलो**

(i) 50 मि.ली. (ii) 665मि.ली. (iii) 2ली. 25मि.ली.

हल :

(i) $50\text{मि.ली.} = \frac{50}{1000}$ लीटर= 0.050लीटर $\left(1\text{मि.ली.} = \frac{1}{1000}\text{लीटर}\right)$

(ii) $665\text{मि.ली.} = \frac{665}{1000}$ लीटर = 0.665लीटर $\left(1\text{मि.ली.} = \frac{1}{1000}\text{लीटर}\right)$

(iii) 2लीटर 25मि.ली. = 2लीटर + 25मि.ली.

$$= 2\text{लीटर} + \frac{25}{1000}\text{लीटर} = 2\text{लीटर} + 0.025\text{लीटर}$$

$$= 2.025\text{लीटर}$$

प्रश्नावली 6.3

1. दशमलव का प्रयोग करके रुपयों में बदलों:-

(i) 35 पैसे (ii) 4 पैसे (iii) 240 पैसे

(iv) 12 रु. 25 पैसे (v) 24 रु. 5 पैसे

2. दशमलव का प्रयोग करके मीटर में बदलों:-

(i) 5सेमी. (ii) 62सेमी. (iii) 135सेमी. (iv) 5मी. 20सेमी.

(v) 12मी. 8सेमी.

3. दशमलव का प्रयोग करके सेंटीमीटर में बदलों:-

(i) 2मि.मी. (ii) 28मि.मी. (iii) 8सेमी. 4मि.मी.

4. दशमलव का प्रयोग करके किलोमीटर में बदलों:-

(i) 7मी. (ii) 50मी. (ii) 425मी. (iv) 2475मी.

(v) 3कि.मी. 225मी.

5. दशमलव का प्रयोग करके किलोग्राम में बदलों:-

(i) 5ग्रा. (ii) 75ग्रा. (ii) 423ग्रा. (iv) 1265ग्रा.

(v) 5कि.ग्रा. 418ग्रा.

6. दशमलव का प्रयोग करके लीटर में बदलो:–

(i) 2मिलीलीटर (ii) 80मिलीलीटर (ii) 725मिलीलीटर

(iv) 3ली. 423मि.ली. (v) 8ली. 20मि.ली

6.9 दशमलव का योग (Addition of Decimals)

दशमलव का योग पूर्ण संख्याओं के योग के समान ही है। केवल एक ही अंतर है कि योगफल प्राप्त करने से पहले हमें निश्चित करना पड़ेगा कि सारे दशमलव एक ही कॉलम में हैं। दशमलव को जोड़ने के लिए हम निम्नलिखित चरण अपनाएँगे।

चरण 1 : दशमलव स्थान को दिखाने के लिए एक दानेदार रेखा लगाएं।

चरण 2 : दशमलव को एक कॉलम में लिखें ताकि दसवें के नीचे दसवाँ, सौवें के नीचे सौवां भाग आए और इसी प्रकार आगे चलता रहे।

चरण 3 : दिए गए दशमलवों को समान दशमलवों में बदलें।

चरण 4 : जिस प्रकार हम पूर्ण संख्याओं को जोड़ते हैं, इन्हें जोड़ें।

उदाहरण 20: **निम्नलिखित को जोड़ो:–**

(i) 4.23 + 5.69 (ii) 3.15 + 4.234 (iii) 1.2 + 18.67

(iv) 2.4 + 1.35 + 24.567 (v) 13.25 + 2.4 + 18

हल : (i) हमारे पास है 4.23 + 5.69

- दशमलव बिंदु को दिखाने के लिए दानेदार रेखा बनाएँ।
- ध्यान रहे कि प्रत्येक दशमलव का दशमलव बिंदु इस रेखा पर एक दूसरे के नीचे होना चाहिए जैसे कि दिखाया गया है।
- संख्याओं को जोड़ो।
- इस प्रकार 9.92 वांछित उत्तर है।

```
   4 . 2 3
+  5 . 6 9
----------
   9 . 9 2
```

(ii) हमारे पास है 3.15 + 4.234

- दशमलव बिंदु को दिखाने के लिए दानेदार रेखा बनाओ।
- दिए दशमलवों को समान दशमलव में बदलो और जोड़ करो।
- इस प्रकार 7.384 वांछित उत्तर है।

```
   3 . 1 5 0
+  4 . 2 3 4
------------
   7 . 3 8 4
```

(iii) हमारे पास हैं 1.2 + 18.67

- दशमलव बिंदु को दिखाने के लिए दानेदार रेखा बनाओ
- दिए दशमलवों को समान दशमलवों में बदलो और जोड़ करो।
- इस प्रकार 19.87 वांछित उत्तर है।

```
   0 1 . 2 0
+  1 8 . 6 7
------------
   1 9 . 8 7
```

साधारण गल्ती:– यह साधारण गलती है जो ज्यादातर विद्यार्थी जोड़ इस प्रकार की करते हैं। यह सही नहीं है क्योंकि दशमलव बिंदु एक ही कॉलम में नहीं है। इस प्रकार की गलती को रोकने के लिए ध्यान रखो कि दशमलव बिंदु एक ऊर्ध्वाधर रेखा पर हों।

```
       1 . 2
+  1 8 . 6 7
------------
   1 8 . 7 9
```

(iv) हमारे पास है 2.4 + 1.35 + 24.567

- दशमलव बिंदु को दिखाने के लिए एक दानेदार रेखा बनाएं
- समान दशमलवों में बदलों और जोड़ो।

इस प्रकार 28.317 वांछित उत्तर हैं।

```
   0 2 . 4 0 0
   0 1 . 3 5 0
+  2 4 . 5 6 7
--------------
   2 8 . 3 1 7
```

(v) हमारे पास है 13.25 + 2.4 + 18

- दशमलव बिंदु को दिखाने के लिए एक दानेदार रेखा बनाएं
- समान दशमलवों में बदलों और जोड़ो।

	1	3	2	5
	0	2	4	0
+	1	8	0	0
	3	3	6	5

इस प्रकार 33.65 वांछित उत्तर हैं।

6.10 दशमलवों का घटाव (Subtraction of Decimals)

दशमलवों का व्यवकलन पूर्ण संख्याओं के घटाव की तरह ही है। केवल एक ही अंतर है कि घटाव करने से पहले यह यकीनी बनना पड़ेगा कि प्रत्येक दशमलव एक ही कॉलम में है। दशमलव के घटाव के लिए हम निम्नलिखित चरण अपनाएँगे।

चरण 1 : दशमलव बिंदु को दर्शाने के लिए एक दानेदार रेखा बनाएं।

चरण 2 : दशमलव एक कॉलम में लिखो ताकि दसवाँ दसवें के नीचे और सौवाँ सौवें के नीचे आए और इसी प्रकार आगे चलें।

चरण 3 : दिए गए दशमलवों को समान दशमलव में बदलो।

चरण 4 : जिस प्रकार हम पूर्ण संख्याओं को घटाते हैं, उसी प्रकार घटाओ।

आओ कुछ उदाहरण लें:–

उदाहरण 21: **दशमलवों को घटाओ:–**

(i) 14.82 – 5.97 (ii) 25.18 – 18.07 (iii) 42.3 – 15.78

(iv) 47.39 – 13.412 (v) 40 – 4.156

हल : (i) हमारे पास हैं 14.82 – 5.97

- दशमलव बिंदु को दिखाने के लिए एक दानेदार रेखा बनाओ।
- दिए गए दशमलव के दशमलव बिंदु इस रेखा पर स्थित होने चाहिए।
- संख्याओं को घटाओ। इस प्रकार 8.85 वांछित उत्तर है।

	14	8	2
–	05	9	7
	8	8	5

(ii) हमारे पास है 25.18 – 18.07

- दशमलव बिंदु को दिखाने के लिए एक दानेदार रेखा बनाओ।
- दिए गए दशमलव के दशमलव बिंदु इस रेखा पर स्थित होने चाहिए।
- संख्याओं को घटाओ। इस प्रकार 7.11 वांछित उत्तर है।

	2	5	1	8
–	1	8	0	7
		7	1	1

(iii) हमारे पास हैं 42.3 – 15.78

- दशमलव बिंदु को दिखाने के लिए एक दानेदार रेखा बनाओ।
- दिए गए दशमलव के दशमलव बिंदु इस रेखा पर स्थित होने चाहिए।
- संख्याओं को घटाओ। इस प्रकार 26.52 वांछित उत्तर है।

	4	2	3	0
–	1	5	7	8
	2	6	.5	2

(iv) हमारे पासे हैं 47.39 – 13.412

- दशमलव बिंदु को दिखाने के लिए एक दानेदार रेखा बनाओ।
- दिए गए दशमलव के दशमलव बिंदु इस रेखा पर स्थित होना चाहिए।

	4	7	3	9	0
–	1	3	4	1	2
	3	3	9	7	8

- संख्याओं को घटाओ। इस प्रकार 33.978 वांछित उत्तर है।

(ii) हमारे पासे हैं 40 – 4.156

- दशमलव बिंदु को दिखाने के लिए एक दानेदार रेखा बनाओ।
- दिए दशमलव के दशमलव बिंदु इस रेखा पर स्थित होने चाहिए।
- संख्याओं को घटाओ। इस प्रकार 35.844 वांछित उत्तर है।

```
   4 0 : 0 0 0
 – 0 4 : 1 5 6
 -------------
   3 5 : 8 4 4
```

उदाहरण 22: **(i) 12.83 को 19.672 में से घटाओ।**

(ii) 24.67 को 32 में से घटाओ।

Solution: (i)

```
   19.672
 – 12.830
 --------
    6.842
```

(ii)

```
   32.00
 – 24.67
 -------
    7.33
```

6.11 शाब्दिक समस्याएँ (Word Problems)

इस भाग में हम दैनिक जीवन में दशमलवों के जोड़ और व्यवकलन से संबंधित समस्याओं को हल करेंगे।

उदाहरण 23: **तीन थैलों में क्रमश: 45 कि.ग्रा., 38.16कि.ग्रा., और 47.258 कि.ग्रा. चावल हैं। थैलों में चावलों का कुल भार पता करो।**

हल : थैलों में चावलों का कुल भार = तीन थैलों में चावलों के भार का जोड़

```
    45.000
    38.160
  + 47.258
  --------
   130.418
```

इसलिए चावलों का कुल भार 130.418 कि.ग्रा. है।

उदाहरण 24: **मनदीप ₹86.75 की किताबें, ₹28.2 की पेंसिलें, और ₹54.25 का ज्योमैट्री बॉक्स खरीदती है। उसे कुल कितने रुपये देने होंगे?**

हल : किताबों का मूल्य = ₹ 86 .7 5

पैन्सिलों का मूल्य = ₹ 28 .2 0

ज्योमैट्री बॉक्स का मूल्य = ₹ 54 .2 5

कुल रुपए जो उसे देने होगें : ₹86.75 + ₹28.20 + ₹54.24 = ₹169.20

उसे कुल ₹169.20 रुपये देने होंगे।

उदाहरण 25: **रमन और आशीष ऊँचाई क्रमश: 1.64 मीटर और 0.98 मीटर है। आशीष रमन से कितना छोटा है?**

हल : सवाल को हल करने के लिए हम दोनों की ऊँचाई का अंतर पता करेंगे।

रमन की ऊँचाई = 1.64 मी.

आशीष की ऊँचाई = 0.98मी.

ऊँचाईयों का अंतर = 1.64मी. – 0.98मी. = 0.66मी.

इसलिए, आशीष रमन से 0.66 मी. छोटा है।

उदाहरण 26: **25 मीटर लंबे एक रिबन में से 8.2 मीटर और 5.65 मीटर लम्बे दो टुकड़े काटे गए। शेष हिस्से की लम्बाई पता करो।**

हल : दिया है रिबन की कुल लम्बाई = 25 मी.

पहले टुकड़े की लम्बाई = 8.2 मी.

दूसरे टुकड़े की लम्बाई = 5.65 मी.

दोनों टुकड़ों की कुल लम्बाई = 8.2मी. + 5.65मी. = 13.85 मी.

$\therefore$ शेष बचे हिस्से की लम्बाई = रिबन की कुल लम्बाई – दोनों टुकड़ों की लम्बाईयों का योग

= 25.00 मी. –13.85मी. = 11.15मी.

इसलिए वांछित लम्बाई 11.15 मीटर है।

प्रश्नावली 6.4

1. निम्नलिखित को हल करो।

(i) 12.15 + 4.87 (ii) 23.5 + 13.47 (iii) 12.56 + 6.234

(iv) 24.25 –13.12 (v) 18.8 – 4.26 (vi) 42.34 – 5.256

(vii) 45.4 + 13.25 + 28.68 (viii) 52.9 + 26.893 + 13.62

(ix) 42 – 27.563 (x) 64.26 – 43.589 + 13.42

(xi) 18.3 + 2.56 – 11.643 (xii) 66.5 – 13.49 – 29.712

2. (i) 21.92 को 32.683 में से घटाओ। (ii) 14.812 को 23में से घटाओ।

3. 3.412 में क्या जोड़ा जाए कि 7 प्राप्त हो?

4. खान ने ₹63.25 गणित की पुस्तक के लिए, ₹48.99 अंग्रेज़ी की पुस्तक के लिए खर्च किए। खान द्वारा किया गया कुल खर्च पता करो।

5. समर 3कि.मी. 450मी. सुबह और 2कि.मी. 585मी. शाम को चलता है। वह कुल कितनी दूरी तय करता है?

6. शीतल की जेब में ₹190.50 हैं। वह ₹123.99 का स्कूल बैग खरीदती है। अब उसके पास कुल कितनी राशि शेष है?

7. एक 18.56 मी. लम्बे रिबन को तीन भागों में काटा गया। यदि दो टुकड़ों की लम्बाई क्रमशः 8.75 मी. और 3.125 मी. है। तीसरे टुकड़े की लम्बाई पता करो।

8. वीरपाल 20 कि.ग्रा. सब्जियाँ खरीदी है। जिसमें 6कि.ग्रा. 750ग्रा. प्याज, 5कि.ग्रा. 25ग्रा. आलू और बाकी टमाटर हैं। टमाटरों का भार पता करो।

9. आशीष का स्कूल घर से 28कि.मी. दूर है। वह 14कि.मी. 250मी. दूरी बस से, 12कि.मी. 650मी. दूरी कार से और बाकी दूरी पैदल तय करता है। उस द्वारा पैदल तय की गई दूरी पता करो।

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. $3+\frac{2}{10}$ = ...

(a) 302 (b) 3.2 (c) 3.02 (d) 30.2

2. $200 + 4 + \frac{5}{10}$ = ...

(a) 24.5 (b) 204.05 (c) 204.5 (d) 24.05

3. $\frac{7}{100}$ = ...

(a) .07 (b) 700 (c) .007 (d) 7

4. $50+\frac{3}{1000}$ = ...

(a) 50.3 (b) 503000 (c) 50.0003 (d) 50.003

5. सत्तर और 4 हज़ारवें = ...

(a) 74000 (b) 70.004 (c) .00074 (d) .074

6. 2.03 का विस्तृत रुप = ...

(a) $2+\frac{3}{10}$ (b) $20+\frac{3}{10}$ (c) $2+\frac{3}{100}$ (d) $20+\frac{3}{100}$

7. 2.5 = ...

(a) $\frac{5}{2}$ (b) $\frac{25}{2}$ (c) $\frac{5}{10}$ (d) $\frac{1}{4}$

8. $\frac{13}{2}$ = ...

(a) 6 (b) 6.1 (c) 1.3 (d) 6.5

9. निम्नलिखित में कौन-सा दशमलव सबसे बड़ा है?

(a) 0.5 (b) 0.05 (c) 0.51 (d) 0.005

10. निम्नलिखित में से कौन-सा दशमलव सबसे छोटा है?

(a) 2.13 (b) .213 (c) 21.3 (d) 213

11. 75ग्रा. = ...कि.ग्रा.

(a) .075कि.गा. (b) .75कि.ग्रा. (c) 7.5कि.ग्रा. (d) 75कि.ग्रा.

12. 27मि.मी. = ...मी.

(a) .27मी. (b) 27मी. (c) 2.7मी. (d) .027मी.

13. 2.5 +4.23 = ...

(a) 4.48 (b) 6.73 (c) 4.73 (d) 6.48

14. 15 + 3.84 = ...

(a) 3.99 (b) 18.99 (c) 3.84 (d) 18.84

15. 13.5 – 4.23 = ...

(a) 2.87 (b) 7.29 (c) 9.27 (d) 9.37

16. 20 – 12.56 = ...

(a) 7.44 (b) 8.44 (c) 9.44 (d) 6.44

17. 14.8 + 2.62 – 8.4 = ...

(a) 8.02 (b) 9.12 (c) 9.02 (d) 6.44

18. 5लीटर 7मिलीलीटर = ... लीटर

(a) 5.07लीटर (b) 5.7लीटर (c) 5.70लीटर (d) 5.007लीटर

19. 12कि.ग्रा. 85ग्रा. = ... कि.ग्रा.

(a) 12.085कि.ग्रा. (b) 12.85कि.ग्रा. (c) 128.5कि.ग्रा. (d) 12.0085कि.ग्रा.

20. 235 पैसे = ...

(a) ₹235 (b) ₹23.5 (c) ₹2.35 (d) ₹.235

सीखने के परिणाम

इस अभ्यास के पूरा होने के बाद विद्यार्थी:

(i) दशमलव स्थानों को समझ के योग्य है।

(ii) दशमलव अंकों को जोड़ और घटाओ करने के योग्य है।

(iii) लम्बाई, धारण समर्था और भार आदि में दशमलव का प्रयोग करने के योग्य है।

(iv) रोज़ाना ज़िंदगी की समस्याओं के दशमलव का प्रयोग करने के योग्य है।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 6.1

1. (i) 72.14 (ii) 257.08 (iii) 8.256 (iv) 45.23 (v) 621.253
(vi) 12.008

2. (i) बारह दशमलव पांच दो या बारह और बावन शतांश

(ii) सात दशमलव एक चार आठ या सात और एक सौ अड़तालीस हज़ारवें।

(iii) दशमलव दो चार या चौबीस शतांश

(iv) पाँच दशमलव शून्य एक आठ या पांच और अठारह हज़ारवें

(v) दशमलव शून्य शून्य नौ या नौ हज़ारवें

4. (i) 40.2 (ii) 705.34 (iii) 10.053 (iv) .704 (v) .005

5. (i) 524.12 (ii) 2034.21 (iii) 61.023 (iv) 4.001 (v) 100.03

6. (i) $2+\frac{5}{10}$ (ii) $10+8+\frac{4}{10}+\frac{3}{100}$ (iii) $4+\frac{5}{100}$

(iv) $10+3+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}$ (v) $200+40+5+\frac{4}{10}+\frac{5}{100}+\frac{6}{1000}$

(vi) $20+\frac{5}{100}+\frac{7}{1000}$

प्रश्नावली 6.2

1. (i) $\frac{7}{5}$ (ii) $\frac{9}{4}$ (iii) $\frac{93}{5}$ (iv) $\frac{101}{25}$ (v) $\frac{108}{5}$

2.	(i) 0.07	(ii) 1.2	(iii) 2.15	(iv) 0.018	(v) 24.5
3.	(i) 2.5	(ii) 0.75	(iii) 5.6	(iv) 6.75	(v) 4.25
4.	(i) 8.5	(ii) 8.25	(iii) 15.2	(iv) 0.96	(v) 0.625
6.	(i) 1.3, 1.4, 1.5	(ii) 2.9, 3, 3.1	(iii) 5.1, 5.2, 5.3, 5.4		
7.	(i) 0.7	(ii) 2.6	(iii) 1.32	(iv) 12.4	(v) 18.35
	(vi) 12	(vii)5.061	(viii) 23.3	(ix) 13.08	(x) 2.3

8. (i) 1.8, 1.9, 2, 2.5 (ii) 1.3, 3.1, 3.4, 4.3 (iii) 1.2, 1.24, 1.42, 1.8

9. (i) 4.2, 4.12, 4.1, 4.01 (ii) 13, 1.3, 1.03, 1.003 (iii) 8.2, 8.1, 8.02, 8.002

प्रश्नावली 6.3

1.	(i) ₹0.35	(ii) ₹0.04	(iii) ₹2.40	(iv) ₹12.25	(v) ₹24.05
2.	(i) 0.05मी.	(ii) 0.62मी.	(iii) 1.35मी.	(iv) 5.20मी.	(v) 12.08मी.
3.	(i) 0.2 सेमी.	(ii) 2.8सेमी.	(iii) 8.4सेमी.		

4. (i) 0.007किमी. (ii) 0.050किमी. (iii) 0.425किमी.
(iv) 2.475किमी. (v) 3.225किमी.

5. (i) 0.005किग्रा. (ii) 0.075किग्रा. (iii) 0.423किग्रा.
(iv) 1.265किग्रा. (v) 5.418किग्रा.

6. (i) 0.002ली. (ii) 0.080ली. (iii) 0.725ली. (iv) 3.423ली. (v) 8.020ली.

प्रश्नावली 6.4

(1)	(i) 17.02	(ii) 36.97	(iii) 18.794	(iv) 11.13	(v) 14.54
	(vi) 37.084	(vii) 87.33	(viii) 93.413	(ix) 14.437	(x) 34.091
	(xi) 9.217	(xii) 23.298			
(2)	(i) 10.763	(ii) 8.188			

(3) (i) 3.588 **(4)** ₹ 112.24 **(5)** 6किमी. 035मी. **(6)** 66.51

(7) 6.685मी. **(8)** 8.225किग्रा. **(9)** 1किमी. 100मी.

बहुवैकल्पिक प्रश्न

(1) b	**(2)** c	**(3)** a	**(4)** d	**(5)** b
(6) c	**(7)** a	**(8)** d	**(9)** c	**(10)** b
(11) a	**(12)** c	**(13)** b	**(14)** d	**(15)** c
(16) a	**(17)** c	**(18)** d	**(19)** a	**(20)** c

S7Q9X1

7

बीजगणित

(ALGEBRA)

उद्देश्य

इस अध्याय में आप सीखेंगे

(i) चरों के बारे में।

(ii) अलग-अलग परिस्थितियों में चरों का प्रयोग।

(iii) समीकरण का मान पता करना।

(iv) दैनिक जीवन में समीकरण का व्यावहारिक प्रयोग के बारे में।

(v) बीजगणितीय व्यंजक बनाना।

7.1 भूमिका (Introduction)

हम अब तक 0, 1, 2, 3, ... अंकों का प्रयोग और चार क्रियाएँ जोड़, व्यवकलन, गुणा, विभाजन करते आ रहे हैं। गणित की यह शाखा अंकगणित कहलाती है। हमने दो आयामी और तीन आयामी आकृतियों के बारे में भी सीखा है, जिसके अध्ययन को ज्यौमेट्री (ज्यामिति) कहते हैं। यहाँ हम गणित की एक नई शाखा के बारे में पढ़ेंगे, जिसे बीजगणित कहते हैं। यह अरबी भाषा का शब्द है जिसका अर्थ है, ''टूटे हुए टुकड़ों को पास लाना।'' बीजगणित, अंकगणित के नियमों और क्रियाओं के अनुसार चलता है।

7.2 बीजगणित की प्रमुख विशेषताएँ (Main features of Algebra)

* बीजगणित की मुख्य विशेषता है कि इसमें अक्षरों का प्रयोग किया जाता है, जो कि हमें नियमों और सूत्रों को साधारण ढंग से लिखने की आज्ञा देता है।

* बीजगणित में ये अक्षर अज्ञात संख्याओं को दर्शाते हैं और इन्हें literals या चर कहा जाता है। अक्षर जैसे कि a, b, c, ... p, q, r, ... x, y, z, literals या चर कहलाते हैं। चरों को निर्धारित करने का ढंग सीखने से हम पहेलियों और दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने के सशक्त नियम विकसित करते हैं।

* क्योंकि अक्षर अंकों के लिए प्रयोग होते हैं, उन पर क्रियाएँ उसी प्रकार लागू की जा सकती हैं जैसे कि अंकों पर यह तथ्य बीजगणितीय व्यंजकों और उनकी विशेषताओं को सीखने की ओर ले जाता है।

आप देखेंगे कि बीजगणित बहुत ही मनोरंजक है और समस्या के हल के लिए उपयोगी है। आप अपना अध्ययन निम्नलिखित उदाहरणों से शुरू करते हैं।

7.3 नमूनों को पहचानना (Identiying Patterns)

माचिस की तीलियों के नमूने को देखो।

सारणी 1, 2, 3, ... त्रिभुजों को बनाने के लिए वांछित माचिस की तीलियों की गिनती को दर्शाती है।

त्रिभुजों की संख्या	1	2	3	4	5	–	–	8	–	–
माचिस की तीलियों की संख्या	3	6	9	12	15	–	–	24	–	–

यह देखा गया

1. 1 त्रिभुज $3 \times 1 = 3$ माचिस की तीलियों का प्रयोग करके बनाई गई।
2. 2 त्रिभुज $3 \times 2 = 6$ माचिस की तीलियों का प्रयोग करके बनाई गई।
3. 3 त्रिभुज $3 \times 3 = 9$ माचिस की तीलियों का प्रयोग करके बनाई गई।

इस प्रकार, वांछित माचिस की तीलियों की संख्या = 3 × त्रिभुजों की संख्या

आओ, त्रिभुजों की संख्या को अक्षर 'n' से निरूपित करें।

इस प्रकार, त्रिभुजों की n संख्या के लिए वांछित माचिस की तीलियों की संख्या के लिए साधारण नियम = $3 \times n$

यह नियम बहुत शक्तिशाली और उपयोगी है। इस नियम का उपयोग करते हुए हम नमूना बना सकते हैं या नियम बना सकते हैं। यहाँ तक कि हम 100, 500, ... त्रिभुजों के लिए माचिस की तीलियों की संख्या पता कर सकते हैं।

* n चर की एक उदाहरण है। इसका मूल्य निश्चित नहीं है। यह कुछ भी हो सकती है: 1, 2, 3, 4, ...

7.4 चर और अचर (Variables and Constants)

पिछले भाग में हमने देखा कि चर का मूल्य स्थिर नहीं है। यह कोई भी अंकगणितीय मान जैसे कि 1, 2, 3, ... प्राप्त कर सकता है। वे अक्षर जो कि अज्ञात संख्याओं के लिए होते हैं और कोई भी अंकगणितीय मान प्राप्त कर सकते हैं, चर कहलाते हैं।

आम तौर पर हम एक चर को दर्शाने के लिए छोटे अक्षरों का प्रयोग करते हैं। संख्या 0, 1, 2, 3, ... का मान निश्चित है। वे अपने चिह्न नहीं बदलते। जिनका मान निश्चित होता है, वे स्थिर अंक कहलाते हैं।

जैसे अंक, अंकगणित का आधार है, चर बीजगणित का आधार हैं।

उदाहरण 1: **यदि एक बक्से में 10 पेंसिलें हैं। आप बक्सों की संख्या के आधार पर पेंसिलों की कुल संख्या कैसे लिखोगे। बक्सों की गिनती के लिए 'n' का प्रयोग करो।**

बक्सों की संख्या	**1**	**2**	**3**	**-**	**-**	**10**	**-**	**-**	**n**
पेंसिलों की संख्या	**10×1=10**	**10×2=20**	**10×3=30**	**-**	**-**	**10×10=100**	**-**	**-**	**10n**

हल : यह देखा गया है कि बक्से में 10 पेंसिलें हैं।

2 बक्सों में $10 \times 2 = 20$ पेंसिलें हैं।

3 बक्सों में $10 \times 3 = 30$ पेंसिलें हैं।

इस प्रकार n बक्सों में पेंसिलों की संख्या = (पेंसिलों की संख्या) × (बक्सों की संख्या) = $10 \times n = 10n$

उदाहरण 2: एक विद्यालय में, प्रार्थना के लिए, एक पंक्ति में 15 विद्यार्थी खड़े होते हैं। यदि वहाँ पंक्तियों की संख्या 'x' हो, कुल विद्यार्थियों की संख्या पता करने के लिए नियम बताएँ।

पंक्तियों की संख्या	1	2	3	-	-	8	-	-	x
विद्यार्थियों की संख्या	15	30	45	-	-	120	-	-	15x

हल : सारणी से यह देखा गया कि

पंक्तियों में विद्यार्थियों की कुल संख्या

= (विद्यार्थियों की संख्या) × (पंक्तियों की संख्या)

$= 15 \times x = 15x$

उदाहरण 3: एक टेलीफ़ोन सैट पर 16 बटन हैं। टेलीफ़ोन सैटों की संख्या अनुसार बटनों की कुल संख्या पता करने के लिए नियम दें। यदि टेलीफ़ोन की संख्या को 't' से दर्शाया जाए।

हल : हम जानते हैं कि

टेलीफ़ोन सैटों में कुल बटनों की संख्या

= (एक टेलीफ़ोन सेट में बटनों की संख्या) × (टेलीफ़ोन सैटों की संख्या)

$= 16 \times t = 16t$

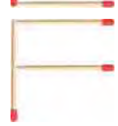
प्रश्नावली 7.1

1. नीचे दिए माचिस की तीलियों के n नमूने बनाने के लिए वांछित माचिस की तीलियों की संख्या पता करने के लिए नियम पता करो। नियम लिखने के लिए एक चर का प्रयोग करो।

(i) अक्षर T का एक नमूना जैसे कि

(ii) अक्षर E का एक नमूना जैसे कि

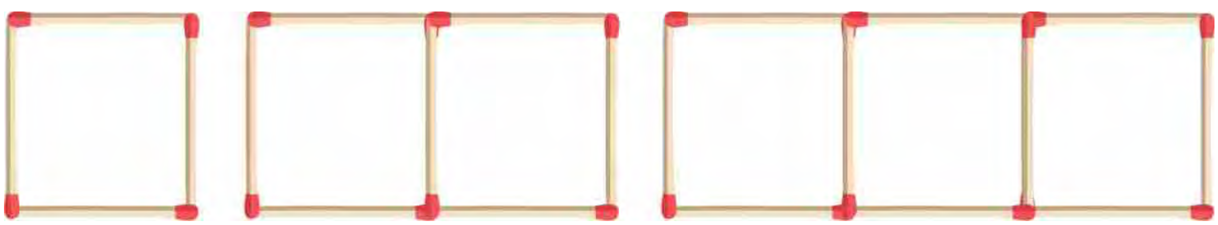
(iii) अक्षर F का एक नमूना जैसे कि



(iv) अक्षर C का एक नमूना जैसे कि

(v) अक्षर S का एक नमूना जैसे कि

2. विद्यार्थी पंक्तियों में बैठे हैं। एक पंक्ति में 12 विद्यार्थी हैं। 'n' पंक्तियों में विद्यार्थियों की संख्या बताने वाला नियम क्या है? (सारणी द्वारा पेंसिलें प्रस्तुत करें)
3. अध्यापक एक विद्यार्थी को 3 पेंसिलें बाँटता है। वह नियम क्या है जो 'a' विद्यार्थियों के लिए पेंसिलों की संख्या बता दें?
4. एक पेन स्टैंड में 8 पेन हैं। वह नियम क्या है जो पेनों की कुल कीमत बता सके यदि प्रत्येक पेन की कीमत चर 'c' द्वारा दर्शायी गई हो।
5. किरण बिन्दुओं को जोड़ कर चित्र बना रही है। एक चित्र बनाने के लिए, उसे 5 बिंदु जोड़ने पड़ते हैं। वह नियम पता करो जो बिन्दुओं की संख्या बता सके, यदि चित्रों की संख्या 'p' चिह्न द्वारा दर्शायी गई है।
6. एक दर्जन केलों की कीमत ₹ 50 है। यदि 'd' दर्जन केले हो तो केलों की कुल कीमत का नियम पता करो।
7. माचिस की तीलियों से बने हुए वर्गों के नीचे दिए नमूनों को देखो। दो संलग्न वर्गों में एक उभयनिष्ठ माचिस की तीली होने के कारण वर्ग अलग नहीं है। नमूनों को देखो और वर्गों की संख्या अनुसार माचिस की तीलियों की संख्या बताने वाला नियम पता करो।



(संकेत: यदि आप अंतिम खड़ी तीली हटाते हो तो आपको 'c' का नमूना मिलेगा।)

7.4.1 चरों पर क्रियाएँ (Operations on Literal Numbers or Variables)

क्योंकि चरों का प्रयोग संख्याओं को दर्शाने के लिए होता है, अंकों पर लागू होने वाली चार प्राथमिक क्रियाएँ उन पर लागू होती हैं।

1. **योग (Addition):-** मान लो x और y दो चर हैं तो x और y का योग $x + y$ लिखा जाता है।
2. **व्यवकलन (Subtraction):-** मान लो x और y दो चर हैं तो इन दो चरों का अंतर $x - y$ या $y - x$ लिखा जाता है।
3. **गुणा (Multiplication):-** मान लो x और y दो चर हैं तो x और y की गुणा को $x \times y$ लिखा जाता है साधारण रूप में, हम xy लिखते हैं। (क्योंकि x तथा 'X' में भ्रम की संभावना होती है।)
4. **विभाजन (Division) :-** मान लो x और y दो चर है तो x, y से विभाजित होता है तो $x \div y$ या $\frac{x}{y}$ लिखा जाता है।

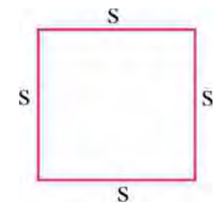
आओ, दैनिक जीवन के हालातों में चरों के प्रयोग पर विचार करें।

7.5 बीजगणित साधारणीकरण रूप में (Algebra As Generalisation)

बीजगणित को अकसर अंकगणित का साधारणीकरण रूप कहा जाता है। गणित में किसी भी नियम या सूत्र का साधारणीकरण उसे चरों के रूप में अभिव्यक्त करके किया जाता है। आओ, इसके ज्यामिति और अंकगणित में विस्तृत प्रयोग के बारे में चर्चा करें।

7.5.1 ज्यामिति (Geometry)

पिछली कक्षाओं में हमने परिमाप और क्षेत्रफल के पदों के बारे में पढ़ा। आओ, चरों के रूप में उनके साधारण नियमों के बारे में चर्चा करें।



1. वर्ग (Square):- हम जानते हैं कि एक वर्ग में समान लम्बाई की चार भुजाएँ होती हैं। मान लो प्रत्येक भुजा की लम्बाई 's' है।

परिमाप (Perimeter):-

$\therefore$ वर्ग का परिमाप = वर्ग की भुजाओं की लम्बाइयों का जोड़

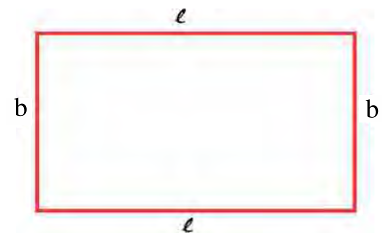
= $s + s + s + s = 4 \times s = 4s$

परिमाप को एक अलग चर 'P' से दर्शाया जा सकता है। तो वर्ग के परिमाप का साधारण नियम $P = 4s$ के रूप में दर्शाया जा सकता है।

क्षेत्रफल (Area):- क्षेत्रफल को 'A' से दर्शाया जाता है।

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

इस प्रकार, वर्ग के क्षेत्रफल का साधारण नियम $A = s \times s$ के रूप में दर्शाया जाता है। इस प्रकार, हम वर्ग के क्षेत्रफल का साधारण नियम प्राप्त करते हैं।



2. आयत (Rectangle):- एक आयत एक बंद आकृति है जिसकी चार भुजाएँ हैं। इसकी सम्मुख भुजाओं का माप बराबर होता है।

परिमाप (Perimeter):- मान लो ℓ और b आयत की लम्बाई और चौड़ाई है और P परिमाप है।

$\therefore$ आयत का परिमाप = लम्बाई + चौड़ाई + लम्बाई + चौड़ाई

इस प्रकार, हम आयत के परिमाप का साधारण नियम प्राप्त करते हैं

$P = \ell + b + \ell + b$

$= \ell + \ell + b + b$

$= 2\ell + 2b = 2(\ell + b)$

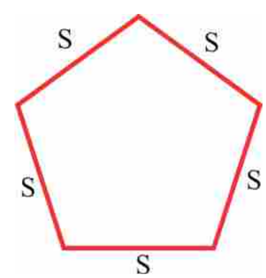
क्षेत्रफल (Area):- मान लो, A आयत का क्षेत्रफल है।

$\therefore$ आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

अर्थात $A = \ell \times b$

इस प्रकार, हम आयत के क्षेत्रफल का साधारण नियम प्राप्त करते हैं।

आओ, ज्यामिति आकृतियों की कुछ उदाहरण देखें।



उदाहरण 4: एक समपंचभुज की प्रत्येक भुजा S से दर्शाई गई है। समपंचभुज के परिमाप को S का प्रयोग करके दर्शाओ।

हल : समपंचभुज की प्रत्येक भुजा = S.

समपंचभुज का परिमाप = सभी भुजाओं की लम्बाइयों का जोड़

= $S + S + S + S + S = 5 \times S = 5S$

उदाहरण 5: एक वृत का व्यास त्रिज्या का दुगुना है। यदि दिए गए वृत का व्यास है और r इसकी त्रिज्या है। वृत के व्यास को त्रिज्या के रूप में दर्शाओ।

हल : वृत की त्रिज्या = r

हम जानते हैं कि वृत का व्यास = त्रिज्या का दुगुना = 2 × त्रिज्या

$\therefore d = 2r$

7.5.2 अंक गणित (Arithmetic) :

पूर्ण संख्याओं के अध्याय में हमने कुछ गुणों के बारे में सीखा है। यहाँ हम बीजगणित के रूप में उन्हीं गुणों की चर्चा करेंगे।

1. क्रम विनिमेयता गुण (Commutative Property):-

- **जोड़ (Addition):-** यदि जोड़ में संख्याओं का क्रम बदल दिया जाए, इससे उसका जोड़फल नहीं बदलता
  उदाहरण के लिए, 4 + 5 = 5 + 4 = 9
  यह गुण अकों के प्रत्येक समूह के लिए लागू होता है।
  इस प्रकार, हम एक साधारण नियम बना सकते हैं।
  मान लो a और b दो संख्याओं को दर्शाने वाले चर हैं। तो, इस प्रकार हमारे पास a + b = b + a, हम इस साधारण नियम को संख्याओं के प्रत्येक युग्म के लिए जाँच सकते हैं।
  उदाहरण के लिए, a = 6, b = 7 तब 6 + 7 = 7 + 6 = 13
- **गुणा (Multiplication):-** यदि गुणा में संख्याओं का क्रम बदल दिया जाए, इससे उसका गुणनफल नहीं बदलता।
  उदाहरण के लिए, 3 × 7 = 7 × 3 = 21
  यह गुण अंकों के प्रत्येक समूह के लिए लागू होता है।
  इस प्रकार, हम एक साधारण नियम बना सकते हैं।
  मान लो a और b दो संख्याओं को दर्शाने वाले चर हैं, तब a × b = b × a
  हम इस साधारण नियम को संख्याओं के प्रत्येक युग्म के लिए जाँच सकते हैं।
  उदाहरण के लिए, यदि a = 8, b = 5 तब 8 × 5 = 5 × 8 = 40

2. सहचारिता गुण (Associative Property)

- **जोड़ (Addition):-** यदि तीन संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ा जाए, तो इससे उनका जोड़फल नहीं बदलता।
  उदाहरण के लिए, (3 + 4) + 5 = 7 + 5 = 12
  3 + (4 + 5) = 3 + 9 = 12
  इस प्रकार, हम एक साधारण नियम बना सकते हैं।
  मान लो a, b और c कोई तीन चर है जो तीन संख्याओं को दर्शाते हैं, तो
  (a + b) + c = a + (b + c)
- **गुणा (Multiplication):-** यदि तीन संख्याओं को किसी भी क्रम में गुणा किया जाए, तो इससे उनका गुणनफल नहीं बदलता।
  उदाहरण के लिए, (2 × 3) × 4 = 6 × 4 = 24
  2 × (3 × 4) = 2 × 12 = 24
  इस प्रकार, हम एक साधारण नियम बना सकते हैं।
  मान लो a, b और c कोई तीन चर है जो तीन संख्याओं को दर्शाते है, तब
  a × (b × c) = (a × b) × c

3. वितरण या बंटन गुण (Distributive Property)

- **संख्याओं के जोड़फल पर गुणा (Multiplication over Addition):-** इस गुण में, दो संख्याओं की गुणा करते हुए हम बड़ी संख्या को दो संख्याओं के जोड़ के रूप में लिख लेते हैं और फिर छोटी संख्याओं से एक-एक करके गुणा करते हैं।

उदाहरण के लिए, $5 \times 53 = 5 \times 50 + 3)$

$$= 5 \times 50 + 5 \times 3 = 250 + 15 = 265$$

इस गुणा में 50 और 3 के जोड़फल पर 5 का बंटन किया गया।

यह, किन्हीं भी तीन संख्याओं के लिए हमेशा सही है। इस प्रकार, हम एक साधारण नियम बना सकते हैं। मान लो a, b और c किन्हीं तीन संख्याओं को दर्शाने वाले चर हैं, तब

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

- **संख्याओं के व्यवकलन पर गुणा (Multiplication over subtraction):-** इस गुण में, दो संख्याओं की गुणा करते हुए, हम बड़ी संख्या को दो संख्याओं के अंतर के रूप में लिख लेते हैं और फिर छोटी संख्याओं के साथ एक एक करके गुणा करते हैं।

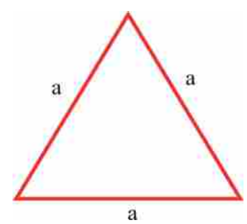
उदाहरण के लिए, $9 \times 48 = 9 \times (50 - 2)$

$$= 9 \times 50 - 9 \times 2 = 450 - 18 = 432$$

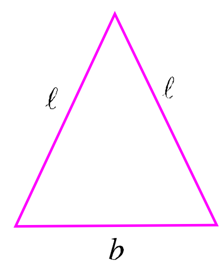
इस गुणा में 50 और 2 के अंतर पर 9 का बंटन किया गया। यह किन्हीं भी तीन संख्याओं के लिए हमेशा सही है। इस प्रकार, हम एक साधारण नियम बना सकते हैं। मान लो a, b और c कोई तीन संख्याओं को दर्शाने वाले चर हैं। तब $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

प्रश्नावली 7.2

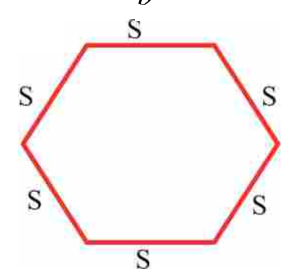
1. समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा को 'a' से दर्शाया गया है, तो त्रिभुज के परिमाप को 'a' का प्रयोग करते हुए दर्शाओ।



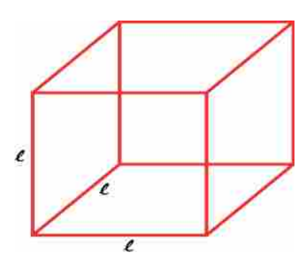
2. एक समद्विबाहु त्रिभुज दिखाई गई है। इसके परिमाप को 'ℓ' और 'b' के रूप में दर्शाओ।



3. एक समद्विबाहु की प्रत्येक भुजा 'S' से दिखाई गई है तो समषट्भुज के परिमाप को 'S' का प्रयोग करके दर्शाओ।



4. घन के 6 फलक होते हैं और ये सभी एक समान वर्ग होते हैं। यदि घन के एक किनारे की लम्बाई ℓ है, घन के सभी किनारों की कुल लम्बाई 'ℓ' के रुप में पता करो।



5. x और y चरों का प्रयोग करते हुए योग का क्रम विनिमेयता गुण लिखो।

6. *l*, m और n चरों का प्रयोग हुए गुणा का सहचारिता गुण लिखो।

7. p, q और r चरों का क्रमवार प्रयोग करते हुए संख्याओं को जोड़ पर गुणा का वितरण गुण लिखो।

7.6 बीज गणितीय व्यंजक या चरों वाले व्यंजक (Algebraic Expressions or Expressions with Variables)

अंक गणित में हम बहुत सारे व्यंजक देखते हैं, जैसे कि $(6 + 5) \times 3$, $10 + 5 \times 3 - 2$, $12 \div 4 \times 7 - 8$ आदि। ये व्यंजक संख्याओं को चार क्रियाओं भाव योग, व्यवकलन, गुणा, भाग से जोड़कर बनाए जाते हैं। ये अंक गणितीय व्यंजक या अंकों वाले व्यंजक हैं।

हम चरों के साथ भी व्यंजक बना सकते हैं उदाहरण के लिए 3a, $x - 10$, $l + 4$, $5m + 3$ आदि चरों वाले व्यंजक हैं और अंक जोड़, घटाओ, गुणा और भाग क्रियाओं द्वारा जोड़े गए हैं।

"चरों और अंकों का ऐसा समूह, जो एक या अधिक क्रियाओं के चिह्नों (+ , – × , ÷) से जुड़ा होता है, बीजगणितीय व्यंजक कहलाता है।"

बीजगणितीय व्यंजकों की कुछ उदाहरण 5*l*, 6m– 2, 4*l* + 3, x + 12, 2*l* + 3m आदि हैं। बीजगणितीय व्यंजक का (+ or –) के साथ प्रत्येक भाग इसका पद कहलाता है।

बीजगणितीय व्यंजक	पदों की संख्या	पद
7a	1	7a
15m + 12	2	15m, 12
4a +2b – 3c	3	4a, 2b, – 3c
$x^2 - 4x + 5$	3	x^2, –4x, 5

नोटः- एक महत्वपूर्ण बात हमेशा ध्यान में रखनी चाहिए कि अंकों वाले व्यंजक बड़ी आसानी से हल किए जा सकते हैं।

जैसे $5 \times 2 + 3 = 10 + 3 = 3$

परन्तु चरों वाले व्यंजक हल नहीं किए जा सकते। जैसे $4x - 3$ में x एक चर है और x का मान पता नहीं है। इसलिए यह सभी संभव है जब x का मान पता हो।

उदाहरण के लिए, यदि x = 2 तब $4x - 3 = 4 \times 2 - 3 = 8 - 3 = 5$

आओ, देखें कि बीज गणितीय व्यंजक कैसे बनते हैं:-

बीजगणितीय व्यंजक	ये कैसे बने
x + 5	x में 5 जोड़े गए।
a – 8	a में से 8 घटाए गए।
3a	a को 3 से गुणा किया गया।
$\frac{\ell}{5}$	ℓ को 5 से विभाजित किया गया।
2s + 3	पहले s को 2 से गुणा किया गया फिर 3 जोड़ा गया।

7.6.1 चरों और संख्याओं पर क्रियाएँ (Operations On Variables and Numbers)

हमनें केवल चरों या केवल संख्याओं पर क्रियाओं के बारे में सीखा है। इस भाग में चरों और अंकों दोनों पर इकट्ठी क्रियाओं के बारे में सीखेंगे, जो कि बड़ी कक्षाओं के बीजगणित में बहुत मददगार हैं।

1. **चरों और अंकों का जोड़ (Addtion of Variables and Numbers) :-** यहाँ हम चरों और अंकों के जोड़ के बारे में चर्चा करेंगे। कुछ व्यंजक निम्न अनुसार हैं:-

- x में 5 जोड़ा गया तो जोड़फल x + 5
- y में 8 जोड़ा गया तो जोड़फल y + 8
- b में a जोड़ा गया तो जोड़फल a + b

नोट:- उपरोक्त व्यंजकों को आगे हल नहीं किया जा सकता, इन्हें ऐसे ही छोड़ना पड़ता है।

उदाहरण 6: **निम्नलिखित के लिए बीजगणितीय व्यंजक लिखो:-**

(i) m में 9 जोड़ा गया (ii) x से 3 अधिक (iii) p में 10 जोड़ा गया

हल : (i) m में जोड़ा गया = m + 9

(ii) x से 3 अधिक = x + 3

(iii) p में 10 जोड़ा गया = p + 10

2. **चरों और अंकों का व्यवकलन (Subtraction of Variables and Numbers):-** यहाँ हम चरों और अंकों के व्यवकलन के बारे में चर्चा करेंगे। कुछ व्यंजक निम्नलिखित अनुसार हैं:

- a में से 3 घटाओ = a – 3
- x में से 6 घटाओ = x – 6
- 4 में से x घटाओ = 4 – x

नोट:- इन व्यंजकों को ऐसे ही छोड़ दो। ये आगे हल नहीं किए जा सकते।

उदाहरण 7: **निम्नलिखित के लिए बीज गणितीय व्यंजक लिखो:-**

(i) y में से 1 घटाओ (ii) l में से 8 कम (iii) 5 में से a घटाओ

हल : (i) y में से 1 घटाओ = y – 1

(ii) l में से 8 कम = l – 8

(iii) 5 में से a घटाओ = 5 – a

3. **चरों और अंकों की गुणा (Multiplication of Variables and Numbers):-** यहाँ हम चरों और अंकों की गुणा या गुणनफल के बारे में चर्चा करेंगे। कुछ व्यंजक निम्नलिखित अनुसार है।

- a की 3 के साथ गुणा = $a \times 3 = 3a$ (संक्षेप रुप में)
- 5 और x का गुणनफल = $5 \times x = 5x$
- m का l गुणा = $l \times m = lm$

उदाहरण 8: **निम्नलिखित के लिए व्यंजक लिखो:-**

(i) 5 की p से गुणा (ii) 4 और z का गुणनफल (iii) l का दुगुना

हल : (i) 5 की p से गुणा = $5 \times p = 5p$

(ii) 4 और z का गुणनफल = $4 \times z = 4z$

(iii) l का दुगुना = 2 गुणा $l = 2 \times l = 2l$

4. चरों और अंकों का विभाजन (Division of literals and Numbers):- यहाँ हम चरों और अंकों के विभाजन या भागफल के बारे में चर्चा करेंगे। कुछ व्यंजक निम्नलिखित अनुसार हैं:-

- b का 2 से विभाजन = $b \div 2 = \frac{b}{2}$
- y का 3 से विभाजन = $y \div 3 = \frac{y}{3}$
- l का m से भागफल = $l \div m = \frac{l}{m}$

उदाहरण 9: **निम्नलिखित के लिए व्यंजक लिखें:-**

(i) x को 8 से विभाजित किया (ii) 3 को k से विभाजित किया

(iii) a का 2 से भागफल

हल : (i) x को 8 से विभाजित किया = $x \div 8 = \frac{x}{8}$

(ii) 3 को k से विभाजित किया = $3 \div k = \frac{3}{k}$

(iii) a का 2 से भागफल = $a \div 2 = \frac{a}{2}$

अब चार प्राथमिक क्रियाओं का प्रयोग नीचे दी गई उदाहरणों से समझाया गया है।

उदाहरण 10: **निम्नलिखित व्यंजक पढ़ो और बताओ वे कैसे बने:-**

(i) $a - 8$ (ii) $l + 1$ (iii) $2m$ (iv) $\frac{a}{5}$ (v) $3z + 9$ (vi) $5p - 8$

हल :
(i) $a - 8$; a में से 8 घटाया गया।
(ii) $l + 1$; l में 1 जोड़ा गया।
(iii) $2m$; m को 2 से गुणा किया गया या m का दुगुना।
(iv) $\frac{a}{5}$; a को 5 से विभाजित किया गया।
(v) $3z + 9$; पहले z को 3 से गुणा किया गया। फिर 9 को गुणनफल में जोड़ा गया।
(vi) $5p - 8$; पहले p को 5 से गुणा किया गया। फिर गुणनफल में से 8 को घटाया गया।

उदाहरण 11: **निम्नलिखित के लिए व्यंजक लिखो:-**

(i) x में से 12 को घटाया गया।
(ii) y में 8 को जोड़ा गया।
(iii) p को – 2 से गुणा किया गया।
(iv) a को –5 से गुणा किया गया और परिणाम में 3 जोड़ा गया।
(v) ℓ को 2 से गुणा किया गया और फिर 7 से विभाजित किया गया।

हल : (i) x में से 12 को घटाया गया = $x - 12$

(ii) y में 8 को जोड़ा गया = $8 + y$ या $y + 8$

(iii) p को – 2 से गुणा किया गया = $p \times (-2) = -2p$

(iv) a को –5 से गुणा किया गया और परिणाम में 3 जोड़ा गया = $a \times (-5) + 3 = -5a + 3$

(v) ℓ को 2 से गुणा किया गया और फिर 7 से विभाजित किया गया = $(\ell \times 2) \div 7 = \frac{2\ell}{7}$

7.6.2 बीज गणितीय व्यंजकों का जीवन में प्रयोग (Use of Algebraic Expression In Life):-

पिछले भाग में, हम प्राथमिक क्रियाओं का प्रयोग करते हुए बीजगणितीय व्यंजक सीख चुके हैं। इस भाग में हम हमारे दैनिक जीवन में बीजगणितीय व्यंजकों के प्रयोग के बारे में चर्चा करेंगे। आओ, कुछ उदाहरण देखें।

उदाहरण 12: वह व्यंजक पता करो जो a से 12 अधिक है।

हल : वाँछित व्यंजक = a से 12 अधिक

= $a + 12$ या $12 + a$

उदाहरण 13: वह व्यंजक लिखो जो x से 8 कम हैं।

हल : वाँछित व्यंजक = x से 8 कम है।

= $x - 8$

उदाहरण 14: वासु की वर्तमान आयु x साल है। निम्नलिखित को बीजगणितीय रूप में दर्शाओ।

(i) 6 साल बाद वासु की आयु क्या होगी?

(ii) 3 साल पहले उसकी आयु कितनी थी?

(iii) यदि वासु की माता जी की आयु उसकी वर्तमान आयु का तीन गुणा है, तो वासु की माता जी की आयु क्या है?

(iv) यदि वासु का बड़ा भाई अंकित उससे 10 साल बड़ा है, अंकित की आयु क्या है?

(v) उसके पिता की उम्र पता करो, यदि वह वासु की वर्तमान आयु के दुगुने से 7 अधिक हैं।

हल : दिया है वासु की वर्तमान आयु = x साल

(i) 6 साल बाद वासु की आयु = $(x + 6)$ साल

(ii) 3 साल पहले वासु की आयु = $(x - 3)$ साल

(iii) वासु की माता जी की आयु = वासु की वर्तमान आयु का तीन गुणा

= $3 \times x = 3x$ साल

(iv) अंकित की आयु = वासु की वर्तमान आयु से 10 साल अधिक

= $(10 + x)$ या $(x + 10)$ साल

(v) पिता जी की आयु = वासु की वर्तमान आयु का दुगुना + 7

= $(2x + 7)$ साल

उदाहरण 15: एक कमरे की लम्बाई कमरे की चौड़ाई के 3 गुणा से 5 मीटर कम है। लम्बाई क्या है, यदि चौड़ाई b मीटर है।

हल : दिया है कमरे की लम्बाई = चौड़ाई के 3 गुणा से 5 कम

= 3 गुणा चौड़ाई – 5 = 3 × चौड़ाई – 5

= $(3b - 5)$ मीटर

प्रश्नावली 7.3

1. नीचे दिए में से बीजगणितीय और अंकगणितीय व्यंजक चुनें :–

(i) $2l - 3$ (ii) $5 \times 3 + 8$ (iii) $6 - 3x$ (iv) $5l$

(v) $2 \times (21 - 18) + 9$ (vi) $\frac{6a}{5} + 2$ (vii) $7 \times 20 \div 5 + 3$ (viii) 8

2. निम्नलिखित व्यंजकों के लिए पद लिखें:–

(i) $2y + 5z$ (ii) $6x - 3y + 8$ (iii) $7a$ (iv) $3l - 5m + 2n$ (v) $\frac{2\ell}{3} + x$

3. बताओ नीचे दिए व्यंजक कैसे बनें:–

(i) $a + 11$ (ii) $12 - x$ (iii) $3z + 8$ (iv) $6 - 5l$ (v) $\frac{5a}{4}$

4. निम्नलिखित के लिए व्यंजक लिखें:–

(i) p में 10 जोड़े गए (ii) y में से 5 घटाए गए (iii) d को 3 से भाग किया गया

(iv) l को – 6 से गुणा किया गया (v) l में से m घटाया गया (vi) 3x में 11 जोड़ा जाए

(vii) y को – 2 से गुणा किया गया और फिर परिणाम में 2 जोड़ा गया।

(viii) c को 5 से विभाजित किया गया और फिर परिणाम को 7 से गुणा किया गया

(ix) x को 3 से गुणा किया गया फिर परिणाम को y में से घटाया गया।

(x) aको b में जोड़ा गया और फिर परिणाम को c से गुणा किया गया।

5. व्यंजक लिखो जो y से 15 कम हो।

6. व्यंजक लिखो जो a से 3 ज्यादा हो।

7. व्यंजक पता करो जो x के दुगुने से 1 अधिक हो।

8. व्यंजक पता करो जो y के 5 गुने से 7 कम हो।

9. सोमी की वर्तमान आयु 'a' साल है। निम्नलिखित को बीज गणितीय रूप में लिखो।

(i) 15 साल बाद उसकी आयु

(ii) 2 साल पहले उसकी आयु

(iii) यदि सोमी के पिता जी की आयु उसकी वर्तमान आयु के दुगुने से 5 अधिक हो तो उसके पिता जी की आयु दर्शाओ।

(iv) यदि सोमी की बहन उससे 4 साल छोटी हो तो उसकी बहन की आयु दर्शाओ।

(v) यदि सोमी की माता जी की आयु उसकी वर्तमान आयु के 3 गुणा से 3 कम हो तो उसकी माता जी की आयु दर्शाओ।

10. एक फर्श की लम्बाई चौड़ाई के दुगुने से 10 अधिक है। लम्बाई क्या है? यदि चौड़ाई l मीटर है?

7.7 समीकरण क्या है? (What is an equation ?)

हमने पढ़ा है कि बीजगणितीय व्यंजकों के चर और अचर होते हैं। पिछले भाग में हमने गणितीय संख्याओं को बीजगणितीय व्यंजकों में बदलना सीखा।

• आओ, एक छोटी पहेली देखें:–

एक संख्या सोचो और 8 प्राप्त करने के लिए उसमें 5 जोड़ो। संख्या क्या है?

हम आसानी से कह सकते हैं कि संख्या 3 है। यदि हम अज्ञात संख्या के लिए चर ‘x’ का प्रयोग करते हैं तो इस पहेली को इस प्रकार लिख सकते हैं:- (अज्ञात संख्या) + 5 = 8

अर्थात $x + 5 = 8$ यह एक समीकरण है।

• आओ, निम्नलिखित कुछ कथनों पर दोबारा विचार करें।

(i) एक संख्या x में 7 बढ़ाने पर यह 12 है।

$\Rightarrow \quad x + 7 = 12$

(ii) यदि एक संख्या x में से 3 घटाया गया तो यह 10 है।

$\Rightarrow \quad x - 3 = 10$

(iii) एक संख्या l का 3 गुणा करने पर 27 प्राप्त होता है।

$\Rightarrow \quad 3l = 27$

(iv) एक संख्या ‘a’ को 2 से विभाजित करने पर 6 देता है।

$\Rightarrow \quad \frac{a}{2} = 6$

(v) संख्या p और संख्या q के 4 गुणा का जोड़फल 18 है।

$\Rightarrow \quad p + 4q = 18$

उपरोक्त में से प्रत्येक कथन बराबरी का कथन है। जब उपरोक्त ब्यानों को गणितीय रूप में लिखा गया तो (i), (ii), (iii), (iv) में एक चर और (v) में दो चर आए। उनमें से प्रत्येक एक समीकरण है।

“एक समीकरण एक गणितीय कथन है जो दो व्यंजकों में बराबरी करती है। बराबर चिह्न के बाएँ हाथ वाला व्यंजक बायाँ पक्ष (LHS) और दाएँ हाथ वाला व्यंजक दायाँ पक्ष (RHS) कहलाता है। बराबर के दोनों तरफ वाले व्यंजक समीकरण के पद कहलाते हैं।”

वह समीकरण जिनमें एक या अधिक चर (अज्ञात मूल्य) होते हैं और उनकी सबसे बड़ी घात 1 हो, रेखिक समीकरण कहलाते हैं। यहाँ, हम केवल एक चर वाले रैखिक समीकरणों के बारे में पढ़ेंगें।

उदाहरण 16: निम्नलिखित गणितीय ब्यान को बीजगणितीय समीकरण के रूप में लिखो:-

(i) a और 8 का जोड़फल 13 देता है।

(ii) एक संख्या p का दुगुना 14 देता है।

(iii) एक संख्या का एक चौथाई 16 है।

(iv) y के 3 गुणा से 5 अधिक 23 देता है।

(v) एक संख्या के चार गुणे से 2 कम 26 देता है।

हल : (i) a और 8 का जोड़फल = $a + 8$

यह 13 देता है।

$\therefore$ समीकरण $a + 8 = 13$

वैकल्पिक विधि :

a और 8 का जोड़फल = 13

$\Rightarrow \quad a + 8 = 13$

(ii) एक संख्या p का दुगुना = $2 \times p = 2p$

यह 14 है।

$\therefore$ समीकरण $2p = 14$ है।

वैकल्पिक विधि

एक संख्या p का दुगुना = 14

अर्थात $2 \times p = 14 \Rightarrow 2p = 14$

(iii) एक संख्या का एक चौथाई = 16

$\Rightarrow \frac{1}{4} \times$ (संख्या) = 16

मान लो, संख्या x है

$\therefore$ समीकरण $\frac{1}{4} \times x = 16$ है

$\Rightarrow \frac{x}{4} = 16$

(iv) y के 3 गुणा = $3 \times y = 3y$

y के 3 गुणा से 5 अधिक = $3y + 5$

यह 23 है।

$\therefore$ समीकरण $3y + 5 = 23$ है।

वैकल्पिक विधि

y के 3 गुणा से 5 अधिक = 23

अर्थात y का 3 गुणा + 5 = 23

$3 \times y + 5 = 23 \Rightarrow 3y + 5 = 23$

(v) एक संख्या के चार गुणा से 2 कम = 26

$\Rightarrow$ संख्या का 4 गुणा – 2= 26

$\Rightarrow$ 4 × (संख्या) – 2 = 26

मान लो, संख्या a है

$\therefore$ समीकरण $4 \times a - 2 = 26$

$\Rightarrow 4a - 2 = 26$

7.8 एक समीकरण का हल (Solution of an equation)

एक समीकरण का हल पता करने का अर्थ है एक संख्या पता करना जिसे समीकरण में चर के स्थान पर भरने से LHS और RHS बराबर हो जाएँ। यह संख्या जो समीकरण को संतुष्ट करती है समीकरण का हल या मान कहलाती है। एक समीकरण को हल करने के लिए, या समीकरण का हल (मान) ढूँढ़ने के लिए, हम इन विधियों का प्रयोग कर सकते हैं:-

1. प्रयत्न और भूल विधि (Trial and Error Method)
2. क्रमबद्ध विधि (Systematic Method)
3. तबदील विधि (Transposition Method)

7.8.1 प्रयत्न और भूल विधि (Trial and Error Method)

इस विधि में, समीकरण के दोनों पक्षों को बराबर करने के लिए हम चर (अज्ञात संख्या) के लिए अलग-अलग मान का प्रयोग करते हैं। जब हम एक विशेष मान प्राप्त कर लेते हैं जिससे बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष बराबर हो जाता है, यह विशेष मान समीकरण का मूल कहलाता है।

उदाहरण 17: **x + 6 = 9 हल करो।**

हल : हम बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्राप्त करने के लिए x के अलग-अलग मूल्य प्रयोग करते हैं.

x का मूल्य	बायाँ पक्ष = x + 6	दायाँ पक्ष = 9	बायाँ पक्ष = दाँया पक्ष
1	1 + 6 = 7	9	नहीं
2	2 + 6 = 8	9	नहीं
3	3 + 6 = 9	9	हाँ

उपरोक्त सारणी से हम देखते हैं कि जब x = 3 तो बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

$\therefore$ x = 3 हल है।

उदाहरण 18 : 3x – 2 = 13 हल करो।

हल : हम बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्राप्त करने के लिए x के अलग-अलग मूल्य प्रयोग करते हैं।

x का मूल्य	बायाँ पक्ष = 3x – 2	दायाँ पक्ष = 13	बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष
1	3 × 1 –2 = 3 – 2 = 1	13	नहीं
2	3 × 2 –2 = 6 – 2 = 4	13	नहीं
3	3 × 3 –2 = 9 – 2 = 7	13	नहीं
4	3 × 4 –2 = 12 – 2 = 10	13	नहीं
5	3 × 5 –2 = 15 – 2 = 13	13	हाँ

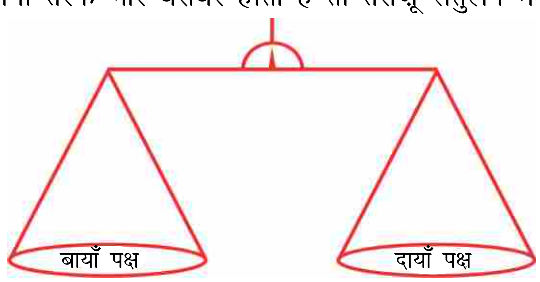
उपरोक्त सारणी से हम देखते हैं कि जब x = 5 तो बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

$\therefore$ x = 5 हल है।

7.8.2 क्रमबद्ध विधि (Systematic method)

रैखिक समीकरण को हल करने के लिए प्रयत्न और भूल विधि समय की खपत वाली हो सकती है। एक समीकरण का हल प्राप्त करने के लिए यह एक उचित विधि नहीं है।

एक समीकरण एक तराजू की तरह व्यवहार करती है। समीकरण के दोनों पक्ष उसी प्रकार बराबर होते हैं जैसे तराजू के दो पलड़े। जब दोनों तरफ भार बराबर होता है तो तराजू संतुलन में होता है।

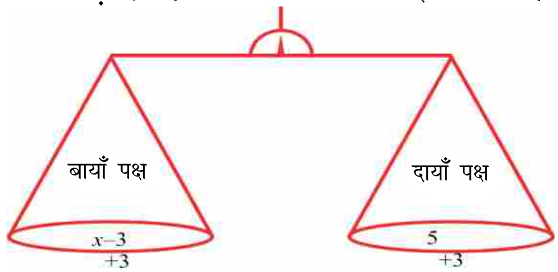


हम दोनों पलड़ों में बराबर भार जोड़ दें या दोनों पलड़ों से बराबर भार निकाल दें तब भी दोनों पलड़ें बराबर ही रहेंगे। यहाँ रैखिक समीकरण को संतुलित करने के लिए हमारे पास चार नियम (axioms) है:

नियम 1:- यदि हम समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या (मात्रा) जोड़ दे, तो भी संतुलन सही रहता है।

उदाहरण के लिए, एक समीकरण $x - 3 = 5$

यदि हम दोनों तरफ 3 जोड़ देते हैं तो समीकरण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता



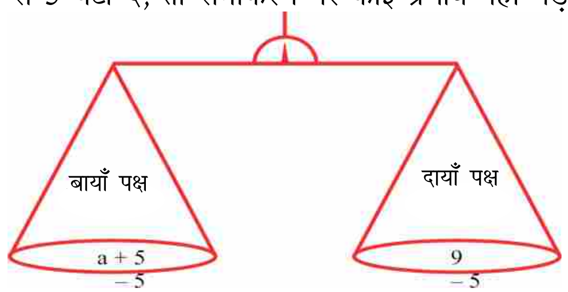
अर्थात $(x - 3) + 3 = 5 + 3$

$\Rightarrow \quad x = 8$

नियम 2:- यदि हम समीकरण के दोनों तरफ से समान संख्या घटा दें, तो भी संतुलन सही रहता है।

उदाहरण के लिए, $a + 5 = 9$

यदि हम दोनों पक्षों से 5 घटा दें, तो समीकरण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।



अर्थात $(a + 5) - 5 = 9 - 5$

$\Rightarrow \quad a = 4$

नियम 3:- यदि हम समीकरण के दोनों पक्षों के समान संख्या से गुणा करते हैं, तो भी संतुलन सही रहता है।

उदाहरण के लिए, $\frac{x}{2} = 7$

यदि हम दोनों पक्षों को 2 से गुणा करते हैं, तो समीकरण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

अर्थात $\frac{x}{2} \times 2 = 7 \times 2$

$\Rightarrow \quad x = 14$

नियम 4:- यदि हम समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही संख्या से विभाजित करते हैं, तो भी संतुलन सही रहता है।

उदाहरण के लिए, $7l = 21$

यदि हम दोनों पक्षों को 7 से भाग करते हैं, तो समीकरण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

अर्थात $\frac{7l}{7} = \frac{21}{7}$

$\Rightarrow \quad l = 3$

आओ, इन नियमों का प्रयोग करते हुए कुछ उदाहरण देखें:

उदाहरण 19: **$a - 8 = 4$ को हल करो।**

हल : दी गई समीकरण है $a - 8 = 4$

दोनों तरफ 8 जोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं

$a - 8 + 8 = 4 + 8$

$\Rightarrow$ $a = 12$ वांछित हल है।

उदाहरण 20: **$3x - 1 = 14$ को हल करो**

हल : दी गई समीकरण है $3x - 1 = 14$

दोनों ओर 1 जोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं

$3x - 1 + 1 = 14 + 1$

$\Rightarrow$ $3x = 15$

दोनों ओर 3 से भाग करने पर

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$

$\Rightarrow$ $x = 5$ वाँछित हल है।

उदाहरण 21: **$2x + 5 = 21$ को हल करो।**

हल : दी गई समीकरण है $2x + 5 = 21$

दोनों ओर 5 घटाने पर हम प्राप्त करते हैं

$2x + 5 - 5 = 21 - 5$

$\Rightarrow$ $2x = 16$

दोनों ओर 2 से भाग करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{2x}{2} = \frac{16}{2}$$

$\Rightarrow$ $x = 8$ वांछित हल है

7.8.3 एक संख्या का पक्ष बदलने की विधि (Method of Transposition a number)

हम जानते हैं कि रेखिक समीकरण को हल करने के लिए, हम समीकरण के दोनों पक्षों को समान संख्या से जोड़, घटाओ, गुणा या भाग करते हैं।

संख्या का पक्ष बदलना उसी प्रकार हैं, जैसे समीकरण के दोनों ओर संख्या को जोड़ना या घटाना, संख्या से गुणा या भाग करना। हम चिह्नों '+' को '–' और विपरीत, 'x' को '÷' और विपरीत में बदलते हैं।

देखो:- समीकरण $x - 2 = 6$ .... (i)

दोनों ओर 2 जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

$x - 2 + 2 = 6 + 2$

$x = 6 + 2$ ....(ii)

समीकरण (i) और (ii) को देखो, हम देखते हैं कि संख्या 2 बाएँ पक्ष से दाएँ पक्ष की ओर चिह्न के बदलाव के साथ पक्ष बदल गई है। यह प्रक्रिया पक्ष बदल से जानी जाती है।

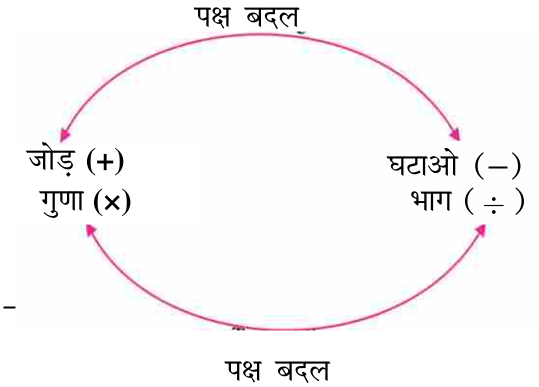
• एक समीकरण देखो $3a = 12$ .... (i)

दोनों ओर 3 से भाग करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$\frac{3a}{3} = \frac{12}{3}$$

$a = \frac{12}{3}$ या $12 \div 3$ .... (i)

समीकरण (i) और (ii) की तुलना करने पर हम देखते हैं कि संख्या 3 क्रिया चिह्न परिवर्तन के साथ बाएँ पक्ष से दाएँ पक्ष की ओर पक्ष बदल गई। अर्थात गुणा से भाग 1 यह प्रक्रिया पक्ष बदल कहलाती है।



उदाहरण 22: नीचे दिए गए समीकरण हल करो:-

(i) $x + 2 = 11$ **(ii)** $y - 3 = 8$

(iii) $4x = 24$ **(iv)** $\frac{a}{3} = 6$ **(v)** $3b - 2 = 19$

हल : (i) दिए गए समीकरण : $x + 2 = 11$

$\Rightarrow$ $x = 11 - 2$ (+ 2 को दूसरी ओर बदलने पर यह – 2 हो जाता है)

$\therefore$ $x = 9$ वांछित उत्तर है।

(ii) दिए गए समीकरण : $y - 3 = 8$

$\Rightarrow$ $y = 8 + 3$ (– 3 को दूसरी ओर बदलने पर यह + 3 हो जाता है)

$\therefore$ $y = 11$ वांछित हल है।

(iii) दिए गए समीकरण : $4x = 24$

$\Rightarrow$ $x = \frac{24}{4}$ (गुणा को बदलने पर यह भाग हो जाता है)

$\therefore$ $x = 6$ वांछित हल है।

(iv) दिए गए समीकरण : $\frac{a}{3} = 6$

$\Rightarrow$ $a = 6 \times 3$ (भाग को बदलने पर यह गुणा हो जाता है)

$\therefore$ $a = 18$ वांछित हल है।

(v) दिए गए समीकरण : $3b - 2 = 19$

$\Rightarrow$ $3b = 19 + 2$ (– 2 को दूसरी ओर बदलने पर यह + 2 हो जाता है)

$\Rightarrow$ $3b = 21$

$\Rightarrow$ $b = \frac{21}{3}$ (गुणा को बदलने पर यह भाग हो जाता है)

$\therefore$ $b = 7$ वांछित हल है।

प्रश्नावली 7.4

1. निम्नलिखित कथनों को बीज गणितीय समीकरण में लिखो:-

(i) x और 3 का जोड़फल 10 होता है। (ii) एक संख्या 'a' से 5 कम 12 है।

(iii) p के 5 गुणा से 2 अधिक 32 देता है। (iv) एक संख्या का आधा 10 है।

(v) एक संख्या का दुगुना 3 से जोड़ने पर 17 मिलता है।

2. नीचे दिए गए समीकरणों के लिए बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष लिखों:–

(i) $l + 5 = 8$ (ii) $13 = 2m + 3$ (iii) $\frac{t}{4} = 6$ (vi) $2h - 5 = 13$ (v) $\frac{5x}{7} = 15$

3. नीचे दिए गए समीकरणों को प्रयत्न और भूल विधि से हल करो।

(i) $x + 2 = 7$ (ii) $5p = 20$ (iii) $\frac{a}{5} = 2$ (iv) $2l - 4 = 8$ (v) $3x + 2 = 11$

4. नीचे दिए गए समीकरणों को क्रमबद्ध विधि से हल करो।

(i) $z - 4 = 10$ (ii) $a + 3 = 15$ (iii) $4m = 20$ (iv) $3x - 3 = 15$ (v) $4x + 5 = 13$

5. नीचे दिए गए समीकरणों को पक्ष बदल विधि से हल करो।

(i) $x - 5 = 6$ (ii) $y + 2 = 3$ (iii) $5x = 10$ (iv) $\frac{a}{6} = 4$ (v) $4y - 2 = 30$

6. नीचे दी गई समीकरणों को हल करो:–

(i) $x + 7 = 11$ (ii) $x - 3 = 15$ (iii) $x - 2 = 13$ (iv) $6x = 18$

(v) $3x = 24$ (vi) $\frac{x}{4} = 7$ (vii) $\frac{x}{8} = 5$ (viii) $2x - 5 = 17$

(ix) $4x + 5 = 21$ (x) $5x - 2 = 13$

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. वर्ग की प्रत्येक भुजा को 's' से दर्शाया गया है, तो वर्ग का परिमाप है:–

(a) $4 + s$ (b) $s - 4$ (c) $4s$ (d) s

2. चरों x और y का प्रयोग करते हुए गुणा के लिए क्रम विनिमेयता गुण लिखो।

(a) $xy = yx$ (b) $x + y = y + x$ (c) $x + y$ (d) xy

3. व्यंजक $7l - 3$ में कितने पद हैं?

(a) 1 (b) 3 (c) 2 (d) 4

4. m में से 5 घटाया गया

(a) $5 - m$ (b) $m + 5$ (c) $5 + m$ (d) $m - 5$

5. p को 3 गुणा करके फिर 2 जोड़ा गया

(a) $2p + 3$ (b) $3p - 2$ (c) $3p + 2$ (d) $2p - 3$

6. यदि अरमान की वर्तमान आयु x साल है तो 4 साल बाद उसकी आयु कितनी होगी?

(a) $x - 4$ (b) $x + 4$ (c) $4x$ (d) $4 - x$

7. बीजगणितीय समीकरण के रूप में लिखें: y के गुण 4 गुणा से 7 अधिक से 23 प्राप्त होता है।

(a) $4 + 7y = 23$ (b) $7 + y = 23$ (c) $4y - 7 = 23$ (d) $4y + 7 = 23$

8. यदि x तो $x - 3 = 2$ पता करो।

(a) 3 (b) 6 (c) 5 (d) 2

9. $4l - 3 = 5$ हल करो।

(a) 3 (b) 4 (c) 1 (d) 2

10. यदि $\frac{a}{4} = 5$ तो a =

(a) 5 (b) 20 (c) 4 (d) 18

सीखने के परिणाम

इस अध्याय के पूरा होने के बाद अब विद्यार्थी :

- चरों की धारणा के बारे में सीखना के योग्य हैं।
- अलग-अलग हालातों में चरों का प्रयोग करने के योग्य हैं।
- समीकरण का अर्थ जानने के योग्य हैं।
- समीकरण का मान पता करने के योग्य हैं।
- तथ्य/बयान से बीजगणितीय व्यंजक बनाने के योग्य हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 7.1

1. (i) 2n (ii) 4n (iii) 3n (iv) 3n (v) 5n **2.** 12n **3.** 3a

4. 8c **5.** 5p **6.** 50d **7.** 1 + 3x या 3x + 1

प्रश्नावली 7.2

1. 3a **2.** $2l + b$ **3.** 6s **4.** $12l$ **5.** $x + y = y + x$

6. $l \times (m \times n) = (l \times m) \times n$ **7.** $p \times (q + r) = p \times q + p \times r$

प्रश्नावली 7.3

1. बीजगणितीय व्यंजक : (i), (iii), (iv), (vi) अंकगणितीय व्यंजक : (ii), (v), (vii), (viii)

2. (i) 2y,5z (ii) 6x, –3y, 8 (iii) 7a (iv) $3l, -5m, 2n$ (v) $\frac{2\ell}{3}$, x

3. (i) a में 11की बढ़ोतरी की गई (ii) 12 में से x घटाया गया

(iii) के 3 गुण में 8 की बढ़ोतरी की गई (iv) ℓ के 5 गुणा को 6 में से घटाया गया

(v) a के 5 गुणा को 4 से भाग किया गया

4. (i) p + 10 (ii) y – 5 (iii) $\frac{d}{3}$ (iv) $-6l$ (v) 1 – m

(vi) 3x + 11 (vii) –2y + 2 (viii) $\frac{7c}{5}$ (ix) y – 3x (x) (a + b) c

5. $y - 15$ **6.** $a + 3$ **7.** $2x + 1$ **8.** $5y - 7$

9. (i) $a + 15$ (ii) $a - 2$ (iii) $2a + 5$ (iv) $a - 4$ (v) $3a - 3$ **10.** $2l + 10$

प्रश्नावली 7.4

1. (i) $x + 3 = 10$ (ii) $a - 5 = 12$ (iii) $5p + 2 = 32$ (iv) $\frac{x}{2} = 10$ (v) $2x + 3 = 17$

2. (i) बायाँ पक्ष = $l + 5$, दायाँ पक्ष = 8 (ii) बायाँ पक्ष = 13, दायाँ पक्ष = $2m + 3$

(iii) बायाँ पक्ष = $\frac{t}{4}$, दायाँ पक्ष = 6 (iv) बायाँ पक्ष = $2h - 5$, दायाँ पक्ष = 13

(v) बायाँ पक्ष = $\frac{5x}{7}$, दायाँ पक्ष = 15

3. (i) $x = 5$ (ii) $p = 4$ (iii) $a = 10$ (iv) $l = 6$ (v) $x = 3$

4. (i) $z = 14$ (ii) $a = 12$ (iii) $m = 5$ (iv) $x = 6$ (v) $x = 2$

5. (i) $x = 11$ (ii) $y = 1$ (iii) $x = 2$ (iv) $a = 24$ (v) $y = 8$

6. (i) $x = 4$ (ii) $x = 18$ (iii) $x = 15$ (iv) $x = 3$ (v) $x = 8$

(vi) $x = 28$ (vii) $x = 40$ (viii) $x = 11$ (ix) $x = 4$ (x) $x = 3$

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. c **2.** a **3.** c **4.** d **5.** c **6.** b **7.** d **8.** c **9.** d **10.** b

आधारभूत रेखा गणितीय अवधारणाएँ

8

(BASIC GEOMETRICAL CONCEPTS)

उद्देश्य

इस अध्याय में आप सीखेंगे।

(i) बिन्दु, रेखा, रेखाखण्ड और किरण के बारे में।
(ii) वक्र के बारे में भाव सरल, खुला और बन्द वक्र के बारे में।
(iii) बहुभुज के बारे में भाव त्रिभुज और चतुर्भुज और उनके भाग के बारे में।
(iv) वृत्त और इसके भागों में बारे में।
(v) इन रेखा गणितीय अवधारणाओं का अपने आस-पास से सम्बन्ध स्थापित करना।

8.1 भूमिका (Introduction)

रेखा गणित, गणित की एक शाखा है, जो कि आकृतियों की स्थिति, माप और आकार के साथ सम्बन्ध रखती है।

रेखा गणित (Geometry) यूनानी शब्द 'जिया' (Geo) और मैट्रान (Metron) से लिया गया है। जिया (Geo) का अभिप्राय है धरती और मैट्रन (Metron) का अभिप्राय है माप। पुराने दिनों में, रेखा गणित का प्रयोग हमारे जीवन के बहुत सारे क्षेत्रों जैसे कला, शिल्पकला, माप आदि में होता था। हम रेखा गणितीय आकृतियों के निर्माण के बारे में सीखते हैं और उनकी प्रारम्भिक विशेषताओं के बारे में पढ़ते हैं।

जैसे कि अंक, अंकगणित के मूलभूत तत्त्व या नींव के पत्थर हैं और अंक, चल और चार प्रारम्भिक क्रियाएं बीजगणित के मूलभूत तत्व हैं, रेखागणित के भी अपने मूलभूत तत्व या नींव के पत्थर हैं। इस भाग में, हम इनमें से कुछ के बारे में सीखेंगे। इसमें तीन प्रमुख तत्व बिन्दु, रेखा और समतल है। ये पद निश्चित रूप से परिभाषित नहीं किए जा सकते। फिर भी, हम इन पदों के अर्थ स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण दे सकते हैं:

8.2 बिन्दु (POINT)

कागज़ के एक टुकड़े पर एक तीखी पेंसिल से एक छोटा-सा निशान, या सूक्ष्म सूई या पिन से कागज़ में एक बारीक छेद, बिन्दी आदि बिंदु के उदाहरण हैं।

एक पेंसिल का नुकीला भाग

परकार के सिरे

सुई का नुकीला सिरा

एक बिन्दु सिर्फ एक स्थान निर्धारक है। यह किसी पदार्थ की स्टीक स्थिति दर्शाता है। एक बिन्दु की कोई लम्बाई, चौड़ाई या ऊँचाई नहीं होती। भाव इसका कोई माप नहीं होता।

एक बिन्दु को अंग्रेज़ी वर्णमाला के एक बड़े अक्षर जैसे A, B, C, ... P, Q, R आदि से निरूपित किया जाता है और 'बिन्दु A,' 'बिन्दु B' (जैसे दिखाया गया है)

8.3 रेखा (Line)

एक रेखा बिन्दुओं का संग्रह है जिसको अनन्त रूप में दोनों ओर बढ़ाया जा सकता है। इसकी सिर्फ लम्बाई होती है न चौड़ाई न ही मोटाई। एक रेखा को नाम देने की ये दो विधियाँ हैं:-

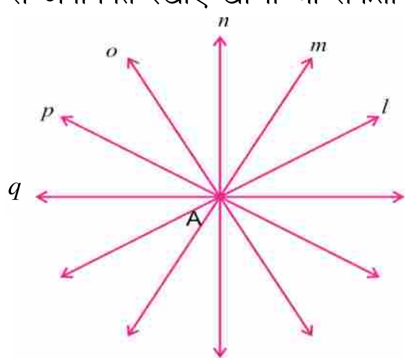
(i) एक रेखा को वर्णमाला के छोटे अक्षरों जैसे ℓ, m आदि से लिख कर नाम दिया जा सकता है।

(ii) रेखा के ऊपर दो बिन्दु मान लो A और B लेकर $\overleftrightarrow{AB}$ नाम दिया जा सकता है।

एक रेखा की कुछ विशेषताएँ होती हैं जो कि इस प्रकार हैं-

- एक रेखा के कोई अन्त बिन्दु नहीं होते। तीर के चिह्न दिखलाते हैं कि रेखा को दो विपरीत दिशाओं में अनन्त तक बढ़ाया जा सकता है।
- एक रेखा के ऊपर अनगिनत बिन्दु होते हैं।

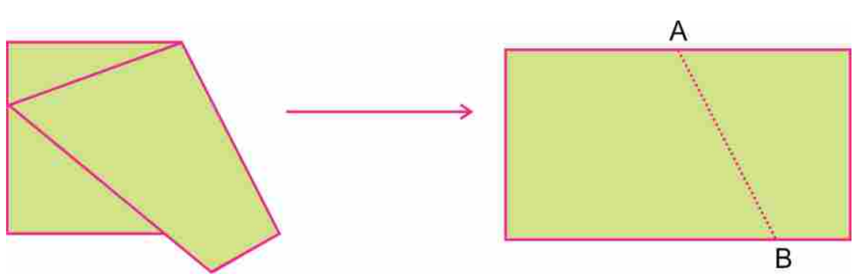
- दो बिन्दुओं के बीच में से सिर्फ एक रेखा खींची जा सकती है।
- रेखा की कोई निश्चित लम्बाई नहीं होती।
- एक दिए हुए बिन्दु में से अनगिनत रेखाएँ खींची जा सकती हैं।



चित्र में, रेखाएँ ℓ, *m*, *n*, *o*, *p*, *q* सभी ही एक दिए हुए बिन्दु A में से गुज़रती है।

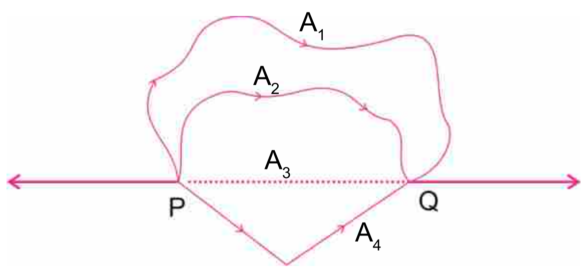
8.3.1 रेखाखण्ड (LINE SEGMENT)

एक कागज़ के टुकड़े को मोड़िए और फिर इसे खोलिए। आप कागज़ के ऊपर मोड़ का एक निशान प्राप्त करते हैं।



आपने मोड़ का जो निशान प्राप्त किया है, वह एक रेखाखण्ड का प्रतिनिधित्व करता है। इस रेखाखण्ड के दो अन्त बिन्दु A और B है।

अब दो बिन्दुओं P और Q पर विचार करें। दिखाए अनुसार P से Q तक पहुँचने के अनेक सम्भव मार्ग है। सबसे छोटे मार्ग को बिन्दुदार रेखा (A_3) से दर्शाया गया है।



जोकि सीधी रेखा है। इसलिए, P से Q तक का सीधा मार्ग P और Q में से निकलने वाली रेखा का एक खण्ड/टुकड़ा है।

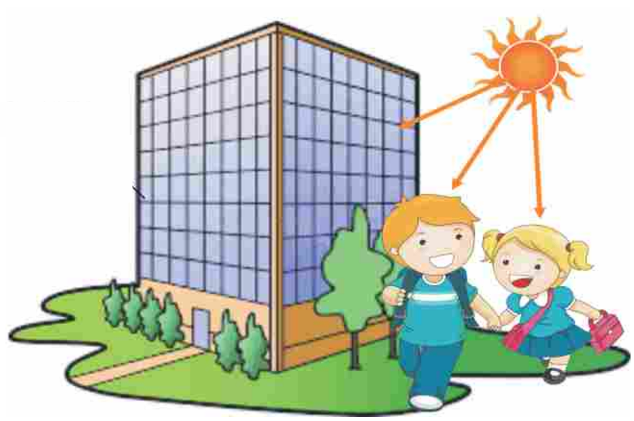
चूँकि, यहां केवल एक ही रेखा P और Q में से गुजर रही है। यह स्पष्ट है कि यहाँ केवल एक ही रेखाखण्ड है जो P और Q को मिलाता है।

एक रेखाखण्ड एक रेखा का वह भाग होता है जो कि दो अन्त बिन्दुओं के बीच में घिरा होता है। यह दो अन्त बिन्दुओं के बीच में सबसे छोटी दूरी होती है।

P से Q तक रेखाखण्ड को $\overline{PQ}$ या $\overline{QP}$ के द्वारा दर्शाया जाता है। एक रेखाखण्ड के ऊपर अनगिनत बिंदु होते हैं।

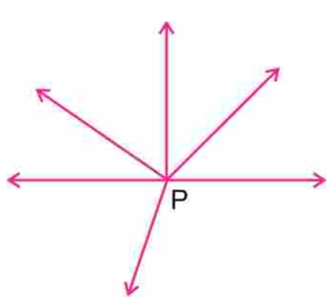
8.3.2 किरण (Ray)

यह एक रेखा का एक भाग है, जिसका एक आरम्भ बिन्दु होता है और एक दिशा में अनन्त रूप में बढ़ाया जा सकता है। $\overrightarrow{AB}$ एक किरण है जिसका आरम्भ बिन्दु A है, इसे A से B तक अनन्त तक बढ़ाया जा सकता है।

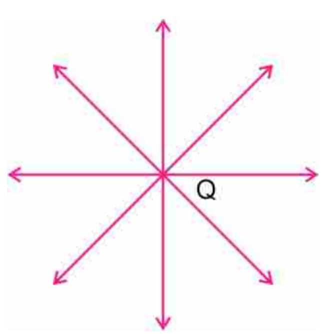


$\overrightarrow{BA}$ एक किरण है जिसका आरम्भ बिन्दु B है और B से A की ओर अनन्त रूप में बढ़ाया जा सकता है।

एक बिन्दु से अनगिनत किरणें खीचीं जा सकती हैं।



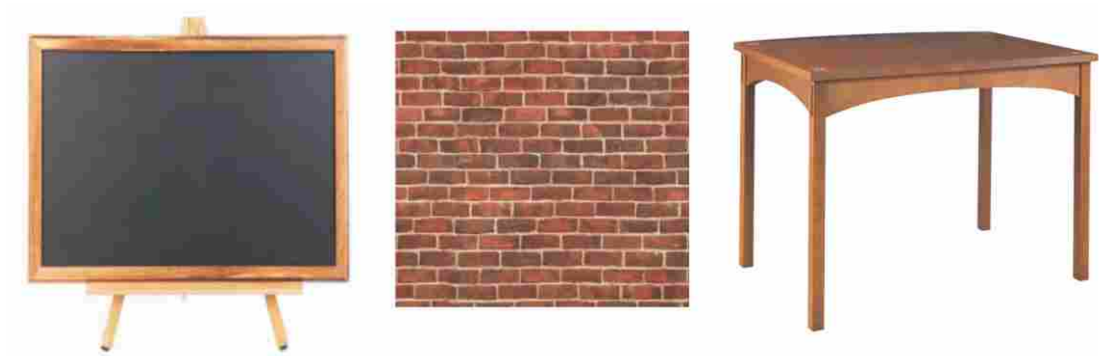
एक बिन्दु P से अनगिनत किरणें



एक बिन्दु Q से अनगिनत किरणें

8.6 तल (Plane)

हम अपने दैनिक जीवन में बहुत सारी समतल सतहों जैसे कि मेज़ की ऊपरी सतह, दीवार की सतह, ब्लैक बोर्ड की सतह के संपर्क में आते हैं। सभी समतल सतह या तल हैं।



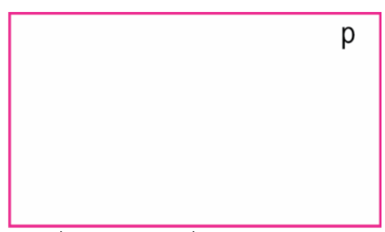
इसलिए प्रत्येक ठोस की एक समतल या वक्रीय सतह होती है। यह चिकनी या खुरदरी हो सकती है।

एक तल एक समतल सतह है जो सभी दिशाओं में अनन्त रूप में फैलता है। इसकी कोई सीमा नहीं होती। इसकी लम्बाई और चौड़ाई होती है पर ऊँचाई नहीं होती।

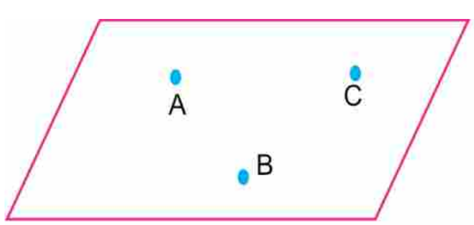
जैसे कि तल सभी दिशाओं में अनन्त रूप में बढ़ता है, हम इसको कागज़ पर नहीं खींच सकते, तल का कुछ भाग ही बनाया जा सकता है।

एक तल को दो प्रकार से नाम दे सकते हैं:

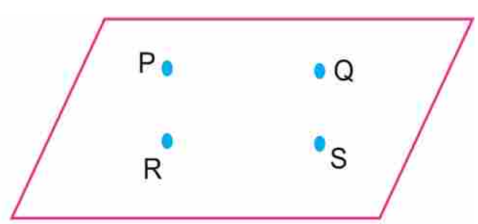
(i) एक छोटा अक्षर p या q. लिख कर। इसको 'तल p' या 'तल q' पढ़ा जाता है।



(ii) तीन या अधिक बढ़े अक्षर जैसे A, B और C लिख कर। पर एक ही रेखा में नहीं। इसको 'तल ABC' पढ़ा जाता है।



तल A B C

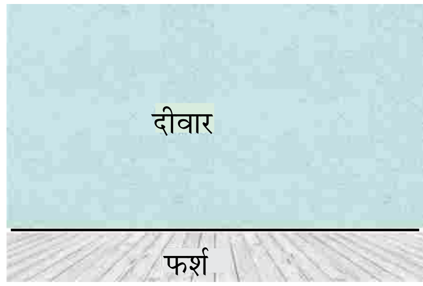


तल P Q R S

8.4.1 एक तल में बिन्दुओं और रेखाओं की विशेषताएँ (Properties of Points and lines in a Plane)

1. किसी एक तल में कोई दो बिन्दु उनमें से गुज़रने वाली केवल और केवल एक ही रेखा हो सकती है। यह रेखा पूरी तरह तल में ही होती है।

2. दो तल एक रेखा पर मिलते हैं उदाहरण के लिए एक कमरे की दीवार और फर्श एक रेखा में मिलते (प्रतिच्छेद) है जिसको किनारा कहा जाता है।

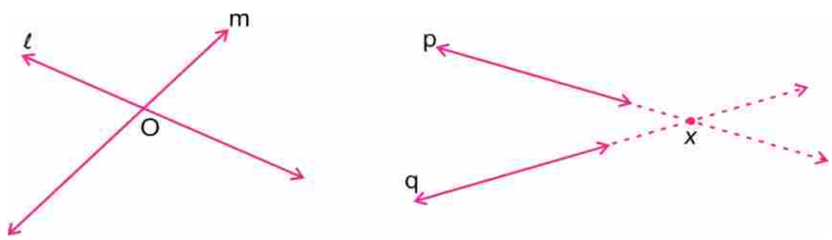


3. यदि हम एक तल में दो रेखाएँ ले, तो दो सम्भावनाएं हैं:
   (i) वे तल में एक दूसरे को प्रतिच्छेद कर (काट) सकती है।
   (ii) वे एक दूसरे के समांतर होती हैं भाव वे एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करतीं।

8.5 प्रतिच्छेद रेखाएँ (Intersecting Lines)

दो रेखाएँ जो एक बिन्दु पर मिलती है, प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती है और बिन्दु प्रतिच्छेदी बिन्दु (प्रतिच्छेदन बिन्दु) कहलाता है।

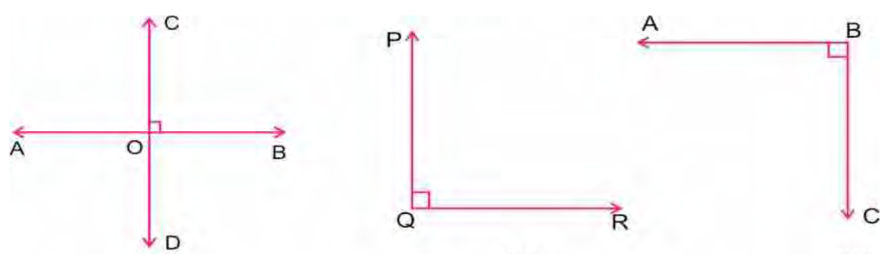
(i) ℓ और m प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं और O प्रतिच्छेदी बिन्दु (प्रतिच्छेदन बिन्दु) है।



(ii) p और q रेखाओं को बढ़ाने पर, वे प्रतिच्छेदी बिन्दु x पर प्रतिच्छेद करती है।

8.5.1 लंबवत रेखाएँ (Perpendicular lines)

दो रेखाएँ एक दूसरे पर लंबवत कहलाती है यदि वे एक समकोण बनाती है।



(i) (ii) (iii)

लंब का चिह्न '⊥' है।

(i) रेखाएँ AOB और COD एक दूसरे पर लम्ब है क्योंकि $\angle COB = 90^\circ$, हम इस प्रकार लिखते हैं COD ⊥ AOB, CD, AB पर लंब है, इस प्रकार पढ़ा जाता है। अथवा ÅU
AOB ⊥ COD; AB, CD के ऊपर लम्ब है।

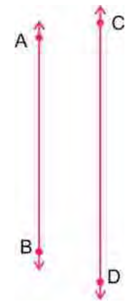
(ii) PQ ⊥ QR क्योंकि $\angle PQR = 90^\circ$ अथवा RQ ⊥ PQ क्योंकि $\angle RQP = 90^\circ$

(iii) AB ⊥ BC क्योंकि $\angle ABC = 90^\circ$ अथवा BC ⊥ AB क्योंकि $\angle CBA = 90^\circ$

8.6 समांतर रेखाएँ (Parallel lines)

रेखाएँ जो बढ़ाने के बाद भी नहीं मिलतीं, समांतर रेखाओं के रूप में जानी जाती हैं। समांतर रेखाओं के समूह के बीच दूरी सदैव समान रहती है।

$p \| q$



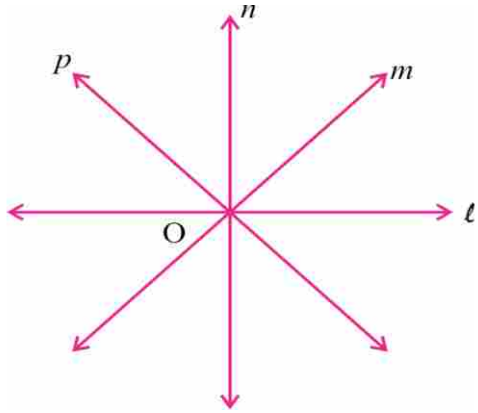
AB||CD

एक पैमाने (रूलर/स्केल) अथवा ब्लैक बोर्ड के सम्मुख किनारे, रेल की पटरियाँ समांतर रेखाओं का सबसे बढ़िया उदाहरण हैं।

8.7 समवर्ती (संगामी) रेखाएँ (Concurrent lines)

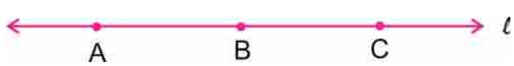
एक तल में जब तीन अथवा अधिक रेखाएँ एक ही बिंदु में से निकलती है तो समवर्ती रेखाएं कहलाती है और बिन्दु समवर्ती (संगामी) बिन्दु कहलाता है।

O में से निकल रही रेखाएँ ℓ, m, n, p समवर्ती रेखाएँ हैं।



8.8 संरेख बिंदु (Collinear Points)

एक तल में तीन या अधिक बिंदुओं को संरेख कहा जाता है, यदि वे एक ही रेखा के ऊपर स्थित हो।



संरेखी बिंदु

असंरेखी बिन्दु

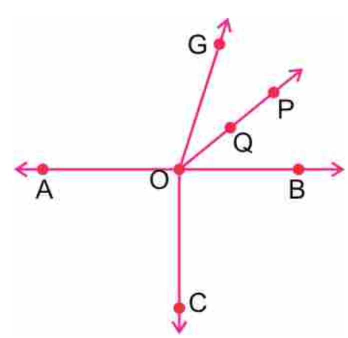
आओ! कुछ उदाहरण देखें:-

उदाहरण 1:- **संलग्न आकृति में नाम बताएं:**

(i) कोई चार किरणें

(ii) कोई चार रेखाखंड

(iii) संरेख बिंदुओं का समूह

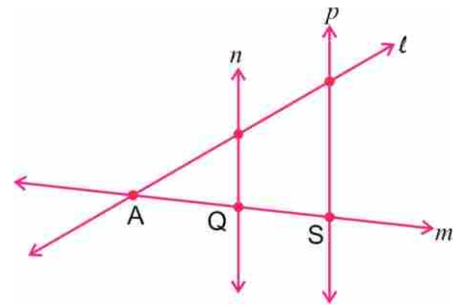


हल : (i) $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{QP}$ किरणें हैं।

(ii) OQ, QP, OP, OG, OA, OB, OC, AB रेखाखंड हैं।

(iii) A, O, B संरेख बिन्दु है अथवा O, Q, P संरेख बिन्दु हैं।

उदाहरण 2 : **संलग्न आकृति में, नाम बताएं**



(i) समांतर रेखाओं के युग्म

(ii) प्रतिच्छेदी रेखाओं के युग्म

(iii) रेखाएं जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु Q है।

(iv) रेखाएं जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु A है।

(v) संरेख बिन्दु

हल :

(i) समांतर रेखाओं का युग्म : n और p

(ii) प्रतिच्छेदी रेखाओं के युग्म : ℓ और m, n और ℓ , p और ℓ, n और m, p और m.

(iii) n और m का प्रतिच्छेद बिन्दु Q है।

(iv) ℓ और m का प्रतिच्छेद बिन्दु A है।

(v) संरेख बिन्दुओं का समुच्य (समूह): A, P, R और A, Q, S.

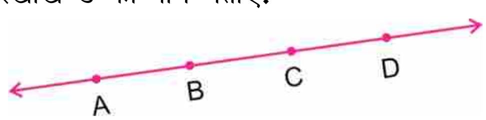
प्रश्नावली 8.1

1. उदाहरण दें:-

(i) एक बिंदु (ii) एक रेखाखंड (iii) समांतर रेखाएँ

(iv) प्रतिच्छेदी रेखाएँ (v) समवर्ती रेखाएँ

2. दी हुई रेखा में रेखाखण्ड का नाम बताएं:-

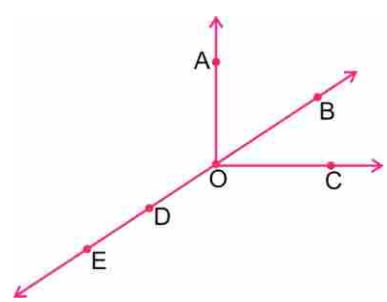


3. एक बिंदु में से कितनी रेखाएँ निकल सकती है?

4. एक रेखा के ऊपर कितने बिन्दु हो सकते हैं?

5. दो बिन्दुओं में से कितनी रेखाएँ निकल सकती है?

6. आकृति का प्रयोग करके नाम बताएं:-



(i) पाँच बिन्दु

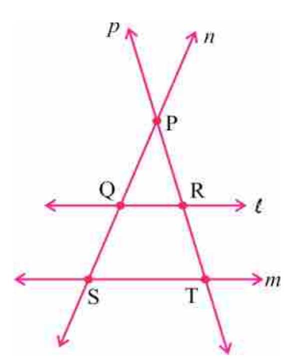
(ii) एक रेखा

(iii) चार किरणें

(iv) पाँच रेखाखण्ड

7. दी हुई किरण के हर संभव ढंग से नाम बताएँ।

8. आकृति का प्रयोग करके नाम बताएं:-



(i) समांतर रेखाओं का युग्म।

(ii) प्रतिच्छेदी रेखाओं के सभी युग्म।

(iii) रेखाएँ जिनका प्रतिच्छेदी बिन्दु S है।

(iv) संरेख बिन्दु।

9. आकृति का प्रयोग करके नाम बताएँ:–

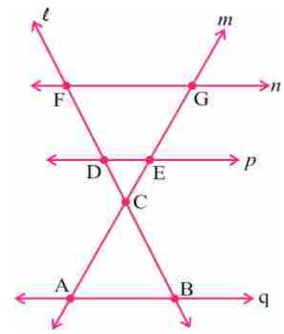
(i) समांतर रेखाओं के सारे युग्म

(ii) प्रतिच्छेदी रेखाओं के सारे युग्म

(iii) रेखाएँ जिनका प्रतिच्छेदी बिन्दु D है।

(iv) रेखाएँ m और p का प्रतिच्छेदन बिन्दु

(v) संरेख बिन्दुओं के सभी समुच्चय (समूह)



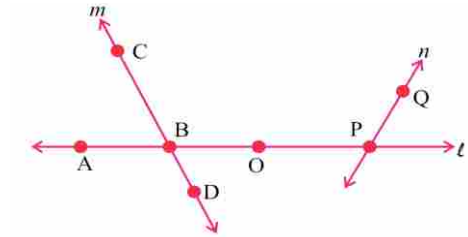
10. आकृति का प्रयोग करके नाम बताएं

(i) रेखा जिसके ऊपर बिन्दु P है।

(ii) रेखाएँ जिनका प्रतिच्छेदन बिन्दु B है।

(iii) रेखाओं m और ℓ का प्रतिच्छेदन बिन्दु

(iv) प्रतिच्छेदी रेखाओं के सभी युग्म



11. बताएं कि दिए हुए कथनों में से कौन सा सही (T) अथवा गलत (F) है:

(i) एक तल में दो रेखाएँ, सदैव एक बिन्दु पर काटती है।

(ii) यदि चार रेखाएँ एक बिन्दु पर काटती हों, वे समवर्ती रेखाएँ कहलाती है।

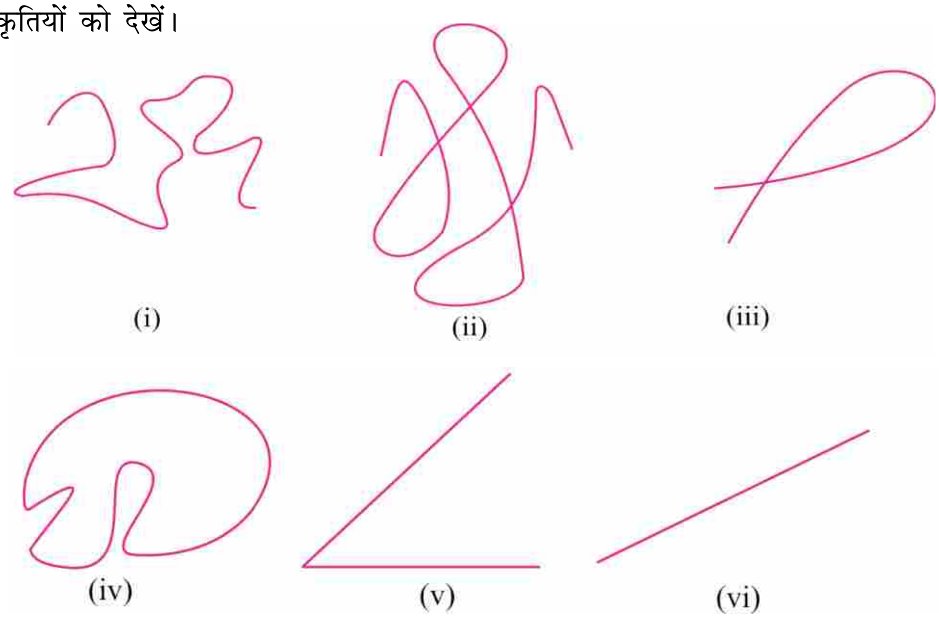
(iii) बिन्दु का आकार होता है क्योंकि हम कागज़ के ऊपर एक बारीक चिह्न के रूप में इसे देख सकते हैं।

(iv) एक दिए हुए बिन्दु में से, केवल एक रेखा खींची जा सकती है।

(v) आयत तल का एक भाग है।

8.8 वक्र (Curves)

दी गई आकृतियों को देखें।



आपने रेत, दीवार या शीशे के ऊपर बहुत सारी आकृतियाँ, नाम बनाए हो सकते हैं। ये सभी चित्र वक्र हैं।

एक पेंसिल और एक कागज लें। पेंसिल का नुकीला सिरा कागज़ के ऊपर रखें, और पेंसिल को उठाए बगैर एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक बिना किसी उद्देश्य के चलाएं। परिणामस्वरूप प्राप्त चित्र वक्र कहलाते हैं।

साधारणतय: वक्र से अभिप्राय है 'सीधा नहीं' पर गणित में वक्र एक सीधी रेखा (v), (vi) भी हो सकता है।

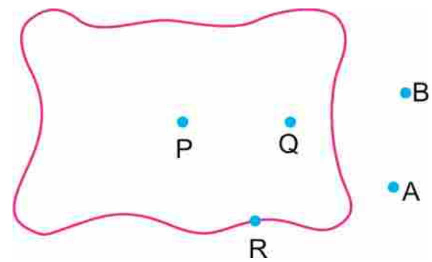
सरल वक्र (Simple Curve) : यदि कोई वक्र स्वयं को पार नहीं करती, तो यह सरल वक्र कहलाती है। आकृति (i), (ii), (iii), (v), (vi) सरल वक्र हैं।

खुली वक्र (Open Curve) : एक वक्र जो स्वयं को न काटे, खुली वक्र कहलाती है।

आकृति (i), (ii), (iii), (v), (vi) खुली वक्र हैं।

बन्द वक्र (Closed Curve) : एक वक्र जिसका आरम्भिक और अंत बिन्दु एक ही बिन्दु पर हो, बन्द वक्र कहलाती है। आकृति (iv) एक बन्द वक्र है। यहां तीन भाग है।

- **वक्र का आन्तरिक भाग (Interior of the curve) :** (अभ्यंतर) वक्र का वह भाग, जो उन बिन्दुओं से बना होता है, जिनको वक्र ने घेरा होता है, वक्र का अभ्यन्तर (आन्तरिक) कहलाता है। P, Q वक्र के अभ्यंतर में हैं।



- **वक्र की सीमा के ऊपर (परिसीमन) (On the Boundary of the curve) :** वक्र का वह भाग, जो उन सारे बिन्दुओं से बना है जो वक्र के ऊपर हो, वक्र की सीमा (परिसीमा) कहलाते हैं। आकृति में बिन्दु R वक्र की सीमा के ऊपर है।

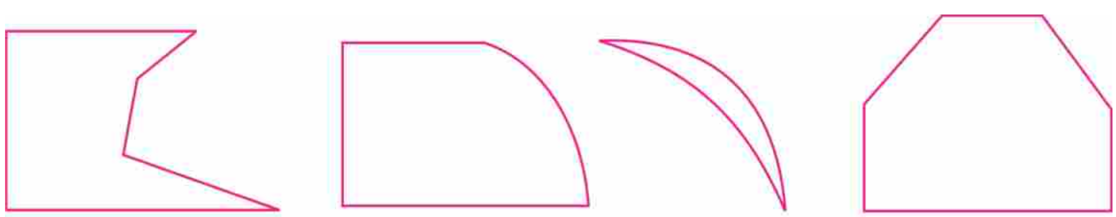
- **वक्र का बाहरी भाग (बहिर्भाग) (Exterior of the curve) :** वक्र का भाग, जो उन सभी बिन्दुओं से बना होता है जिनको वक्र ने नहीं घेरा होता, वक्र का बाहरी भाग (बर्हिभाग) कहलाता है। आकृति में A और B वक्र के बाहर है।

  उदाहरण के लिए (For Example) : आपके स्कूल की एक परिसीमा (सीमा) है। आपकी कक्षाएँ स्कूल परिसीमा के अन्दर हैं और आपके स्कूल का गेट परिसीमा के ऊपर है। आपके स्कूल की परिसीमा के बाहर सड़क है।

- एक वक्र तल को तीन पृथक पृथक भागों में बाँटता है।

8.10 बहुभुज (Polygons)

क्या आप निम्न बन्द आकृतियों में अन्तर पहचान सकते हो?



(i) (ii) (iii) (iv)

आकृति (i) और (iv) रेखाखण्डों से बनी हैं जबकि (ii) और (iii) नहीं।

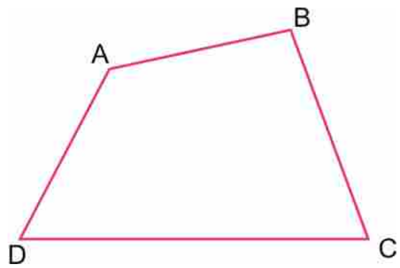
आकृतियाँ जो कि पूरी तरह से रेखाखण्डों से बनी होती है, बहुभुज के रूप में जानी जाती हैं, इस प्रकार आकृति (i) और (iv) बहुभुज है।

बहुभुज से अभिप्राय है बहु और भुज। बहु से अभिप्राय है बहुत और भुज से अभिप्राय है भुजाएँ। इसलिए बहुभुज से अभिप्राय है 'बहुत सारी भुजाएँ होना'।

''एक बहुभुज एक सरल बन्द आकृति है जिसमे तीन या अधिक रेखाखण्ड इस प्रकार होते हैं कि

- कोई दो रेखाखण्ड अपने प्रतिच्छेदन बिन्दु के अतिरिक्त प्रतिच्छेद नहीं करते।
- एक उभयनिष्ठ अन्त बिन्दु वाले कोई दो रेखाखण्ड संपाती नहीं होते।

बहुभुज को बनाने वाले रेखाखण्ड इसकी भुजाएँ कहलाते हैं और इन भुजाओं के अन्त बिन्दु शीर्ष कहलाते हैं।



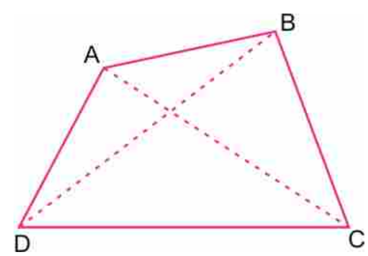
भुजाएँ (Sides) : वे रेखाखण्ड जो बहुभुज को बनाते हैं, इसकी भुजाएँ कहलाते हैं। AB, BC, CD, DA बहुभुज ABCD की भुजाएँ हैं।

शीर्ष (Vertices) : एक बहुभुज की भुजाओं के युग्म के मिलने वाले बिन्दु शीर्ष कहलाते है। बहुभुज ABCD, में, भुजाएँ AB और BCB पर मिलती हैं, BC और CD, C पर मिलती है और इसी प्रकार अन्य भी .....। इसलिए A, B, C और D बहुभुज ABCD के शीर्ष हैं।

आसन्न भुजाएँ (Adjacent Sides) : कोई दो भुजाएँ जिनका एक उभयनिष्ठ बिन्दु (शीर्ष) होता है, बहुभुज की आसन्न भुजाएँ कहलाती हैं। AB और BC का उभयनिष्ठ शीर्ष B है। इसलिए AB और BC आसन्न भुजाएँ हैं।

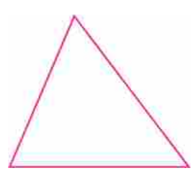
इसी प्रकार AB और AD; AD और DC; DC और CB; आसन्न भुजाओं के युग्म हैं।

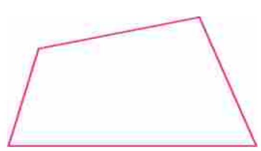
आसन्न शीर्ष (Adjacent vertices) : बहुभुज की किसी भुजा के अन्त बिन्दु आसन्न शीर्ष कहलाते हैं। भुजा AB के अन्त बिन्दु A और B है। इसलिए A और B आसन्न शीर्ष है। इसी प्रकार A, D; D, C; C, B आसन्न शीर्षों के युग्म है।

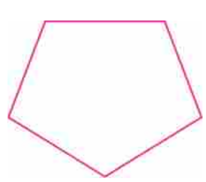


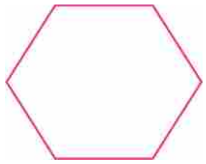
विकर्ण (Diagonals) : जो शीर्ष आसन्न नहीं है, को मिला कर प्राप्त किए गए रेखाखण्ड बहुभुज के विकर्ण कहलाते हैं। AB और BD बहुभुज ABCD के विकर्ण है।

बहुभुजों के उनके रेखाखण्डों की संख्या के आधार पर भिन्न-भिन्न वर्गों में बाँटा जा सकता है:

(i)  एक तीन भुजाओं वाला बहुभुज त्रिभुज कहलाता है।

(ii)  एक चार भुजाओं वाला बहुभुज चतुर्भुज कहलाता है।

(iii)  एक पाँच भुजाओं वाला बहुभुज पंचभुज कहलाता है।

(iv)  एक छह भुजाओं वाला बहुभुज षट्भुज कहलाता है।

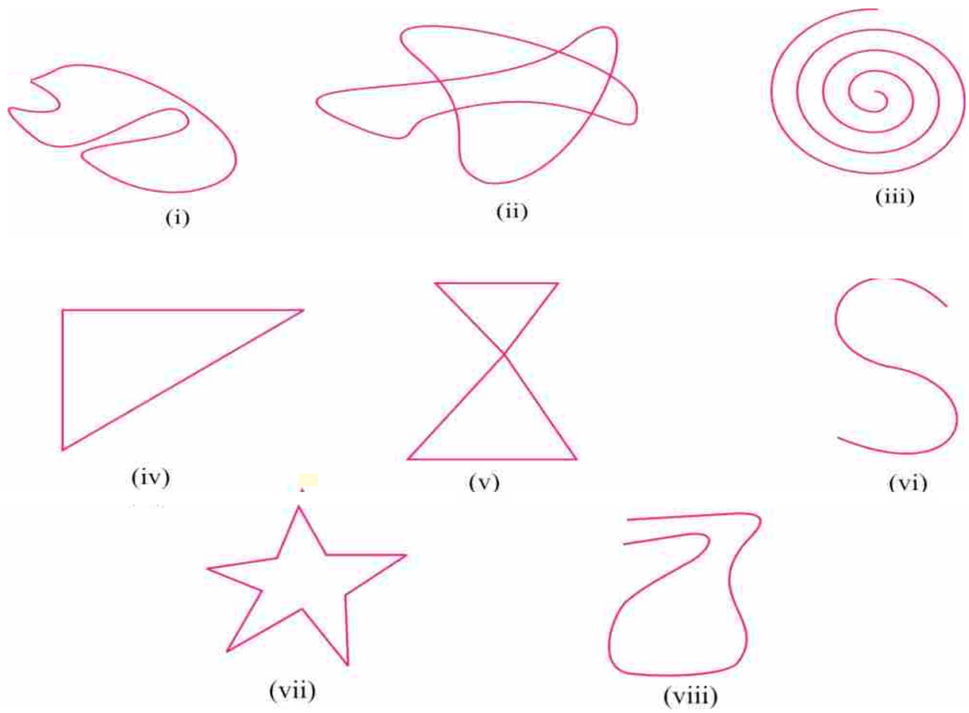
इसी प्रकार सात, आठ, नौ और दस भुजाओं वाले बहुभुज क्रमशः सप्तभुज, अष्टभुज, नवभुज और दशभुज कहलाते हैं।

समबहुभुज (नियमित बहुभुज) (Regular Polygon) : यदि एक बहुभुज की सभी भुजाएँ समान हों और सभी कोण समान हों, तो यह एक सम बहुभुज कहलाते हैं।

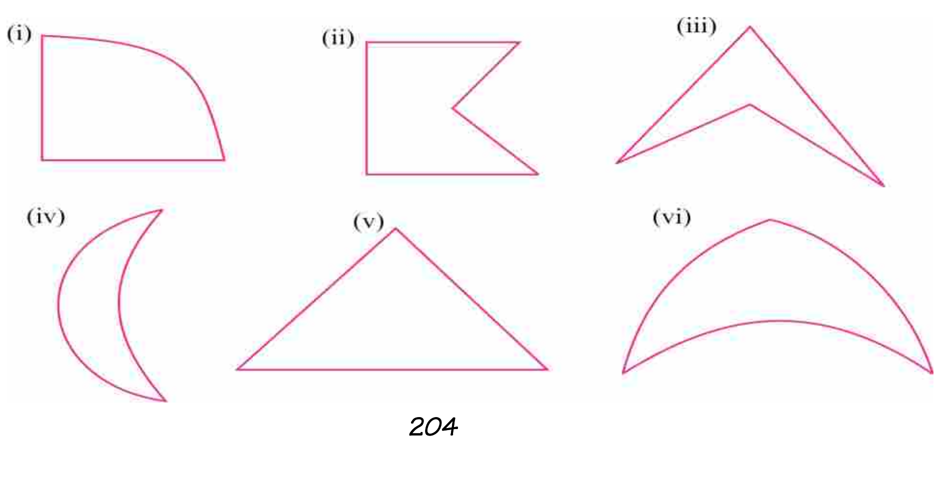
प्रश्नावली 8.2

1. (a) निम्नलिखित में से कौन से सरल वक्र हैं?

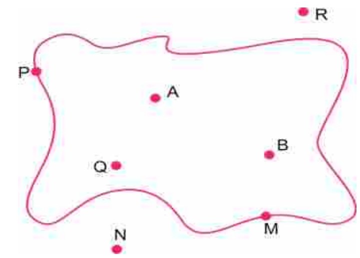
(b) निम्नलिखित का खुले या बन्द वक्र में वर्गीकरण करें।



2. बहुभुजों को पहचानें:-

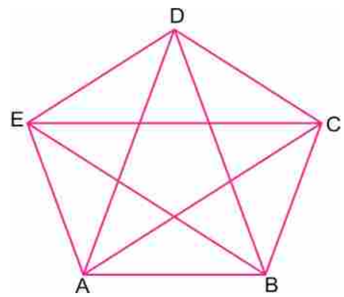


3. कोई बहुभुज बनाओ और इसके अभ्यन्तर (आंतरिक भाग) को छायांकित करो।



4. बिन्दुओं के नाम लिखो जो कि
   - (i) बन्द आकृति के अभ्यन्तर में हों
   - (ii) बन्द आकृति के बहिर्भाग में हों
   - (iii) बन्द आकृति की परिसीमा पर हों

5. आकृति में, नाम बताओ:
   - (i) शीर्ष
   - (ii) भुजाएँ
   - (iii) विकर्ण
   - (iv) AB की आसन्न भुजाएँ
   - (v) E के आसन्न शीर्ष



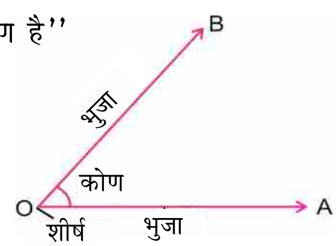
8.11 कोण (Angle)

हमारे दैनिक जीवन में, हम बहुत से भौतिक पदार्थ देखते है जिन में दो किनारे (भुजाएँ) एक उभयनिष्ठ (सांझे) कब्जे के साथ जुड़े होते हैं। उदाहरण के लिए, हाथ की दो अंगुलियाँ, घड़ी की दो सुइयाँ, कैंची के दो नुकीले भाग, एक दूसरे की तरफ झुके होते हैं और उनके बीच एक खुला भाग (कोण) होता है।

ऐसे पदार्थ हमें ज्यामिती (रेखागणित) में कोण की अवधारणा देते हैं
''एक उभयनिष्ठ आरम्भिक बिन्दु वाली दो किरणों से बनी आकृति कोण है''

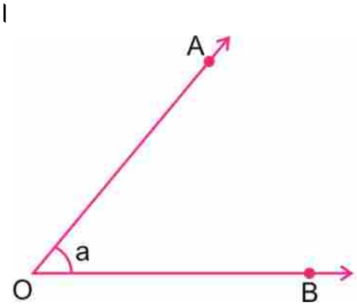
उभयनिष्ठ आरम्भिक बिन्दु कोण का शीर्ष कहलाता है और कोण को बनाने वाली किरणें इसकी भुजाएं कहलाती हैं।

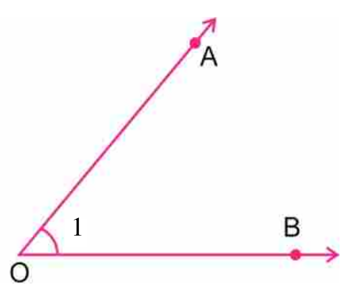
आकृति में, उभयनिष्ठ आरम्भिक बिन्दु O शीर्ष है और किरणें $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ कोण की भुजाएँ हैं।



8.11.1 कोण का नामकरण (Naming an Angle)

एक कोण को निरूपित करने (दर्शाने) के लिए '∠' चिह्न का प्रयोग किया जाता है। एक कोण को नाम देने के लिए कई ढंग हैं।





(i) शीर्ष को मध्य में लिखा जाता है और कोण की भुजाओं पर कोई दो बिन्दुओं को दो अन्तिम अक्षरों के रूप में लिखा जाता है।

इस प्रकार, दिए हुए कोण का नाम ∠AOB अथवा ∠BOA हो सकता है।

(ii) कोण के शीर्ष पर दिए हुए अक्षर को अकेले ही कोण का नाम देने के लिए लिखा जा सकता है।

इस प्रकार, दिए हुए कोण को ∠O भी लिखा जा सकता है।

(iii) हम कोण की दो भुजाओं को जोड़ने वाले छोटे वक्र के समीप संख्या 1, 2, 3......... आदि अथवा एक छोटे अक्षर a, b, c..... आदि लिख (दिखाए अनुसार) सकते हैं और उस संख्या अथवा अक्षर का प्रयोग करके कोण को नाम दे सकते हैं।

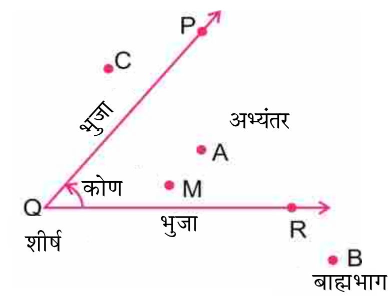
इस प्रकार, दिए हुए कोण को ∠a अथवा ∠1 का नाम भी दे सकते हैं।

- **कोण को नाम देते हुए, शीर्ष वाला अक्षर मध्य में होना चाहिए।**

8.11.2 कोण का अभ्यंतर और बर्हिभाग (Interior and Exterior of an angle)

एक कोण तल में सभी बिन्दुओं को तीन भागों में बाँटता है।

(i) तल का वह भाग जो अनन्त रूप में बढ़ाई गई कोण की भुजाओं के अन्दर होता है, कोण का अभ्यंतर कहलाता है। दी गई आकृति में बिन्दु A तथा M ∠PQR के अभ्यंतर में हैं।

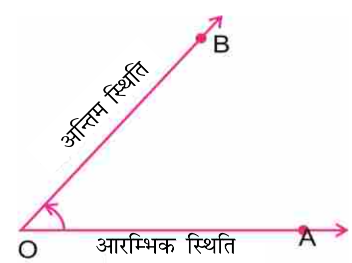


(ii) तल का वह भाग जो अनन्त रूप से बढ़ाई गई कोण की भुजाओं के बाहर होता है, कोण का बाह्यभाग (बर्हिभाग) कहलाता है। दी गई आकृति में Q तथा C ∠PQR के बाह्यभाग में हैं।

(iii) तल का वह भाग जो उन सभी बिन्दुओं से बना होता है जो कोण के ऊपर होते हैं, कोण की सीमा कहलाते हैं। आकृति में P, Q, R, ∠PQR की सीमा पर है।

8.11.3 एक किरण के घूमने से बने कोण (Angles as rotation of a ray)

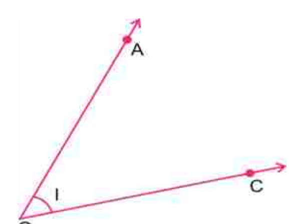
एक किरण को घुमाकर भी एक कोण दर्शाया जा सकता है। मान लीजिए, आरम्भिक बिन्दु O वाली एक किरण $\overrightarrow{OA}$ है। मान लीजिए हम इसे घुमाते हैं और वह अपनी अन्तिम स्थिति $\overrightarrow{OB}$ पर आ जाती है। हम कहते हैं कि किरण को घुमाने से ∠AOB बना है जिसका शीर्ष O है।



कोण का माप (magnitude) घूमने की वह मात्रा है जिस से एक भुजा को शीर्ष के इर्द-गिर्द घुमाया जाना चाहिए जिससे कि दूसरी भुजा की स्थिति को प्राप्त किया जा सके।

आओ, कुछ उदाहरण देखें:

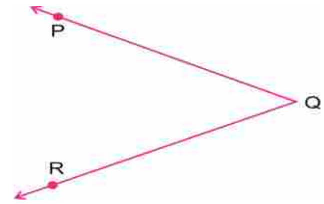
उदाहरण 3 : **दिए हुए कोण को सभी प्रकार से नाम दें।**



हल : ∠AOC अथवा ∠COA अथवा ∠O.

अथवा ∠1

उदाहरण 4 : **दिए हुए ∠PQR के शीर्ष और भुजाओं को नाम दो।**

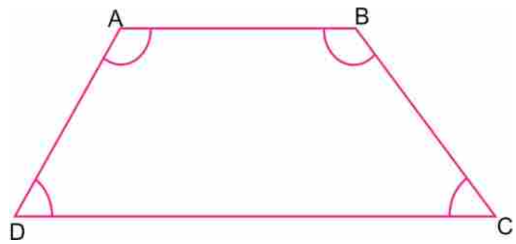


हल : शीर्ष = Q

∠PQR की भुजाएँ = $\overrightarrow{QP}$ और $\overrightarrow{QR}$

उदाहरण 5: **दी हुई आकृति के सभी कोणों के नाम बताओ।**

हल : दी हुई आकृति में चार कोण हैं:



(i) ∠DAB अथवा ∠BAD (A शीर्ष, AB और AD भुजाएँ हैं)

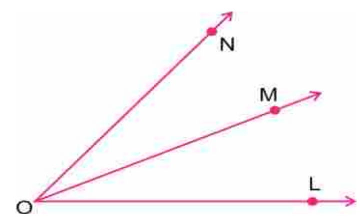
(ii) ∠ABC अथवा ∠CBA (B शीर्ष, BC शीर्ष BA भुजाएँ हैं)

(iii) ∠BCD अथवा ∠DCB (C शीर्ष, CB और CD भुजाएँ हैं)

(iv) ∠CDA अथवा ∠ADC (D शीर्ष, DC और DA भुजाएँ हैं)

उदाहरण 6: **सलंग्न आकृति में सभी कोणों के नाम दीजिए:**

हल : स्पष्टतय:, यहाँ दी हुई आकृति में तीन कोण बनते हैं।



(i) ∠LOM अथवा ∠MOL

(ii) ∠MON अथवा ∠NOM

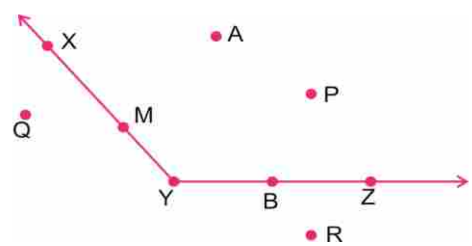
(iii) ∠NOL अथवा ∠LON

उदाहरण 7: **सलंग्न आकृति में, वे बिन्दु बताइए जो स्थित है:**

(i) ∠XYZ के अभ्यंतर (आन्तरिक) भाग में

(ii) ∠XYZ के बर्हिभाग (बाह्यंतर) में

(iii) ∠XYZ के ऊपर



हल : (i) बिन्दु A और P, ∠XYZ के अभ्यंतर में है।

(ii) बिन्दु Q और R, ∠XYZ के बर्हिभाग में है।

(iii) बिन्दु X, M, Y, B और Z, ∠XYZ के ऊपर है।

उदाहरण 8 : **सलंग्न आकृति में, प्रदत्त कोणों के दूसरे नाम लिखो:**

(i) ∠1 (ii) ∠2 (iii) ∠3 (iv) ∠a (v) ∠b

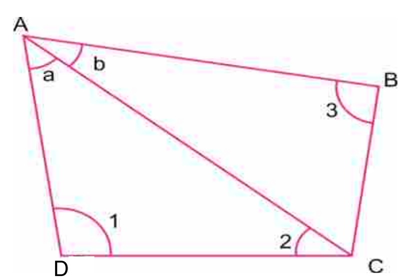
हल : (i) ∠1 = ∠ADC अथवा ∠CDA

(ii) ∠2 = ∠ACD अथवा ∠DCA

(iii) ∠3 = ∠CBA अथवा ∠ABC

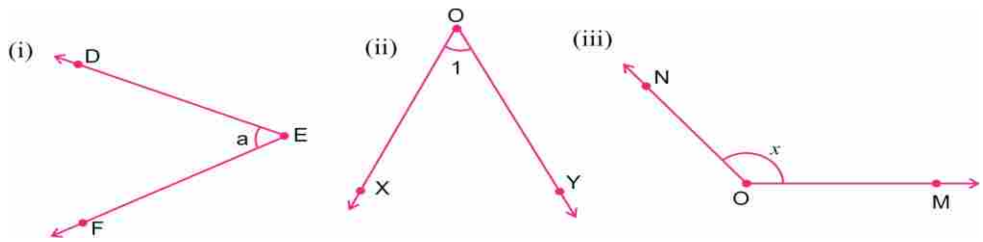
(iv) ∠a = ∠DAC अथवा ∠CAD

(v) ∠b = ∠BAC अथवा ∠CAB

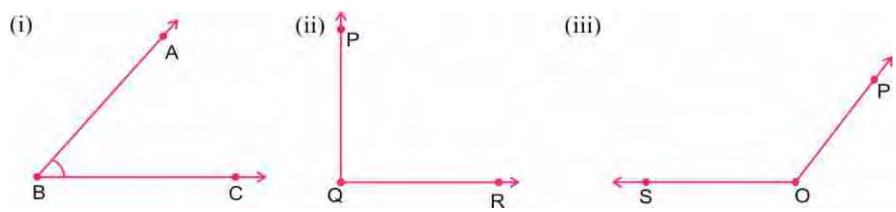


प्रश्नावली 8.3

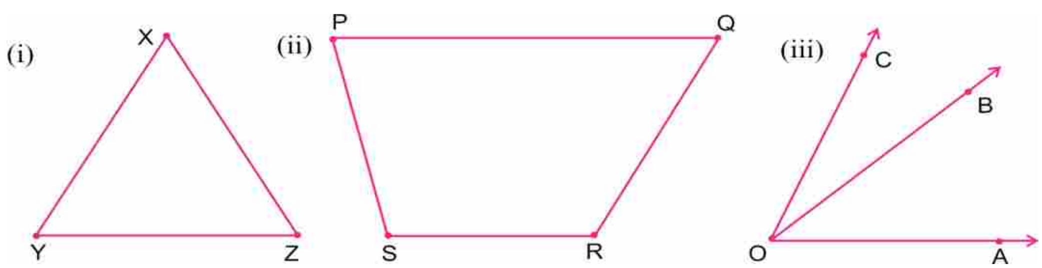
1. प्रदत्त (दिए हुए) कोणों को सभी प्रकार से नाम दे:



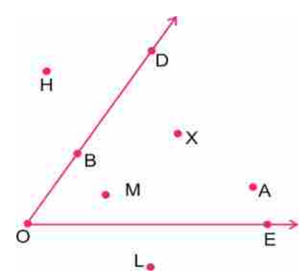
2. प्रदत्त (दिए हुए) कोणों के शीर्ष और भुजाओं के नाम दे:–



3. प्रदत्त (दी हुई) आकृति के सभी कोणों के नाम दे:–



4. प्रदत्त आकृति में, बिन्दुओं के नाम बताएँ जो स्थित है

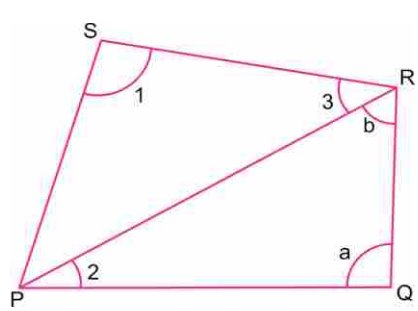


(i) ∠DOE के अभ्यंतर भाग में

(ii) ∠DOE के बर्हिभाग में

(iii) ∠DOE के ऊपर

5. प्रदत्त आकृति में, दिए हुए कोणों के दूसरे नाम लिखे:–



(i) ∠1

(ii) ∠2

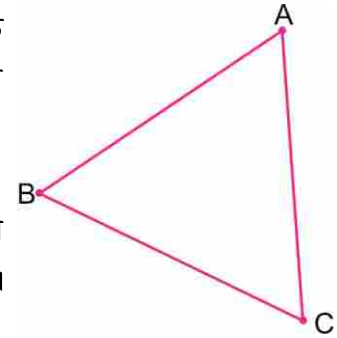
(iii) ∠3

(iv) ∠a

(v) ∠b

8.12 त्रिभुज (Triangles)

कोई तीन असंरेखी बिन्दु A, B और C लीजिए। उनको AB, BC और AC के रूप में जोड़िए। तीन असंरेखी (असंरेख) बिन्दुओं को रेखाखण्डों द्वारा जोड़कर बनी आकृति एक त्रिभुज कहलाती है।



एक त्रिभुज एक बन्द आकृति होती है जो तीन रेखाखण्डों से बनी होती है।

'Δ' का चिह्न त्रिभुज को दर्शाने के लिए प्रयोग किया जाता है। इस त्रिभुज को ΔABC, ΔACB, ΔBCA, ΔBAC, ΔCAB के रूप में भी लिखा जा सकता है।

(i) तीन बिन्दु A, B और C इसके शीर्ष कहलाते हैं।

(ii) रेखाखण्ड AB, BC और AC इसकी तीन भुजाएँ कहलाती हैं।

(iii) तीन कोण ∠ABC अथवा ∠B, ∠BCA अथवा ∠C, ∠BAC अथवा ∠A इसके अभ्यंतर (आन्तरिक) कोण अथवा केवल कोण कहलाते हैं।

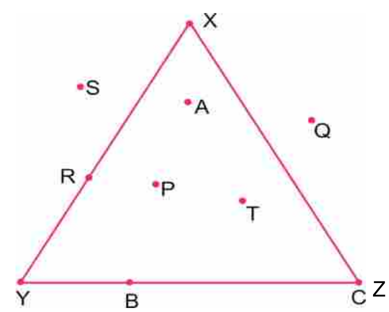
एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ और तीन कोण जब एक साथ लिए जाते हैं तो त्रिभुज के छह भाग अथवा तत्व कहलाते हैं। नोट कीजिए कि तीन शीर्ष त्रिभुज का भाग नहीं होते क्योंकि इनको मापा नहीं जा सकता।

ΔABC में, हम देखते हैं कि भुजाएँ AB और AC शीर्ष A पर मिलती हैं और BC तीसरी भुजा है। इसलिए हम कह सकते हैं कि 'BC शीर्ष A की सम्मुख भुजा है और A, BC के सम्मुख शीर्ष है।

एक त्रिभुज सबसे कम भुजाओं वाला बहुभुज है।

8.12.1 एक त्रिभुज का अभ्यंतर और बर्हिभाग (Interior and Exterior of a Triangle)

एक त्रिभुज तल में सभी बिन्दुओं को तीन भागों में बाँटता है।



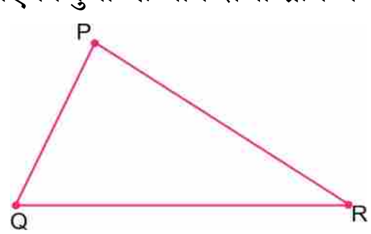
(i) तल का वह भाग जो उन सभी बिन्दुओं से बना होता है जिनको, त्रिभुज ने घेरा होता है त्रिभुज का अभ्यंतर कहलाता है। अभ्यंतर भाग आकृति में बिन्दु A, P और T , ΔXYZ के अभ्यंतर भाग में है।

(ii) तल का वह भाग जो उन बिन्दुओं से बना है जो त्रिभुज के ऊपर है, त्रिभुज की परिसीमा (सीमा) कहलाते हैं।
आकृति में, X, R, Y, B और Z, ΔXYZ की सीमा पर है।
ΔXYZ का अभ्यंतर भाग इसकी परिसीमा के साथ 'त्रिभुजी क्षेत्र' कहलाता है।

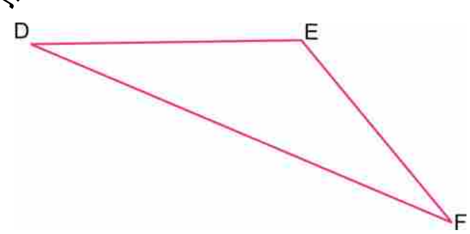
(iii) तल का वह भाग जो उन बिन्दुओं से बना होता है जिनको त्रिभुज ने नहीं घेरा होता, त्रिभुज का बर्हिभाग कहलाता है।
आकृति में, Q और S ,ΔXYZ के बर्हिभाग में है।
आओ! कुछ उद्धरणों (उदाहरणों) पर विचार करते हैं:

उदाहरण 9 : नीचे दिए गए त्रिभुजों के नाम सभी क्रम में लिखिए:-

(i)



(ii)

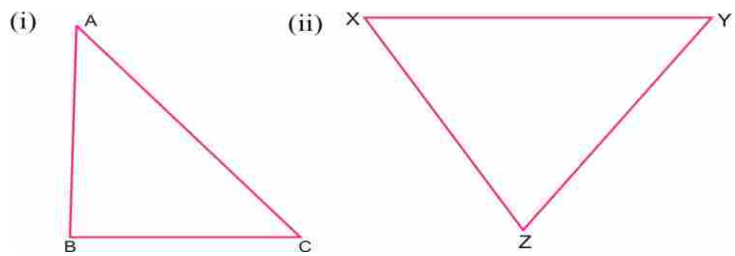


हल : (i) दिए हुए (प्रदत्त) त्रिभुजों के नाम हैं)

ΔPQR, ΔPRQ, ΔQPR, ΔQRP, ΔRPQ अथवा ΔRQP

(ii) दिए हुए त्रिभुजों के नाम है: Δ DEF , ΔDFE, ΔEDF, ΔEFD, ΔFED अथवा ΔFDE.

उदाहरण 10 : नीचे दिए गए त्रिभुजों के शीर्ष, भुजाओं और कोणों के नाम लिखो।



हल : (i) (a) शीर्ष = A, B और C

(b) भुजाएँ = AB अथवा BA, BC अथवा CB, AC अथवा CA

(c) कोण = ∠BAC अथवा ∠A, ∠ACB अथवा ∠C, ∠ABC अथवा ∠B.

(ii) (a) शीर्ष = X, Y और Z

(b) भुजाएँ = XY और YX, YZ और ZY, XZ और ZX.

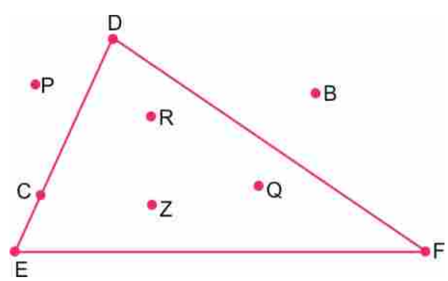
(c) कोण = ∠XYZ अथवा ∠Y, ∠YZX अथवा ∠Z, ∠ZXY अथवा ∠X.

उदाहरण 11 : सलंग्न आकृति में, उन बिंदुओं के नाम बताएँ।

(i) ΔDEF की परिसीमा (सीमा) पर

(ii) ΔDEF के अभ्यंतर भाग में

(iii) ΔDEF के बर्हिभाग में



हल : (i) ΔDEF की परिसीमा के ऊपर बिन्दु D, C, E, F

(ii) ΔDEF के अभ्यंतर भाग में = R, Z, Q

(iii) ΔDEF के बर्हिभाग में = P, B

उदाहरण 12 : प्रदत्त आकृति में, नाम लिखिए:

(i) सभी त्रिभुजों के

(ii) त्रिभुज जिनका शीर्ष A है।

(iii) त्रिभुज जिनका शीर्ष E है।

हल : (i) यहाँ कुल पाँच त्रिभुज हैं:

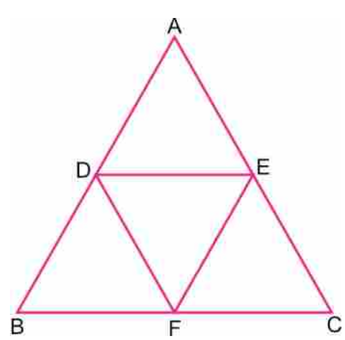
ΔADE, ΔDEF, ΔDBF, ΔEFC और ΔABC

(ii) यहाँ दो त्रिभुज हैं जिनका शीर्ष A है

ΔADE, ΔABC

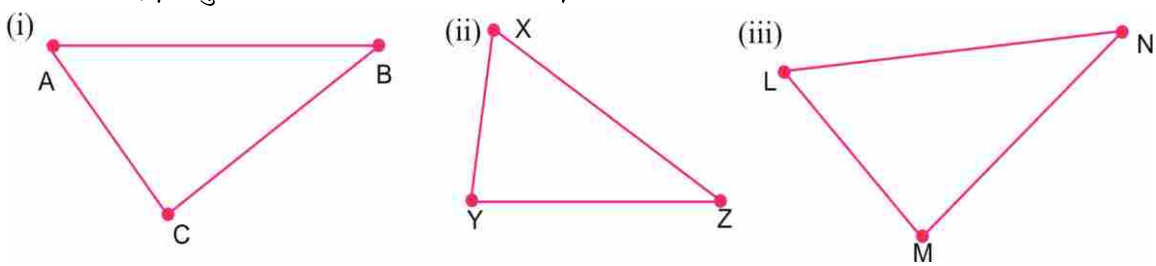
(iii) यहाँ तीन त्रिभुज हैं, जिनका शीर्ष E है।

ΔEDA, ΔEDF, ΔEFC

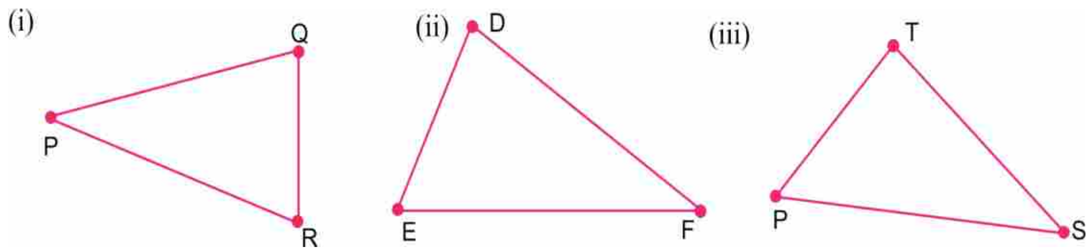


प्रश्नावली 8.4

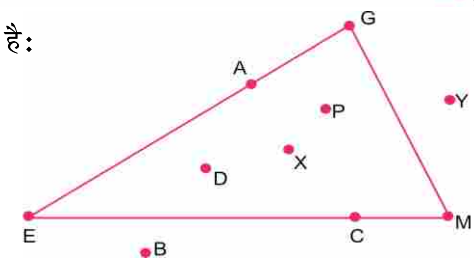
1. नीचे दिए त्रिभुजों के नाम सभी क्रम में लिखिए:



2. नीचे दिए त्रिभुजों के शीर्षों, भुजाओं और कोणों के नाम लिखिए:



3. दी गई आकृति में, उन बिंदुओं के नाम दें जो स्थित है:

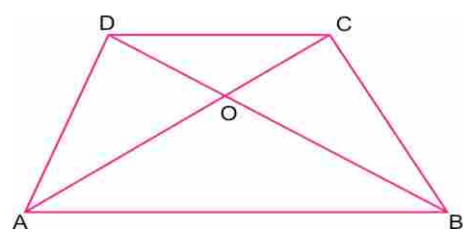


   (i) ΔGEM की परिसीमा (सीमा) से ऊपर।

   (ii) ΔGEM के अभ्यंतर भाग में।

   (iii) ΔGEM के बर्हिभाग में।

4. दी गई आकृति में, नाम लिखिए:-



   (i) सभी त्रिभुजों का।

   (ii) त्रिभुजें जिनका शीर्ष O है।

   (iii) त्रिभुजें जिनका शीर्ष A है।

5. निम्नलिखित रिक्त स्थान भरें:-

   (i) एक त्रिभुज के .... शीर्ष होते हैं।

   (ii) एक त्रिभुज के .... कोण होते हैं।

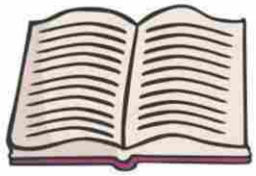
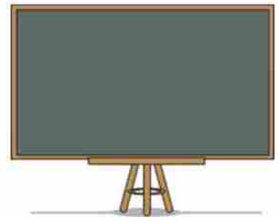
   (iii) एक त्रिभुज की ....भुजाएँ होती हैं।

   (iv) एक त्रिभुज तल को .... भागों में बांटता है।

   (v) एक त्रिभुज के .... भाग होते हैं।

8.13 चतुर्भुज (Quadrilateral)

यदि आप चारों तरफ देखें तो आपको बहुत सारी वस्तुएँ मिलेंगीं जो कि रेखागणितिक रूप में चार भुजाओं वाली बन्द आकृतियाँ हैं। उदाहरण के रूप में किताब का ऊपरी भाग, दरवाज़े का सामने वाला भाग, ब्लैक बोर्ड का तल आदि। ये सभी वस्तुएँ चार भुजाओं वाली बन्द आकृतियों से मेल खाती हैं। यह चतुर्भुज कहलाता है।

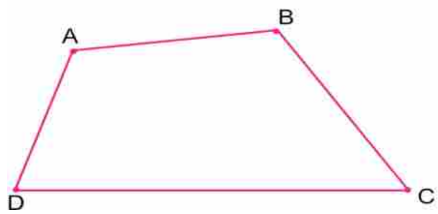
 

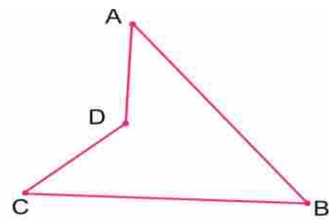
एक चतुर्भुज चार भुजाओं वाली बन्द आकृति है जो कि चार रेखाखण्डों से घिरी होती है। यह चार भुजाओं वाली बहुभुज है। शब्द चतुर्भुज (Quadrilateral) दो शब्दों चतुर् (Quadri) जिसका अर्थ है 'चार' और भुज (lateral) जिसका अर्थ है 'भुजा' से बना है।

मान लीजिए एक तल में चार बिन्दु A, B,C, D हैं।

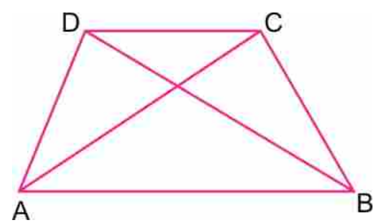
(i) उनमें से कम से कम तीन असंरेख हैं।

(ii) रेखाखण्ड AB, BC, CD और DA अपने अन्त बिन्दुओं के अतिरिक्त कहीं और प्रतिच्छेद नहीं करते।





एक चतुर्भुज का नाम इसके शीर्षों को चक्रीय क्रम में लिख कर दिया जा सकता है। अभिप्राय: ABCD अथवा BCDA (ABDC नहीं)। एक चतुर्भुज ABCD में है।



(i) चार शीर्ष A, B, C और D.

(ii) चार भुजाएँ AB, BC, CD और DA

(iii) चार कोण ∠A, ∠B, ∠C और ∠D.

(iv) दो विकर्ण AC और BD.

चतुर्भुज के सम्मुख शीर्षों को जोड़ने वाले रेखाखण्ड इसके विकर्ण कहलाते हैं। दो विकर्ण चतुर्भुज को चार त्रिभुजों में बाँटते हैं।

आसन्न भुजाएँ (Adjacent sides) : एक चतुर्भुज की दो भुजाएँ आसन्न भुजाएँ कहलाती हैं, यदि उनका एक उभयनिष्ठ (सांझा) अन्त बिन्दु (शीर्ष) हो।

आकृति में, AB, BC; BC, CD ; CD, DA; DA, AB, चतुर्भुज ABCD की आसन्न भुजाओं के चार युग्म हैं।

सम्मुख भुजाएँ (Opposite sides) : एक चतुर्भुज की दो भुजाएँ सम्मुख भुजाएँ कहलाती है, यदि उनका कोई उभयनिष्ठ अन्त बिन्दु नहीं होता।

आकृति में, AB, CD और AD, BC चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं के दो युग्म हैं।

आसन्न कोण (Adjacent Angles) : एक चतुर्भुज के दो कोण आसन्न कोण कहलाते हैं, यदि उनकी एक उभयनिष्ठ (सांझी) भुजा हो।

आकृति में ∠A और ∠B, ∠B और ∠C, ∠C और ∠D, ∠D और ∠A आसन्न कोणों के युग्म हैं।

सम्मुख कोण (Opposite Angles): एक चतुर्भुज के दो कोण सम्मुख कोण कहलाते हैं, यदि वे आसन्न कोण न हो।

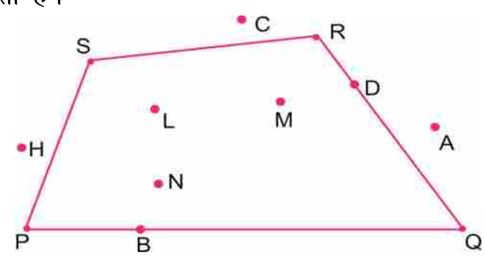
आकृति में, ∠A और ∠C, ∠B और ∠D सम्मुख कोणों के युग्म हैं।

8.13.1 एक चतुर्भुज का अभ्यंतर और बर्हिभाग (Interior & Exterior of A Quadrilateral)

एक चतुर्भुज एक तल में सभी बिन्दुओं को तीन भागों में बाँटता है।

(i) चतुर्भुज के अन्दर आने वाला क्षेत्र चतुर्भुज का अभ्यंतर भाग कहलाता है।

आकृति में, L, M, N चतुर्भुज PQRS के अभ्यंतर बिन्दु है।



(ii) वे बिन्दु जो चतुर्भुज की सीमा के ऊपर स्थित होते हैं, चतुर्भुज के ऊपर कहलाते हैं।

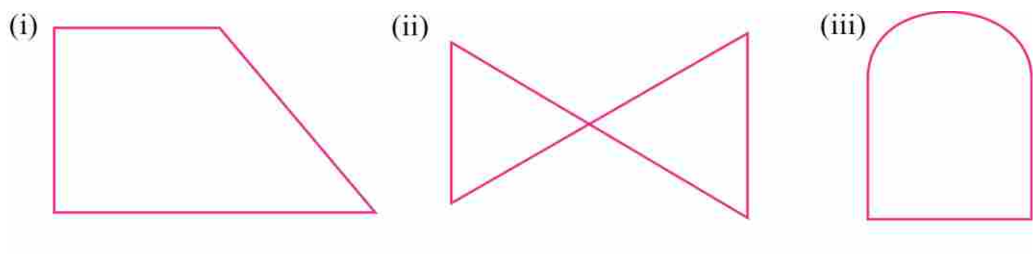
आकृति में, बिन्दु P, B, Q, D, R और S चतुर्भुज के ऊपर है।

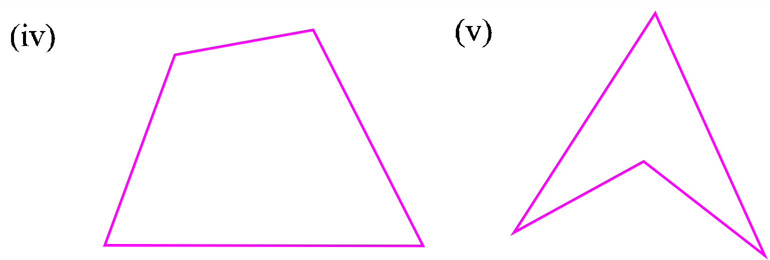
चतुर्भुज का आन्तरिक भाग इसकी सीमा सहित चतुर्भुजीय क्षेत्र कहलाता है।

(iii) चतुर्भुज की सीमा के बाहर वाला क्षेत्र चतुर्भुज का बर्हिभाग कहलाता है।

आकृति में, बिन्दु A, C और H चतुर्भुज PQRS के बर्हिभाग पर है।

उदाहरण 13 : निम्नलिखित में से चुतुर्भज की पहचान करें:





हल : (i) यह एक चतुर्भुज है क्योंकि सभी भुजाएँ अन्त बिन्दुओं पर मिलती हैं।

(ii) यद्यपि इसकी चार भुजाएँ हैं, पर यह एक चतुर्भुज नहीं है क्योंकि इसकी भुजाएँ अन्त बिन्दुओं पर नहीं मिलतीं।

(iii) यह एक चतुर्भुज नहीं है क्योंकि इसकी तीन भुजाएँ हैं और एक वक्र है।

(iv) यह एक चतुर्भुज है जिसकी चार भुजाएँ हैं जो अन्त बिन्दुओं पर मिलती हैं।

(v) यह एक चतुर्भुज है जिसकी चार भुजाएँ अन्त बिन्दुओं पर मिलती हैं।

उदाहरण 14 : प्रदत्त चतुर्भुज EFGH के लिए, नाम बताएँ:

(i) सभी शीर्षों के **(ii) सभी भुजाओं के**

(iii) सभी कोण **(iv) HE की सम्मुख भुजा**

(v) G के आसन्न कोण

हल : (i) शीर्ष = E, F, G, H

(ii) भुजाएँ = EF, FG, GH, HE

(iii) कोण = ∠E, ∠F, ∠G, ∠H

(iv) HE की सम्मुख भुजा GF है।

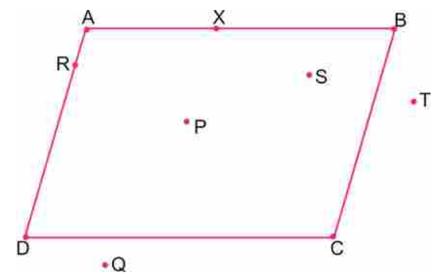
(v) G के आसन्न कोण ∠H और ∠F है।

उदाहरण 15 : दी हुई आकृति ABCD में, बिन्दुओं के नाम दें:

(i) इसके अभ्यंतर में

(ii) इसके बर्हिभाग में

(iii) इसकी परिसीमा पर



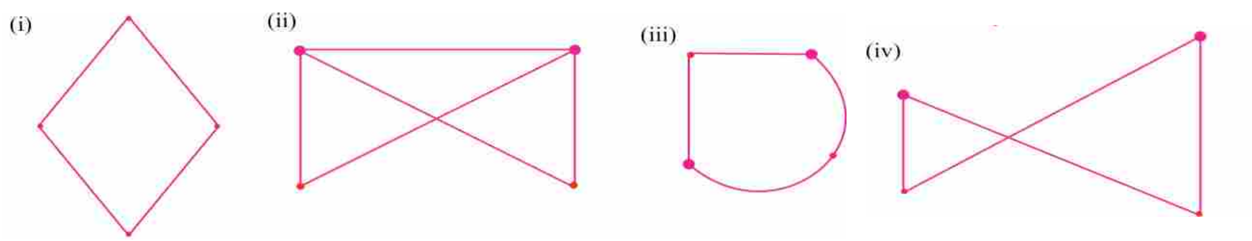
हल : (i) ABCD के अभ्यंतर बिन्दु P, S है।

(ii) ABCD के बर्हिभाग बिन्दु Q, T है।

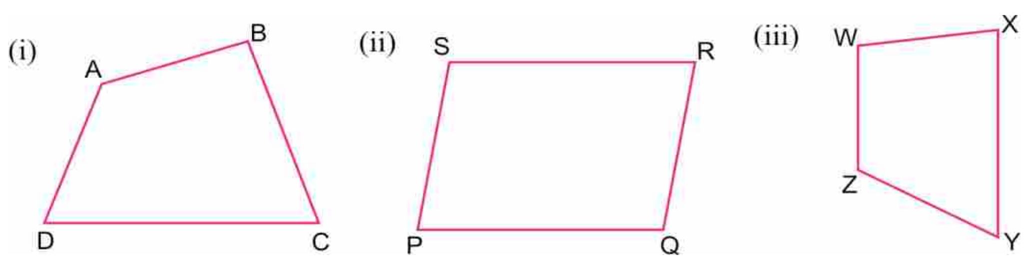
(iii) इसकी परिसीमा के ऊपर बिन्दु A, X, B, C, D, R है।

प्रश्नावली 8.5

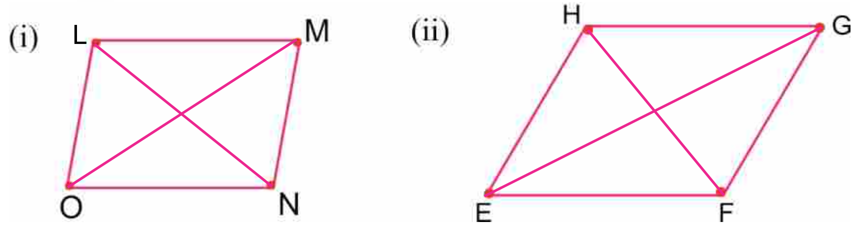
1. निम्न में से चतुर्भुज की पहचान करें:



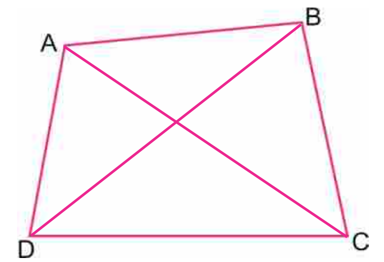
2. दिए हुए चतुर्भुजों के नाम बताएँ।



3. दिए हुए चतुर्भुजों के सभी शीर्षों, कोणों, भुजाओं, विकर्णों के नाम लिखो।



4. दिए हुए चतुर्भुज ABCD के लिए नाम लिखिए:



(i) AB के सम्मुख भुजा

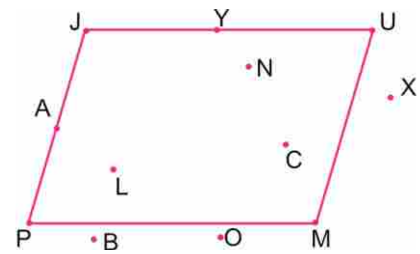
(ii) B के आसन्न कोण

(iii) B और D को मिलाने वाला विकर्ण

(iv) A के सम्मुख कोण

(v) CD की आसन्न भुजाएँ

5. दिए हुए चतुर्भुज JUMP में, बिन्दुओं के नाम बताइए:



(i) इसके अभ्यंतर में

(ii) इसके बर्हिभाग में

(iii) इसकी परिसीमा पर

6. रिक्त स्थान भरो:-

(i) एक चतुर्भुज के .... शीर्ष हैं।

(ii) एक चतुर्भुज की .... भुजाएँ हैं।

(iii) एक चतुर्भुज के .... कोण हैं।

(iv) एक चतुर्भुज के .... विकर्ण हैं।

(v) एक विकर्ण चतुर्भुज को .... त्रिभुजों में बाँटता है।

(vi) एक चतुर्भुज के सम्मुख शीर्षों को मिलाने वाला रेखाखण्ड इसका .... कहलाता है।

(vii) एक चतुर्भुज का अभ्यंतर भाग और सीमा सम्मिलित रूप में .... क्षेत्र बनाते हैं।

7. सही अथवा गलत बताओ:

(i) एक विकर्ण चतुर्भुज को चार त्रिभुजों में बाँटता है।

(ii) कोण जिनका उभयनिष्ठ शीर्ष होता है, आसन्न कोण कहलाते हैं।

(iii) भुजाएँ जिनका एक उभयनिष्ठ शीर्ष होता है, आसन्न भुजाएँ कहलाती हैं।

(iv) एक चतुर्भुज के चार विकर्ण होते है।

(v) चतुर्भुजीय क्षेत्र चतुर्भुज के बाह्य भाग और सीमा से बनता है।

8.14 वृत्त (Circles)

वृत्ताकार आकृतियों के बारे में सोचो और आपको अपने इर्द-गिर्द बहुत-सी आकृतियाँ मिल जाएंगी।

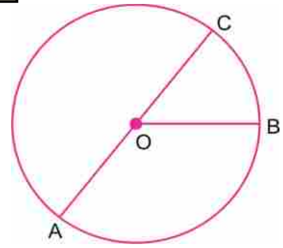
उदाहरण:- चूड़ी, सिक्का, रोटी आदि।

एक वृत्त एक बहुत ही प्रचलित रेखागणितीय आकृति है जो आपको वृत्ताकार आकृतियों के बारे में याद करवाती है। एक वृत्त एक सरल बन्द वक्र है न कि बहुभुज।

वृत्त एक तल में, उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय (समूह) है जिनकी दूरी एक स्थिर बिन्दु से निश्चित रहती है।

- तीन असंरेख बिन्दुओं में से केवल एक ही वृत्त खींचा जा सकता है।

8.14.1 एक वृत्त के भाग (Parts of a circle)



केन्द्र (Centre) : वृत्त के अन्दर एक स्थिर बिन्दु, जिससे चक्र के ऊपर सारे बिन्दु समान दूरी पर होते हैं, वृत्त का केन्द्र कहलाता है।

आकृति में, O वृत्त का केन्द्र है।

त्रिज्या (Radius) : वृत्त के ऊपर किसी बिन्दु से इसके केन्द्र के साथ दूरी उस वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। इसको 'r' से निरूपित किया जाता है। आकृति में, OA, OB और OC वृत्त की त्रिज्याएँ हैं और OA=OB=OC भी हैं।

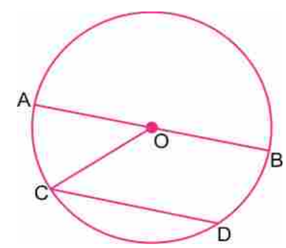
व्यास (Diameter) : वृत्त के केन्द्र में से गुजरने वाला रेखाखण्ड जो वृत्त के ऊपर कोई दो बिन्दुओं को मिलाता है, उस वृत्त का व्यास कहलाता है। इसे 'd' से निरुपित किया जाता है।

आकृति में, AC वृत्त का व्यास है।

- नोट कीजिए कि केन्द्र (O) व्यास का मध्य बिन्दु होता है।
- व्यास वृत्त की त्रिज्या का दोगुना होता है।

  भाव व्यास = 2 × त्रिज्या

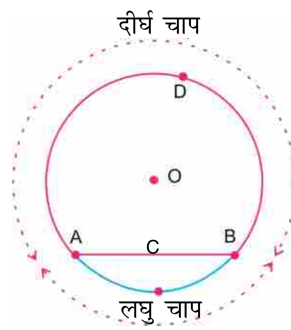
  अथवा $d = 2r$



जीवा (Chord) : एक वृत्त के ऊपर कोई दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड उस वृत्त की जीवा कहलाता है।

आकृति में, CD और AB जीवाएँ हैं।

- वृत्त का व्यास वृत्त की सबसे बड़ी जीवा है।



चाप (Arc) : वृत्त का एक भाग, वृत्त की चाप कहलाता है।

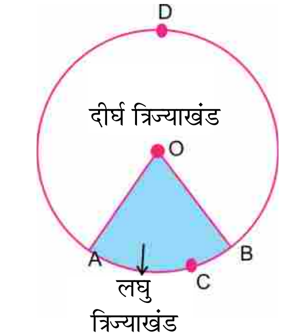
आकृति में, ACB भाग वृत्त की एक चाप है और $\overset{\frown}{AB}$ के रूप में लिखा जाता है।

- एक वृत्त की एक चाप इसको दो भागों में बाँटती है। छोटा भाग लघु चाप कहलाता है और बड़ा भाग दीर्घ चाप कहलाता है।

वृत्तखण्ड (Segment) : वृत की एक चाप और इसकी संगत जीवा से घिरा हुआ क्षेत्र वृत्तखंड कहलाता है।

एक वृत्त की लघु चाप और इसकी संगत जीवा के द्वारा बनाया गया वृत्तखंड लघु वृत्त खंड कहलाता है। एक वृत्त की दीर्घ चाप और इसकी संगत जीवा द्वारा बनाया गया वृत्तखंड दीर्घवृत्त खंड कहलाता है।

त्रिज्याखंड (Sector) : ऐसा क्षेत्र जो एक चाप और वृत्त की दो त्रिज्याओं (जो कि चाप के अन्त बिन्दुओं को मिलती है) से घिरा होता है त्रिज्याखंड कहलाता है।

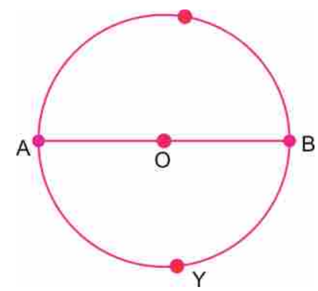


त्रिज्याखंड जो कि लघु चाप के द्वारा बनाया जाता है लघु त्रिज्याखंड कहलाता है। त्रिज्याखंड जो कि दीर्घ चाप के द्वारा बनाया जाता है दीर्घ त्रिज्याखंड कहलाता है।

दी हुई आकृति में, $\overparen{AB}$ एक चाप है और OA तथा OB दो त्रिज्याएँ हैं जोकि वृत्तीय क्षेत्र के दो भागों में बाँटते हैं।

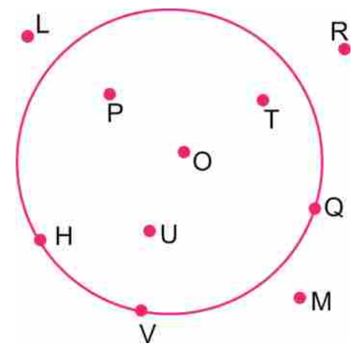
OACB लघु वृत्तखंड है और OADB दीर्घ वृत्तखंड है।

अर्धवृत्त (Semi-circle): वृत्त का व्यास इसको दो बराबर भागों में बाँटता है। प्रत्येक भाग अर्धवृत्त कहलाता है।



दी हुई आकृति में, AB केन्द्र O वाले वृत्त का व्यास है। प्रत्येक भाग AXB और AYB जिसमें वृत्त को बाँटा गया है, एक अर्धवृत्त है।

8.14 एक वृत्त का अभ्यंतर और बर्हिभाग (Interior and Exterior of a circle)



एक वृत्त एक तल में सभी बिन्दुओं को तीन भागों में बाँटता है।

(i) तल का वह भाग जो उन सभी बिन्दुओं से बना होता है जिन को वृत्त ने घेरा होता है, वृत्त का अभ्यंतर भाग कहलाता है।

आकृति में, बिन्दु O, T, P, U वृत्त के अभ्यंतर भाग में है।

(ii) तल का वह भाग जो उन सभी बिन्दुओं से बना होता है जो वृत्त के ऊपर हो वृत्त की सीमा कहलाता है।

आकृति में, बिन्दु V, Q, H वृत्त की सीमा के ऊपर हैं।

- एक वृत्त की सीमा की लम्बाई, वृत्त की परिधि (परिमाप/घेरा) के रूप में जानी जाती है।
- वृत्त का अभ्यंतर भाग और सीमा वृत्तीय क्षेत्र बनाते हैं।

(iii) तल का वह भाग जो उन सभी बिन्दुओं से बना है जिन को वृत्त ने नहीं घेरा, वृत्त का बर्हिभाग कहलाता है।

आकृति में, बिन्दु L, R और M वृत्त के बर्हिभाग पर है।

आओ कुछ उदाहरण देखें।

उदाहरण 16 : सलंग्न आकृति देखें और नाम लिखें।

(i) केन्द्र **(ii) त्रिज्या** **(iii) व्यास**

(iv) जीवा **(v) छाया अंकित भाग की चाप** **(vi) छाया अंकित त्रिज्याखण्ड**

हल : (i) केन्द्र : O

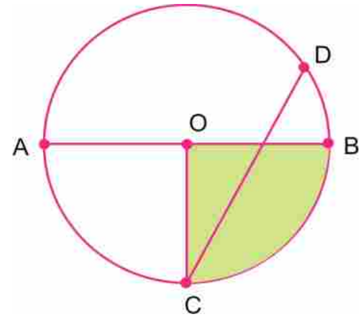
(ii) त्रिज्या : OA, OB, OC

(iii) व्यास : AB

(iv) जीवा : AB, CD

(v) चाप : $\overset{\frown}{CB}$ अथवा $\overset{\frown}{BC}$

(vi) त्रिज्याखंड : OBC

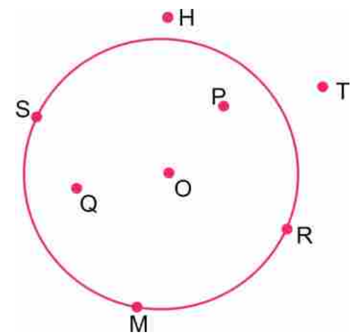


उदाहरण 17 : दी हुई आकृति में बिन्दुओं के नाम बताएं:

(i) इसके अभ्यंतर भाग में

(ii) इसके बर्हिभाग में

(iii) इसकी सीमा पर



हल : (i) वृत्त के अभ्यंतर भाग में बिन्दु = O, P, Q

(ii) वृत्त के बर्हिभाग पर बिन्दु = T, H

(iii) वृत्त की सीमा पर बिन्दु = S, M, R

उदाहरण 18 : यदि वृत्त का अर्धव्यास 3 सेमी है, वृत्त का व्यास पता करो।

हल : दिया है वृत्त का अर्धव्यास = 3सेमी

हम जानते हैं व्यास = 2× अर्धव्यास

= 2 × 3 = 6 सेमी

उदाहरण 19 : यदि वृत्त का व्यास 20 सेमी है तो वृत्त की त्रिज्या पता करो।

हल : दिया है वृत्त का व्यास = 20सेमी

∴ वृत्त की त्रिज्या = व्यास ÷ 2

= 20 ÷ 2 =10सेमी

प्रश्नावली 8.6

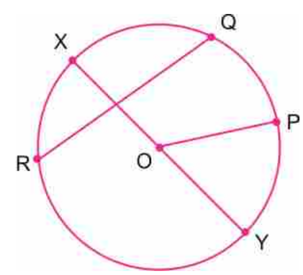
1. दी हुई आकृति में नाम लिखिए:

   (i) केन्द्र

   (ii) त्रिज्या

   (iii) व्यास

   (iv) जीवा



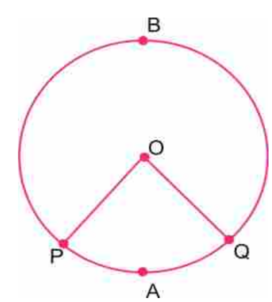
2. दी हुई आकृति में नाम लिखिए:

   (i) लघु चाप

   (ii) दीर्घ चाप

   (iii) लघु त्रिज्याखंड

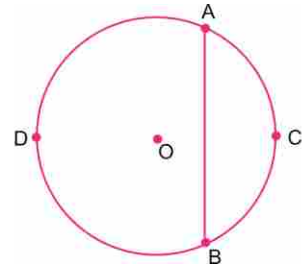
   (iii) दीर्घ त्रिज्याखंड



3. दी हुई आकृति में, नाम लिखिए:

(i) लघु वृत्त खंड

(ii) दीर्घ वृत्त खंड

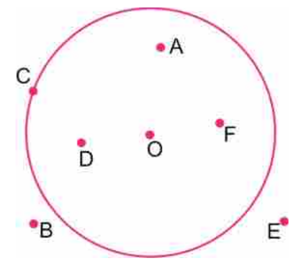


4. दी हुई आकृति में, बिन्दुओं के नाम बताओ:

(i) इसके अभ्यंतर भाग में

(ii) इसकी सीमा पर (परिधि)

(iii) इसके बर्हिभाग पर



5. उस वृत्त का व्यास पता करो जिसकी त्रिज्या है:

(i) 5सेमी (ii) 4मी. (iii) 10सेमी

6. यदि वृत्त का व्यास 12 सेमी है, त्रिज्या पता करो।

7. रिक्त स्थान भरो:-

(i) एक वृत्त के इर्द-गिर्द की दूरी .... कहलाती है।

(ii) एक वृत्त का व्यास इसकी त्रिज्या का .... होता है।

(iii) वृत्त की सबसे बड़ी जीवा .... है।

(iv) एक वृत्त की सभी त्रिज्याएँ .... लम्बाई की होती है।

(v) एक वृत्त का व्यास .... में से निकलता है।

(vi) एक वृत्त तल में सभी बिन्दुओं को .... भागों में बाँटता है।

8. सही अथवा गलत बताओ:

(i) एक वृत्त का व्यास इसकी त्रिज्या के बराबर होता है।

(ii) व्यास वृत्त की एक जीवा है।

(iii) त्रिज्या वृत्त की एक जीवा है।

(iv) प्रत्येक वृत्त का एक केन्द्र होता है।

(v) एक जीवा और चाप के द्वारा घेरा गया क्षेत्र वृत्तखंड कहलाता है।

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. एक बिन्दु में से कितनी रेखाएँ गुज़र सकती है?

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) अनगिनत

2. एक रेखा के बिन्दुओं की संख्या .... होती है।

(a) 2 (b) 4 (c) 1 (d) अनगिनत

3. दो बिन्दुओं में से गुज़रने वाली रेखाओं की संख्या .... होती है।

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) अनगिनत

4. एक बन्द वक्र तल को कितने भागों में बाँटता है?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

5. एक चतुर्भुज के .... विकर्ण होते हैं।

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

6. निम्नलिखित में से कौन सा बहुभुज नहीं है?

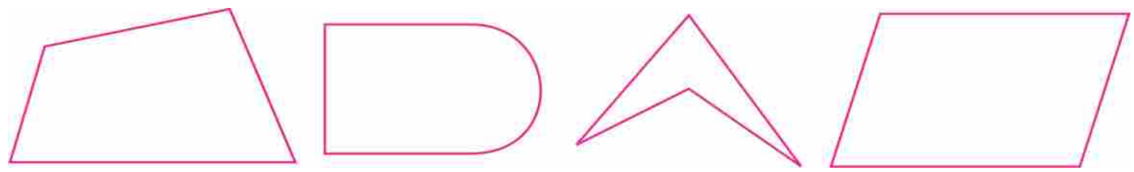
(a) त्रिभुज (b) पंचभुज (c) वृत्त (d) चतुर्भुज

7. एक त्रिभुज के .... भाग होते है।

(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 2

8. निम्नलिखित में से कौन सा एक चतुर्भुज नहीं है?

(a) (b) (c) (d)



9. एक चतुर्भुज के सम्मुख शीर्षों को मिलाने वाला रेखाखंड .... कहलाता है।

(a) विकर्ण (b) भुजा (c) कोण (d) क्षेत्र

10. एक वृत्त की त्रिज्या 4 सेमी हैं तो व्यास .... है।

(a) 8सेमी (b) 2सेमी (c) 6सेमी (d) 12सेमी

11. एक वृत्त का व्यास 12 सै.मी है तो त्रिज्या .... है।

(a) 24सेमी (b) 6सेमी (c) 18सेमी (d) 4सेमी

12. एक वृत्त की सबसे बड़ी जीवा .... है।

(a) चाप (b) परिधि (c) व्यास (d) त्रिज्या

सीखने के परिणाम

इस अध्याय के पूरा होने के बाद विद्यार्थीः

(i) बिन्दु, रेखा, रेखाखंड, किरण के बारे में जानने के योग्य हैं।

(ii) वक्र और इसकी किस्मों के बारे में जानने के योग्य हैं।

(iii) बहुभुज की भिन्न-भिन्न किस्मों भाव त्रिभुज और चतुर्भुज आदि और उनके भागों के बारे में जानने के योग्य है।

(iv) वृत्त और इसके भागों के बारे में जानने के योग्य हैं।

(v) रेखागणितिक अवधारणाओं को परिवेश में वर्णित करने के योग्य हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 8.1

2. AB, AC, AD, BC, CD, BD 3. अनगिनत 4. अनगिनत 5. एक

6. (i) O, A, B, C, D, या E (ii) BE (iii) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ या $\overrightarrow{OE}$
(iv) OA, OB, OC, OD, OE , DE, BE, BD

7. $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{QR}$

8. (i) ℓ और m (ii) p और n, n और ℓ, n और m, p और ℓ, p और m.

(iii) m और n (iv) P, Q, S और P, R, T

9. (i) n और p, q और p, m और q

(ii) m और ℓ, m और n, m और p, m और q, ℓ और n, ℓ और p, ℓ और q

(iii) p और ℓ. (iv) E (v) G, E, C, A और F, D, C, B

10. (i) ℓ, n (ii) ℓ और m (iii) B (iv) m और ℓ, n और ℓ.

11. (i) F (ii) T (iii) F (iv) F (v) T

प्रश्नावली 8.2

1. (a) सरल वक्र : (i), (iii), (iv), (vi), (vii), (viii)

(b) खुले वक्र : (iii), (vi), (viii) बन्द वक्र : (i), (ii), (iv), (v), (vii)

2. (ii), (iii), (v) 4. (i) A B, Q (ii) R, N (iii) P, M

5. (i) D, E, A, B, C (ii) AB, BC, CD, DE, EA

(iii) AC, AD, BE, BD, CE (iv) AE और BC (v) A और D

प्रश्नावली 8.3

1. (i) ∠DEF, ∠FED, ∠E, ∠a (ii) ∠XOY, ∠YOX, ∠O, ∠1

(iii) ∠NOM, ∠MON, ∠O, ∠x

2.

	(i)	(ii)	(iii)
शीर्ष	B	Q	O
भुजाएँ	$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QR}$	$\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{OP}$

3. (i) ∠X, ∠Y, ∠Z (ii) ∠P, ∠Q, ∠R, ∠S (iii) ∠AOB, ∠BOC, ∠AOC

4. (i) A, X, M (ii) H, L (iii) D, B, O, E

5. (i) ∠S अथवा ∠PSR अथवा ∠RSP (ii) ∠RPQ अथवा ∠QPR

(iii) ∠SRP अथवा ∠PRS (iv) ∠Q अथवा ∠RQP अथवा ∠PQR (v) ∠PRQ अथवा ∠QRP

प्रश्नावली 8.4

1. (i) ΔABC, ΔACB, ΔBAC, ΔBCA, ΔCAB, ΔCBA.

(ii) ΔXYZ, ΔXZY, ΔYZX, ΔYXZ, ΔZXY, ΔZYX.

(iii) ΔLMN, ΔLNM, ΔMNL, ΔMLN, ΔNML, ΔNLM.

2.

	(i)	(ii)	(iii)
शीर्ष	P, R, Q	D, E, F	T, P, S
भुजाएँ	PR, QR, PQ	DE, EF, DF	TP, PS, TS
कोण	∠P, ∠R, ∠Q	∠D, ∠E, ∠F	∠T, ∠P, ∠S

3. (i) G, A, E, C, M (ii) P, X, D (iii) Y, B

4. (i) ΔAOD, ΔDOC, ΔBOC, ΔAOB, ΔABD, ΔBCD, ΔACD, ΔABC

(ii) ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD, ΔAOD

(iii) ΔAOB, ΔAOD, ΔABD, ΔABC, ΔACD

5. (i) 3 (ii) 3 (iii) 3 (iv) 3 (v) 6

प्रश्नावली 8.5

1. (i) **2.** (i) ABCD (ii) PQRS (iii) XYZW

3. (i) शीर्ष = O, N, M, L ; कोण = $\angle O$, $\angle N$, $\angle M$, $\angle L$

भुजाएँ = ON, NM, ML, LO ;विकर्ण = OM, NL

(ii) शीर्ष = H, G, F, E ; कोण = $\angle H$, $\angle G$, $\angle F$, $\angle E$

भुजाएँ = HG, GF, FE, EH ; विकर्ण = EG, FH

4. (i) CD (ii) $\angle A$ और $\angle C$ (iii) BD (iv) $\angle C$

(v) AD और BC

5. (i) L, N, C (ii) B, O, X (iii) P, M, U, Y, J, A

6. (i) 4 (ii) 4 (iii) 4 (iv) 2 (v) 2 (vi) विकर्ण

(viii) चर्तुभुज

7. (i) F (ii) F (iii) T (iv) F (v) F

प्रश्नावली 8.6

1. (i) O (ii) OP, OX, OY (ii) XY (iv) XY और QR

2. (i) PAQ (ii) PBQ (iii) OPAQ (iv) OPBQ

3. (i) ACBA (ii) ADBA

4. (i) A, O, F, D (ii) C (iii) B, E

5. (i) 10 सेमी (ii) 8 मी. (iii) 20 सेमी

6. 6 सेमी

7. (i) परिधि (ii) दुगुना (iii) व्यास (iv) समान

(v) केन्द्र (vi) 3

8. (i) गलत (ii) सही (iii) गलत (iv) सही

(v) सही

बहुवैकल्पिक प्रश्न

(1) d **(2)** d **(3)** a **(4)** c **(5)** b

(6) c **(7)** b **(8)** b **(9)** a **(10)** a

(11) b **(12)** c

J7X6Y8

9

प्रारम्भिक आकारों को समझना
(UNDERSTANDING ELEMENTARY SHAPES)

उद्देश्य

इस अध्याय में आप सीखेंगे

(i) भिन्न-भिन्न विधियों से रेखाखण्डों की तुलना करना।

(ii) रेखाखण्डों, कोणों आदि को मापना।

(iii) परिवेश (इर्द-गिर्द) की उदाहरणों से कोणों जो समझना।

(iv) भिन्न-भिन्न समुच्चयों (समूहों) में बहुभुजों के बारे में समझना।

(v) परिवेश (इर्द-गिर्द) में से 3D आकारों के बारे में समझना।

9.1 भूमिका (Introduction)

पिछले अध्याय में, हमने कुछ प्रारम्भिक रेखागणितीय अवधारणाओं जैसे कि बिन्दु, रेखा, किरण, रेखाखण्ड, कोण, त्रिभुज आदि के बारे में पढ़ा है।

हमारे आस-पास के प्रारम्भिक आकार या तो सीधी रेखाओं से बने है या वक्र रेखाओं से। उनके कोने, किनारे, तल होते हैं, वे खुले या बन्द वक्र हो सकते हैं। हम उनको रेखाखण्डों, कोणों, बहुभुजों, वृत्तों आदि में व्यवस्थित कर सकते हैं। इन सभी आकृतियों के भिन्न-भिन्न आकार और माप होते हैं। आओ, इन आकारों (आकृतियों) को मापना और तुलना करना सीखते हैं।

9.2 रेखाखण्डों को मापना और तुलना करना (Measuring And Comparing line Segments)

हम जानते हैं कि एक रेखाखण्ड एक रेखा का भाग होता है जिसके दो अन्त बिन्दु होते हैं।

इस प्रकार, एक तल में दो बिन्दु केवल एक रेखाखण्ड को निर्धारित करते हैं। रेखाखण्ड का माप अर्थात इन दो बिन्दुओं के बीच सबसे कम दूरी इसकी लम्बाई कहलाता है। इसको मीटर, सेंटीमीटरों, मिलीमीटरों आदि में मापा जाता है। एक रेखाखण्ड एक रेखा की निश्चित लम्बाई होती है, पर इसकी न चौड़ाई होती है न मोटाई। एक रेखाखण्ड की निश्चित लम्बाई इसके माप और तुलना को सम्भव बनाती है।

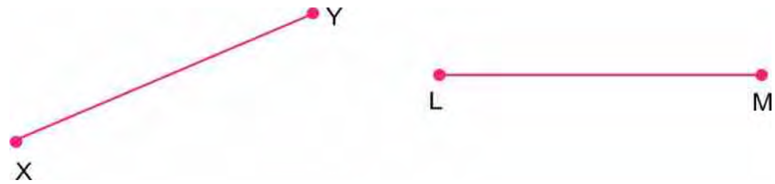
9.2.1 रेखाखण्डों की तुलना करना (Comparing line segments)

दो रेखाखण्डों की तुलना करने से अभिप्राय है: दोनों में से छोटा या बड़ा रेखाखण्ड पता करना। हम भिन्न भिन्न विधियों से दो रेखाखण्डों की तुलना कर सकते हैं।

विधि 1:- **देखकर तुलना**

AB और CD रेखाखण्डों को देखिए।

केवल उनको देखकर, हम सरलता से ज्ञात कर लेते हैं कि रेखाखण्ड AB, CD से छोटा है अर्थात AB<CD। किन्तु यह हर समय संभव नहीं है, यदि उनकी लंबाइयों के बीच में अन्तर बहुत कम हो।



यहाँ दोनों रेखाखण्ड XY और LM समान लंबाई के प्रतीत होते हैं और सिर्फ देखकर यह बताना मुश्किल है कि कौन सा बड़ा है और कौन सा छोटा है।

इसलिए हमें तुलना करने के लिए कुछ सटीक विधियों की आवश्यकता है।

विधि 2:- **अक्स द्वारा तुलना: आओ AB और CD की तुलना अक्स विधि के द्वारा करें।**

अक्स कागज़ के ऊपर AB का अक्स बनाओ और इसको CD के ऊपर इस प्रकार रखो कि बिन्दु A बिन्दु C के साथ संपाती हो जाए।

यहाँ तीन संभावनाएँ हो सकती हैं:

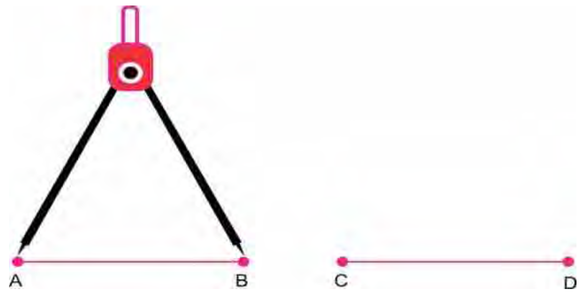
(i) B, C और D के बीच में है। हम कहते हैं कि AB, CD से छोटा है अर्थात AB<CD

(ii) B, पूर्णतय: D के ऊपर है। हम कहते हैं कि AB, CD से बराबर है अर्थात AB = CD.

(iii) B, D से परे (दूर) है। हम कहते हैं कि AB, CD से बड़ा है अर्थात AB>CD.

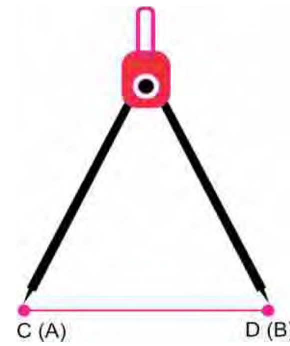
विधि 3:- **विभाजक के द्वारा तुलना:**

अपने ज्यामिति बॉक्स में देखो, आप दो नुकीली भुजाओं, जो कि एक नॉब (knob) की मदद से जुड़ी हुई हैं, वाली एक वस्तु देखेंगे, इस वस्तु को विभाजक के रूप में जाना जाता है। आओ विभाजक का प्रयोग करके दो रेखाखण्ड AB और CD की तुलना करें। विभाजक की एक भुजा के सुई A पर रखो और दूसरी भुजा को ध्यान से खोलो जिससे कि यह B से संपाती हो जाए। अब, विभाजक को ध्यान से उठा लीजिए जिससे कि दोनों भुजाओं के बीच का खुला भाग बदल न जाए। रेखाखण्ड C के C ऊपर एक सुई रखो और दूसरी भुजा CD के ऊपर किसी भी बिन्दु पर गिर सकती है।

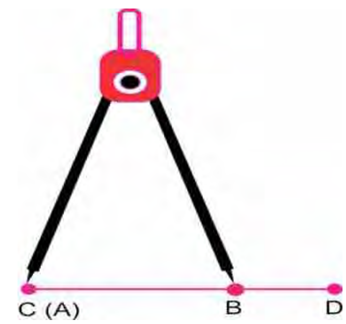


अब, यहाँ तीन सम्भावनाएँ हैं।

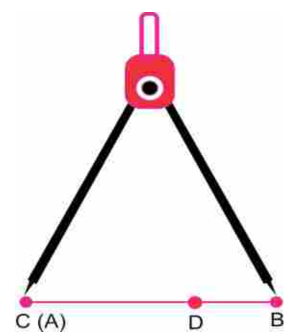
(i) दूसरी भुजा बिल्कुल D के ऊपर पड़ती है तो AB = CD.



(ii) दूसरी भुजा C और D के बीच में पड़ती है जिससे AB< CD.



(iii) दूसरी भुजा D से परे पड़ती है जिससे AB>CD.



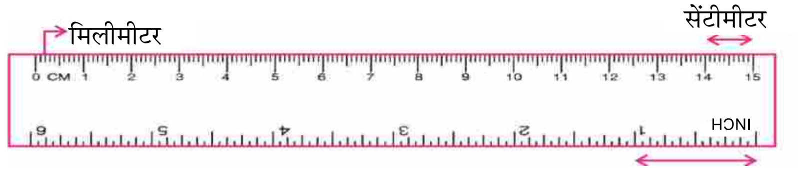
ये विधियाँ वहां लाभप्रद नहीं है जहां हम जानना चाहते हैं कि एक रेखाखण्ड दूसरे से कितना बड़ा या छोटा है। आओ! अब रेखाखण्डों की लम्बाई को मापना सीखते हैं।

9.2.2 रेखाखण्डों का मापना (Measurement of line segments)

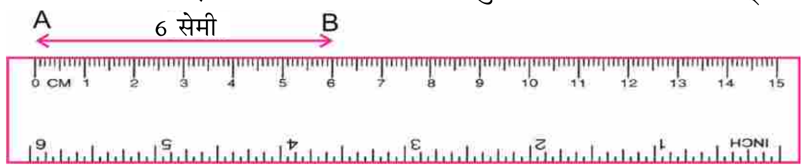
विधि 1:- **स्केल (रूलर/फुट्टा) के साथ माप**

एक रेखाखण्ड को मापने के लिए, हम स्केल (रूलर/फुट्टा) का प्रयोग करते हैं जिसके एक किनारे पर सेंटीमीटर चिह्न और दूसरे किनारे पर इंच चिह्न होते हैं।

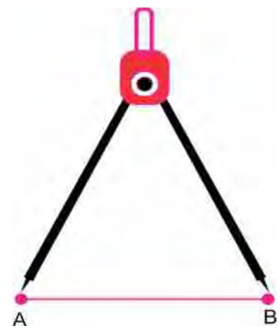
ध्यान से देखो कि प्रत्येक सेंटीमीटर (सेंमी) दस बराबर भागों में बंटा हुआ है और प्रत्येक भाग मिलीमीटर (मि.मी.) कहलाता है।



AB को मापने के लिए स्केल को इस प्रकार रखो कि रेखाखण्ड का बिन्दु A स्केल के 'o' चिह्न के साथ संपाती हो जाए। फिर स्केल के उपर बिन्दु B के सामने वाला चिह्न पढ़ो।



इस प्रकार, रेखाखण्ड AB की लम्बाई = 6सेंमी

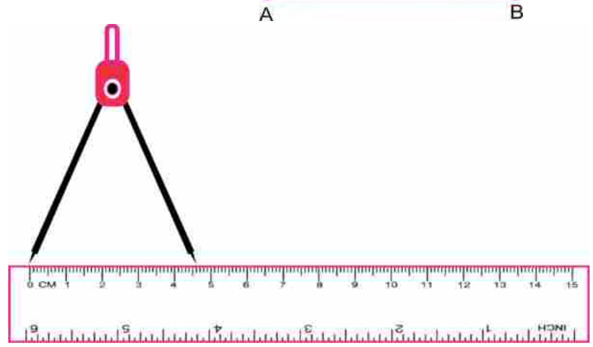


विधि 2:- **स्केल और विभाजक दोनों के साथ माप**

आओ AB की लम्बाई मापने के लिए एक स्केल और एक विभाजक का प्रयोग करते हैं।

विभाजक की भुजाओं को इस प्रकार खोलो कि इसकी एक भुजा A पर हो और दूसरी B पर हो।

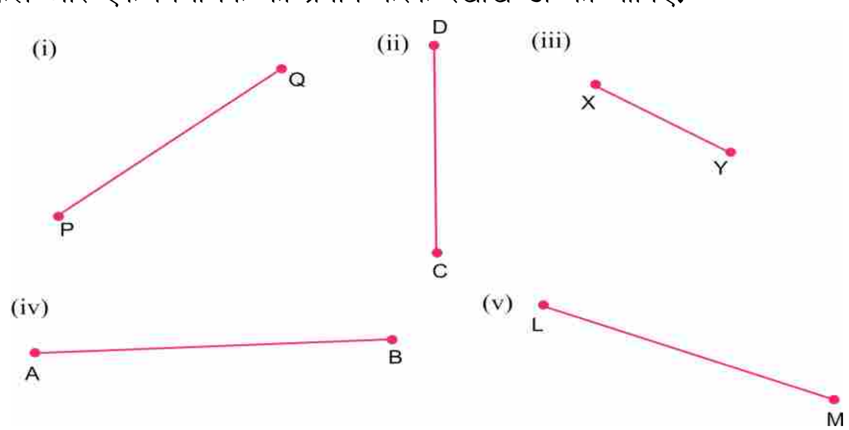
अब, इसकी भुजाओं को बिना हिलाए विभाजक को उठा लीजिए और स्केल के ऊपर इस प्रकार रखिए कि इसकी एक भुजा '0' चिह्न पर हो। विभाजक की दूसरी भुजा के सामने वाला चिह्न पढ़िए।



विभाजक की दूसरी भुजा स्केल पर 4.5 सेमी चिह्न पर है, इस प्रकार AB = 4.5सेमी

प्रश्नावली 9.1

1. एक स्केल और एक विभाजक का प्रयोग करके रेखाखण्डों को मापिए:-



2. आकृति में रेखाखण्डों की तुलना कीजिए और रिक्त स्थान भरिए:-

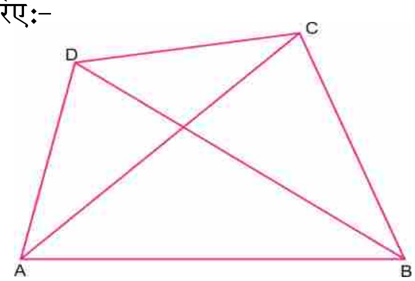
(i) AB ____ AB

(ii) CD ____ AC

(iii) AC ____ AD

(iv) BC ____ AC

(v) BD ____ CD

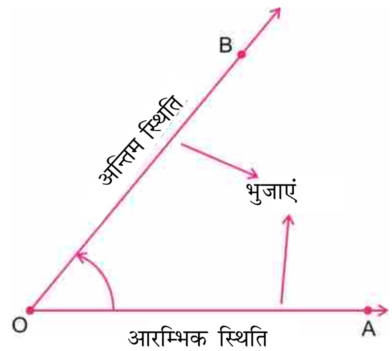


3. कोई रेखाखण्ड AB खींचिए। A और B के बीच स्थित कोई बिन्दु C लीजिए। AB, BC और AC की लंबाई मापिए। क्या AB = AC + CB है?

4. एक रेखाखण्ड AB = 5 सेमी और AC = 9 सेंमी इस प्रकार खींचो कि बिन्दु A, B, C संरेख हो। BC की लंबाई कितनी है?

9.3 कोणों को मापना (Measuring Angles)

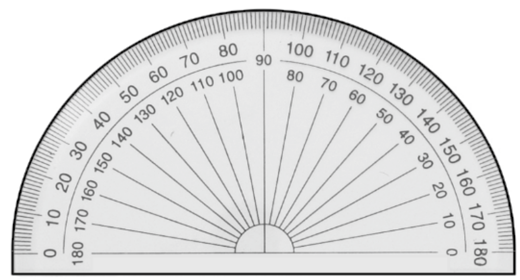
पिछले अध्याय में हमने सीखा है कि एक कोण एक उभयनिष्ठ आरम्भिक बिन्दु वाली दो किरणों के द्वारा बनी गई आकृति है। एक कोण को एक किरण के ऊपर दूसरी को घुमाने से भी दर्शाया जा सकता है।.



कोण का माप अथवा आकार घूमने की वह मात्रा है जिसके द्वारा एक भुजा को दूसरी भुजा की स्थिति में लाने के लिए शीर्ष बिन्दु के इर्द-गिर्द घुमाया जाता है।

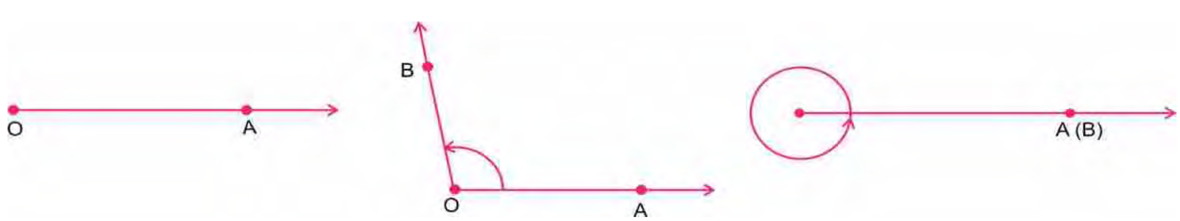
कोण का माप कोण को बनाने वाली दो भुजाओं के फैलाव (खुलने) अथवा झुकाव पर निर्भर करता है। यदि दो कोणों का झुकाव भिन्न है तो हम कहते हैं कि उनका माप भिन्न है। एक कोण का माप कोण मापक/प्रोटैक्टर की सहायता से अंशों (degrees) में मापा जाता है।

चाँदा (कोण मापक/प्रोटैक्टर) (Protractor): अपने ज्यामिति बॉक्स में देखे यहाँ एक ऐसा ज्यामितीय उपकरण है जो अक्षर D जैसा दिखाई देती है।



किनारे के ऊपर घड़ी की दिशा में साथ ही घड़ी की विपरीत दिशा में 0^0 से 180^0 तक कोणों के चिह्न लगाए गए है।

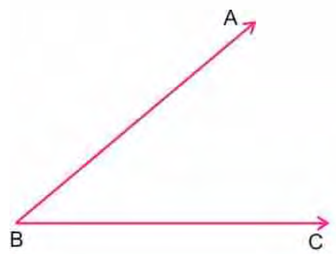
कोणों का अंश (Degree) माप : एक किरण OA पर विचार कीजिए। बिन्दु O को स्थित रखकर इस किरण को इसकी आरम्भिक स्थिति से आरम्भ करके घुमाइए। जब किरण अपनी आरम्भिक स्थिति पर वापिस आती है, हम कहते हैं कि किरण ने एक घूर्णन (चक्कर) पूरा कर लिया है।

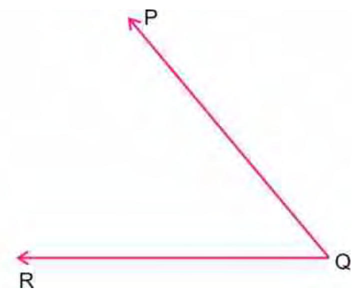


(i) (ii) (iii)

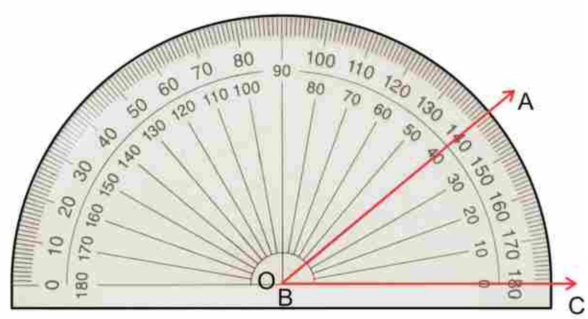
एक घूर्णन (revolution/चक्कर) 360º समान भागों में बांटा जाता है और प्रत्येक भाग 'एक अंश' कहलाता है। एक कोण को मापने की मापन इकाई अंश (degree) है। उसको 'o' से दर्शाया जाता है। इस प्रकार, हम कहते हैं कि पूरा घूर्णन या पूरा कोण 360º का होता है।

आओ ∠ABC और ∠POR का माप करें।

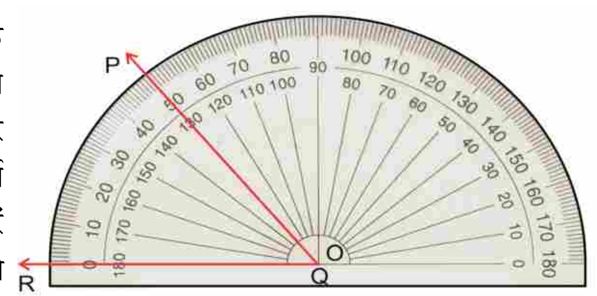




कोण मापक को इस प्रकार रखो कि आधार रेखा का मध्य बिन्दु O, B के साथ संपाती हो जाए और आधार रेखा पूर्णतया किरण $\overrightarrow{BC}$ के ऊपर आ जाए (अनुदिश हो जाए) क्योंकि $\overrightarrow{BC}$ शीर्ष (आधार रेखा का मध्य बिन्दु) Oके दाएँ तरफ है, B के दाएँ तरफ '0º' से गिनता प्रारम्भ करो और जिस चिन्ह के साथ भुजा AB संपाती होती है, को पढ़ो। यह 40º चिह्न के साथ संपाती है, इस प्रकार ∠ABC = 40º.



इसी प्रकार ∠PQR को मापने के लिए, कोण मापक (प्रोटैक्टर) को इस प्रकार रखो कि आधार रेखा का मध्य बिन्दु O, बिन्दु Q के साथ संपाती हो जाए और आधार रेखा पूरी तरह QR के ऊपर आ जाए। क्योंकि QR शीर्ष O के बाएँ तरफ है, Q से बाएँ तरफ से गिनना शुरु करें और जिस चिन्ह के साथ भुजा PQ संपाती होती है, को पढ़ो। यह 50º चिन्ह के साथ संपाती हो जाती है।



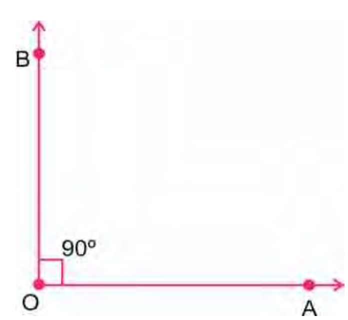
इसलिए ∠PQR = 50º

9.2.3 कोणों की किस्में (Types of Angles)

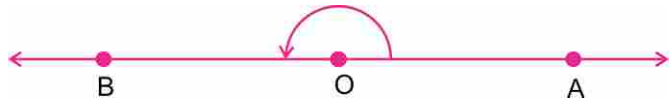
ज्यामिति में, कोणों का वर्गीकरण उनके माप के आधार पर किया जा सकता है।

शून्य कोण (Zero Angle) : एक कोण जिसका माप 0º है, एक शून्य कोण कहलाता है। जब कोई किरण बिल्कुल भी नहीं हिलती, हम कहते हैं, यह एक 0º कोण में से निकल गई।

समकोण (Right Angle) : एक कोण जिसका माप 90º है एक समकोण कहलाता है। दो रेखाएँ जो एक समकोण पर मिलती है लम्ब (रेखाएँ) कहलाती है। इसको OB⊥OA भी लिखा जाता है। '⊥' लम्ब का चिह्न है।

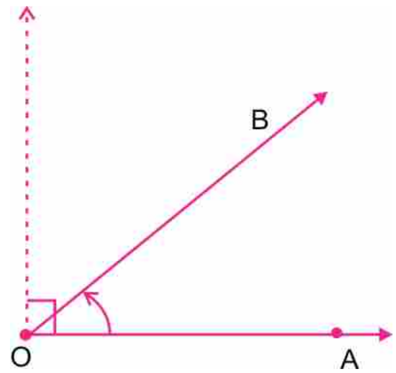


ऋजु कोण (सरल कोण) (Straight Angle) : एक कोण जिसका माप 180º है, एक ऋजु कोण कहलाता है।

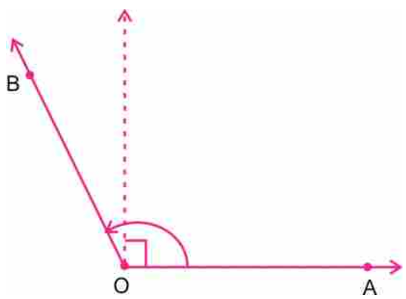


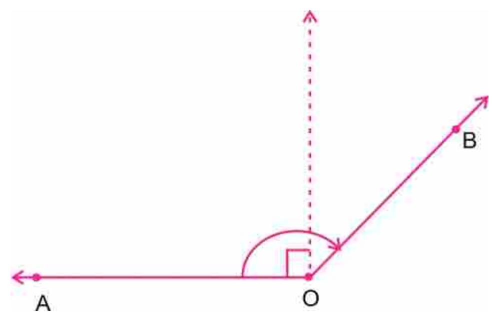
दो समकोण एक ऋजुरेखा (सरल रेखा) बनाते है।

न्यून कोण (Acute Angle) : एक कोण जिसका माप 0º और 90º के बीच में हो एक न्यून कोण कहलाता है। इस प्रकार, एक न्यूनकोण, एक शून्य कोण से बड़ा होता है पर एक समकोण से छोटा होता है।



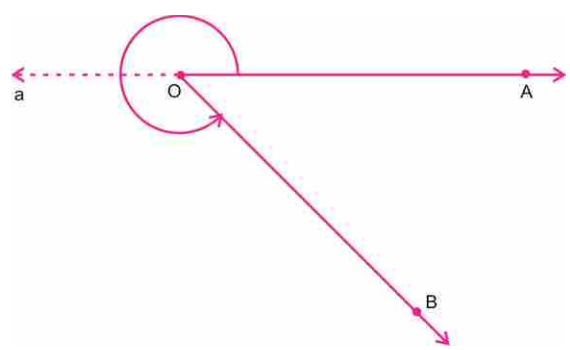
अधिक कोण (Obtuse Angle) : एक कोण जिसका माप 90º और 180º के बीच में हो एक, अधिक कोण कहलाता है। इस प्रकार, एक अधिक कोण एक समकोण से बड़ा होता है पर एक ऋजुकोण से छोटा होता है।





संपूर्ण कोण : एक कोण जिसका माप 360º हो एक सपूर्ण कोण कहलाता है। जब एक किरण एक घूर्णन (चक्कर) पूरा करती है, यह 360º के एक कोण पर घूम चुकी होती है।

प्रतिवर्ती कोण (रिफ्लैक्स कोण) (Reflex Angle) : एक कोण जिसका माप 180º और 360º के बीच में हो, एक प्रतिवर्ती कोण कहलाता है। इस प्रकार, एक प्रतिवर्ती कोण एक ऋजुकोण से बड़ा होता है पर एक संपूर्ण कोण से छोटा होता है।



आओ कुछ उदाहरण देखें:-

उदाहरण 1: निम्न दिए गए कोणों का न्यून, सम, अधिक, ऋजु अथवा प्रतिवर्ती कोण में वर्गीकरण करो:-

(i)	**89°**	**(ii)**	**101°**	**(iii)**	**62°**	**(iv)**	**180°**
(v)	**91°**	**(vi)**	**215°**	**(vii)**	**90°**	**(viii)**	**181°**
(ix)	**18°**	**(x)**	**130°**				

हल :

(i) 89°, 0° और 90° के बीच में है।

$\therefore$ यह एक न्यून कोण है।

(ii) 101°, 90° और 180° के बीच में है।

$\therefore$ यह एक अधिक कोण है।

(iii) 62°, 0° और 90° के बीच में है।

$\therefore$ यह एक न्यून कोण है।

(iv) 180° यह एक ऋजुकोण है।

(v) 91°, 90° और 180° के बीच में है।

$\therefore$ यह एक अधिक कोण है।

(vi) 215°, 180° और 360° के बीच में है।

$\therefore$ यह एक प्रतिवर्ती कोण है।

(vii) 90° एक समकोण है।

(viii) 181°, 180° और 360° के बीच में है।

$\therefore$ यह एक प्रतिवर्ती कोण है।

(ix) 18°, 0° और 90°के बीच में है।

$\therefore$ यह एक न्यून कोण है।

(x) 130°, 90° और 180° के बीच में है।

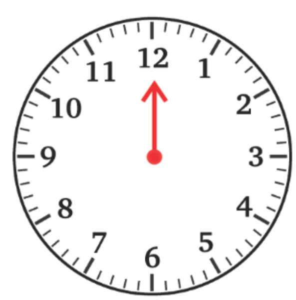
$\therefore$ यह एक अधिक कोण है।

दीवार घड़ी के द्वारा कोणों की किस्में।

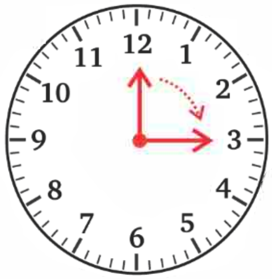
9.4 घूर्णन के रूप में कोण (Angles in terms of revolution)

व्याख्या : आओ, घड़ी के चेहरे पर घूर्णन के रुप में कोण को निरुपित करें।

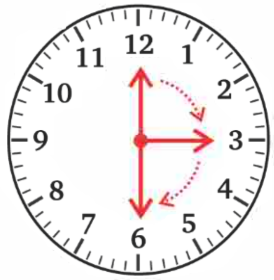
जब मिनट वाली सुई 12 के ऊपर है और नहीं घूमती, हम कहते हैं कि मिनट वाली सुई शून्य कोण घूमी है। इस प्रकार, शून्य कोण में कोई घूर्णन नहीं होता।



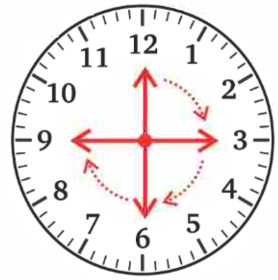
मिनट वाली सुई की 12 से 12 तक की गतिविधि नीचे दी गई है।



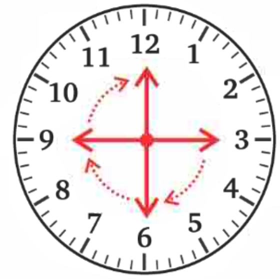
12 से 3
एक समकोण = एक घूर्णन का $\frac{1}{4}$



12 से 6
2 समकोण = 1 ऋजुकोण = एक घूर्णन का $\frac{1}{2}$

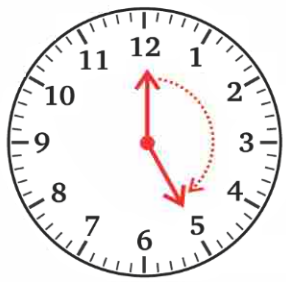


12 से 9
3 समकोण = एक घूर्णन का $\frac{3}{4}$

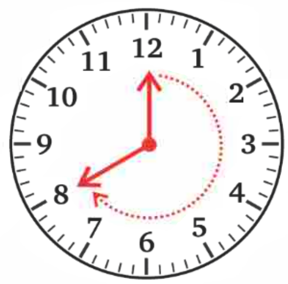


12 से 12
4 समकोण = 1 संपूर्ण कोण = $\frac{4}{4}$ अथवा 1 घूर्णन

12 से 2
न्यून कोण (एक घूर्णन के $\frac{1}{4}$ से कम)

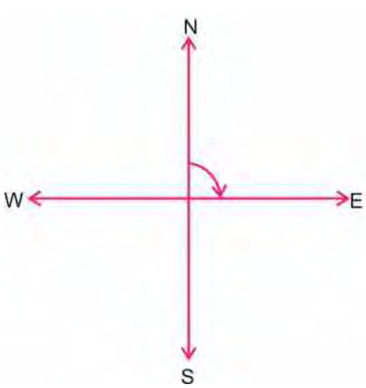


12 से 5
अधिक कोण (एक घूर्णन के $\frac{1}{4}$ से अधिक पर $\frac{1}{2}$ से कम)

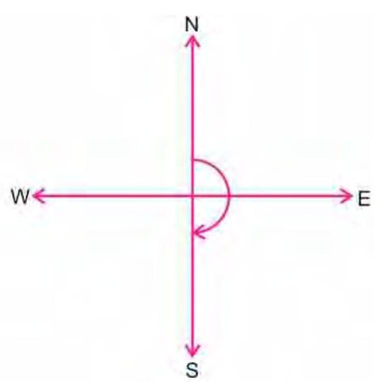


12 से 8
प्रतिवर्ती कोण ($\frac{1}{2}$ से अधिक पर 1 संपूर्ण घूर्णन से कम)

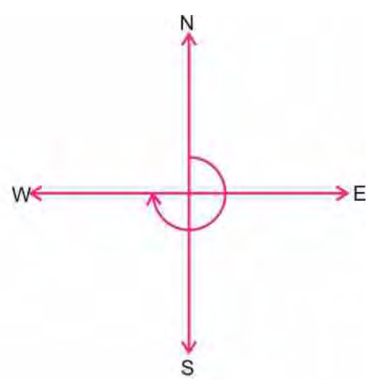
आओं कोणों की किस्मों को दिशाओं के द्वारा स्पष्ट करें। एक व्यक्ति उत्तर की ओर मुँह कर रहा है। अन्य दिशाओं की ओर देखने के लिए वह जैसे मुड़ता है, वह नीचे दिया गया है:



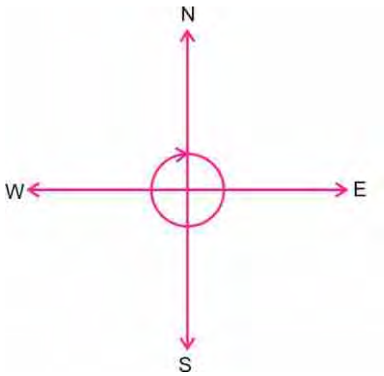
उत्तर से पूर्व
1 समकोण =
एक घूर्णन का $\frac{1}{4}$



उत्तर से दक्षिण
2 समकोण =
एक घूर्णन का $\frac{1}{2}$

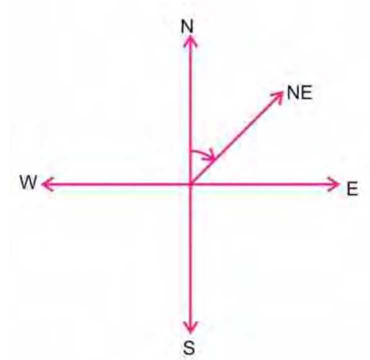


उत्तर से पश्चिम
3 समकोण = एक घूर्णन का $\frac{3}{4}$



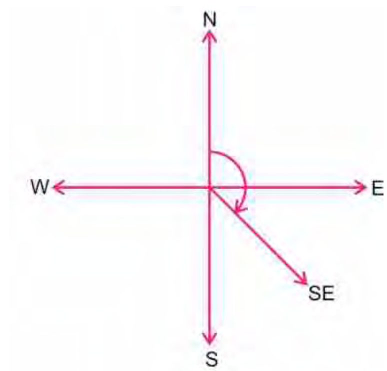
उत्तर से उत्तर

4 समकोण = एक घूर्णन का $\frac{4}{4}$

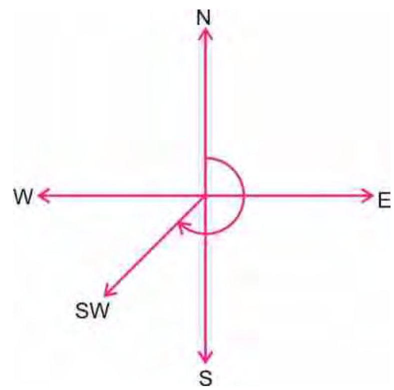


उत्तर से उत्तर पूर्व न्यून कोण

= एक घूर्णन के $\frac{1}{4}$ से कम



उत्तर से दक्षिण पूर्व अधिक कोण = एक घूर्णन के $\frac{1}{4}$ से अधिक पर $\frac{1}{2}$ से कम



उत्तर से दक्षिण पश्चिम प्रतिवर्ती कोण = $\frac{1}{2}$ से अधिक पर 1 पूर्ण घूर्णन से कम

उदाहरण 2: **घड़ी की मिनट वालू सुई एक घूर्णन के कितनी भिन्न घूमती है, जब यह पहुँचती है :-**

(i) 12 से 3 (ii) 2 से 8 (iii) 3 से 12

हल : (i) 12 से 3 : चौथाई अथवा $\frac{1}{4}$ (ii) 2 से 8 : आधा अथवा $\frac{1}{2}$

(iii) 3 से 12 : 3 चौथाइयाँ अथवा $\frac{3}{4}$.

उदाहरण 3: **घड़ी की घण्टे वाली सुई किस बिन्दु पर रुकती है, यदि यह शुरू होती है:**

(i) 12 से और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{2}$ घूर्णन बनाती है।

(ii) 4 से और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{4}$ घूर्णन बनाती है।

(iii) 7 से और घड़ी की दिशा में $\frac{3}{4}$ घूर्णन बनाती है।

हल : (i) 1 घूर्णन के लिए, घण्टे वाली सुई 12 घण्टे लेती है।

एक घूर्णन के $\frac{1}{2}$ के लिए, घण्टे वाली सुई $\frac{1}{2} \times 12 = 6$ घण्टे लेती है।

$\therefore$ यदि घण्टे वाली सुई 12 से शुरू होती है और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{2}$ बनाती है, तो यह 6 पर रुकेगी।

(ii) 1 घूर्णन के लिए, घण्टे वाली सुई 12 घण्टे लेती है।

एक घूर्णन के $\frac{1}{4}$ के लिए, घण्टे वाली सुई $\frac{1}{4} \times 12 = 3$ घण्टे लेती है।

इसलिए, यदि घण्टे वाली सुई 4 से शुरू होती है और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{4}$ घूर्णन बनाती है, तो यह 7 पर रुकेगी।

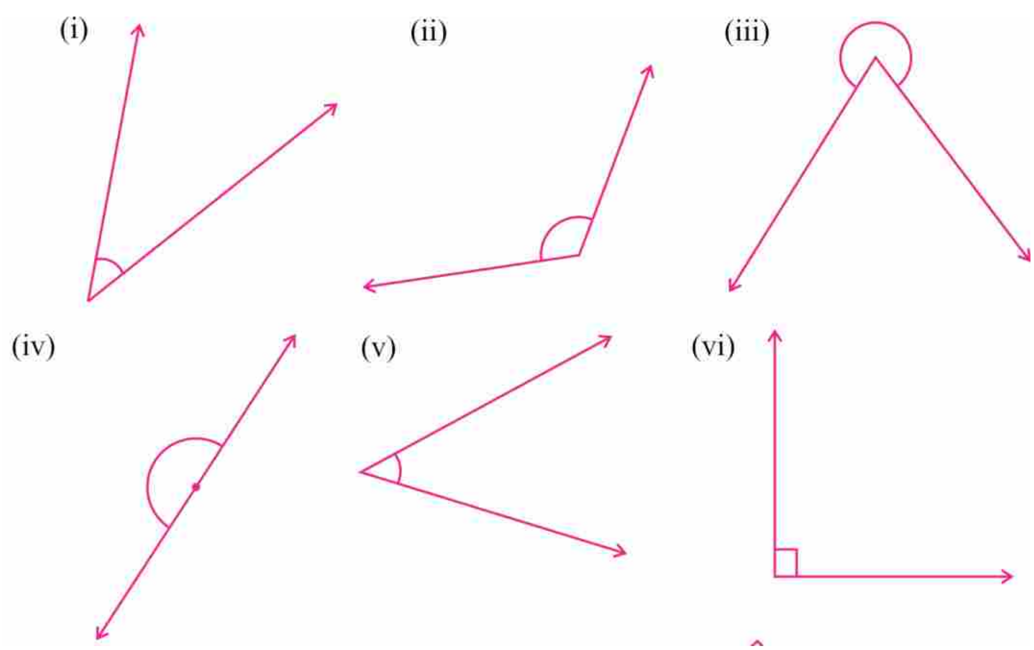
(iii) 1 घूर्णन के लिए, घण्टे वाली सुई 12 घण्टे लेती है।

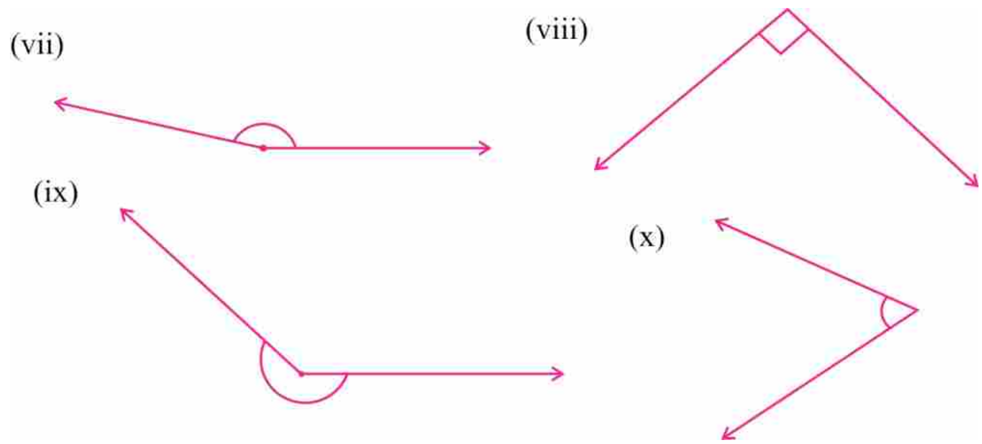
एक घूर्णन के $\frac{3}{4}$ के लिए, घण्टे वाली सुई $\frac{3}{4} \times 12 = 9$ घण्टे लेती ह

इसलिए, यदि घण्टे वाली सुई 7 से शुरू होती है और घड़ी की दिशा में $\frac{3}{4}$ घूर्णन बनाती है तो यह 4 पर रुकेगी।

प्रश्नावली 9.2

1. कोणों का न्यून, अधिक, सम, ऋजु अथवा प्रतिवर्ती कोणों में वर्गीकरण करो:-

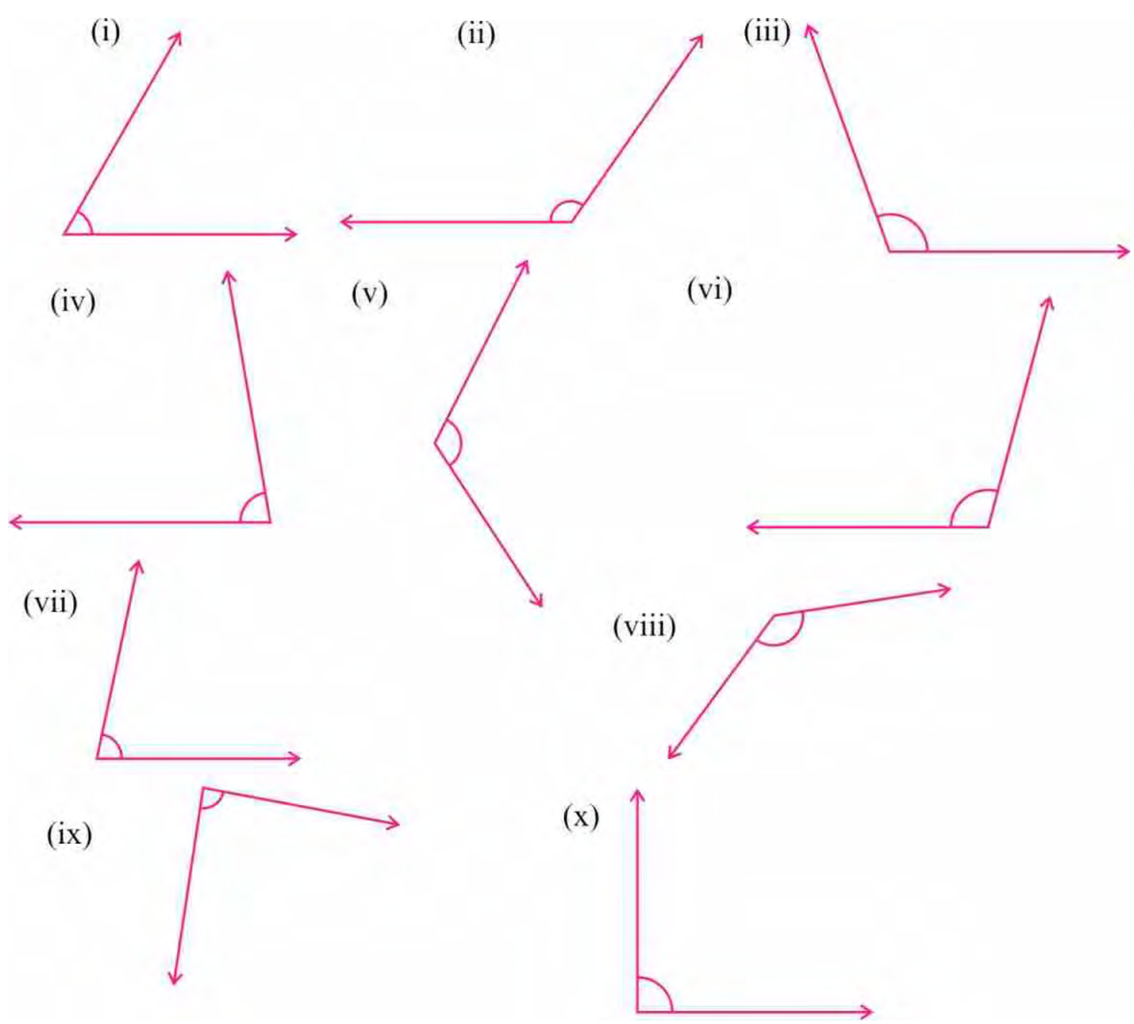




2. कोणों का वर्गीकरण करो:-

(i)	80º	(ii)	172º	(iii)	90º	(iv)	0º	(v)	179º
(vi)	215º	(vii)	360º	(viii)	350º	(ix)	15º	(x)	180º

3. निम्न दिए कोणों को कोण मापक से मापो और उनका माप लिखो:-



4. इनमें कितने अंश (degrees) हैं:-

(i) दो समकोण   (ii) $\frac{2}{3}$ समकोण

(iii) चार समकोण

5. एक घड़ी की घण्टे वाली सुई घड़ी की दिशा में एक घूर्णन के कितनी भिन्न तक मुड़ती है जब यह जाती है:-

(i) 3 से 9 तक   (ii) 5 से 8 तक   (iii) 10 से 4 तक

(iv) 2 से 11 तक   (v) 6 से 3 तक   (vi) 2 से 7 तक

6. एक घड़ी की घण्टे वाली सुई के द्वारा बनाए गए समकोणों की संख्या पता करो जब यह जाती है:-

(i) 5 से 8 तक   (ii) 1 से 7 तक   (iii) 4 से 10 तक

(iv) 9 से 12 तक   (v) 11 से 2 तक   (vi) 9 से 6 तक

(vii) 2 से 11 तक   (viii) 10 से 1 तक   (ix) 12 से 6 तक

(x) 5 से 2 तक

7. एक घड़ी की सुई कहां रुकेगी, यदि यह शुरु होती है:-

(i) 12 से और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{4}$ घूर्णन बनाती है।

(ii) 2 से और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{2}$ घूर्णन बनाती है।

(iii) 5 से और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{4}$ घूर्णन बनाती है।

(iv) 5 से और घड़ी की दिशा में $\frac{3}{4}$ घूर्णन बनाती है।

8. आप घूर्णन का कितना भाग मुड़ते हो, यदि आप चेहरा करके खड़े हो-

(i) पूर्व की ओर तथा घड़ी की दिशा में उत्तर की ओर मुड़ते हो।

(ii) दक्षिण की ओर तथा घड़ी की दिशा में उत्तर की ओर मुड़ते हो।

(iii) दक्षिण की ओर तथा घड़ी की दिशा में पूर्व की ओर मुड़ते हो।

(iv) पश्चिम की ओर तथा घड़ी की दिशा में पूर्व की ओर मुड़ते हो।

9. प्रत्येक आकृति में घड़ी की सुइयों के बीच कोण का माप पता करो:-

(i)

3.00 am

(ii)

6.00 am

(iii)

2.00 am

10. नीचे दिए कोण कोण मापक के साथ बनाओ:–

(i) 40° (ii) 75°

(iii) 105° (iv) 90° (v) 130°

11. सही अथवा गलत बताओ:–

(i) दो समकोणों का योग सदैव एक ऋजु कोण होता है।

(ii) दो न्यूनकोणों का योग सदैव एक प्रतिवर्ती कोण होता है।

(iii) अधिक कोण का माप 90° से 180° के बीच होता है।

(iv) एक पूर्ण घूर्णन में चार समकोण होते हैं।

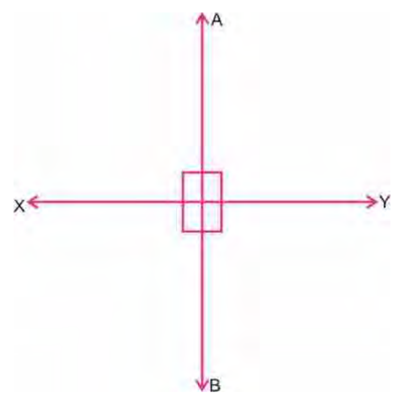
12. रिक्त स्थान भरो:–

(i) कोण जो 0° से बड़ा और 90° से छोटा होता है .... कहलाता है।

(ii) कोण जिसका माप दो समकोणों के बराबर होता है .... ।

(iii) 90° और 180° के बीच में .... कोण होता है।

9.5 लंब रेखाएँ (Perpendicular Lines)



यदि दो रेखाएँ एक दूसरे को एक समकोण पर प्रतिच्छेद करती (मिलती) है, तो रेखाएँ लंब रेखाएँ कहलाती है। लंब रेखाओं के लिए $\perp$ चिन्ह है।

दी हुई आकृति में, रेखा AB, XY के ऊपर लंब है।

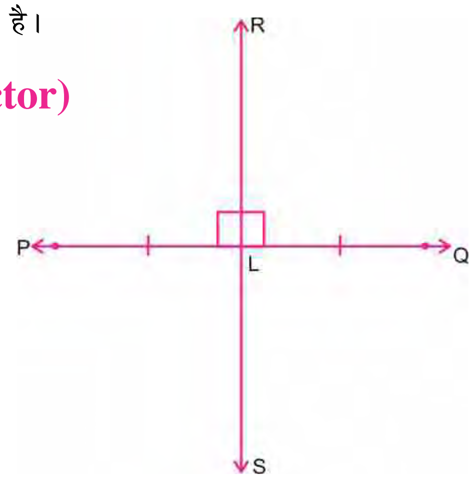
भाव $AB \perp XY$

हम यह भी कह सकते है कि XY, AB के ऊपर लंब है।

भाव $XY \perp AB$

एक पुस्तक के दो आसन्न किनारे एक दूसरे के ऊपर लंब होते है।

9.6 लंब समद्विभाजक (Perpendicular Bisector)

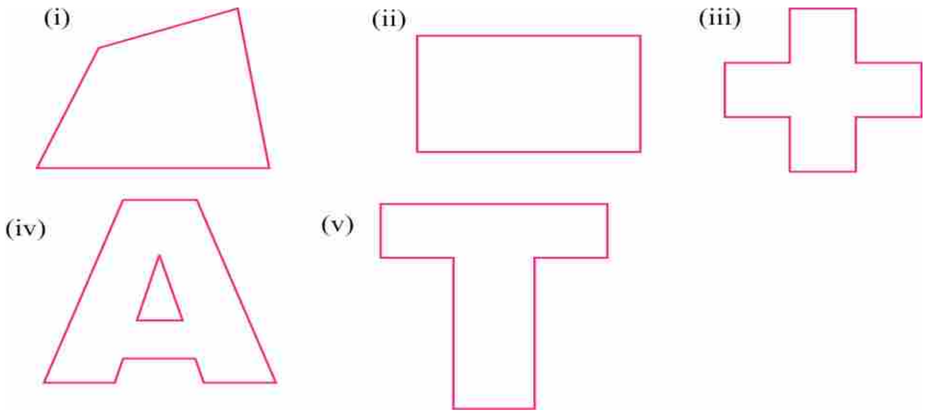


एक रेखा जो कि एक रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के ऊपर लंब हो, उस रेखाखण्ड का लंब समद्विभाजक कहलाती है।

आकृति के अनुसार, $RS \perp PQ$ और RS, PQ को समद्विभाजित करती है।

प्रश्नावली 9.3

1. वह आकृति पहचानें जिस में लंब रेखाएँ हैं:-



2. वह उदाहरण पहचानें जिस में लंब रेखाएँ हैं:-

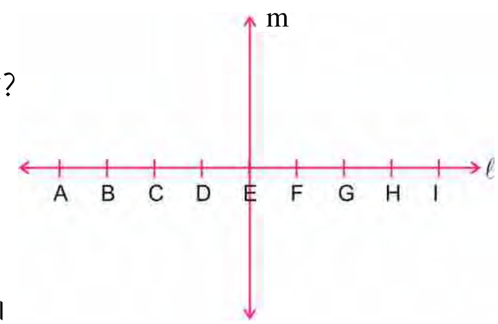
(i) रेल पटरी की रेखाएँ

(ii) एक मेज़ के आसन्न किनारे

(iii) अक्षर 'L' को बनाने वाले रेखाखण्ड

3. मान लीजिए, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$ के ऊपर लंब है और वे 'O' पर प्रतिच्छेदन करती है। $\angle AOP$ का माप क्या है?

4. संलग्न आकृति में, रेखा m रेखा ℓ के ऊपर लंब है। रेखा ℓ के ऊपर प्रत्येक बिन्दु समान दूरी पर लगाया गया है। आकृति को पढ़िए और सही अथवा गलत बताइए।



(i) रेखा m, रेखाखण्ड AI का लंब समद्विभाजक है।

(ii) CE = EG (iii) DF = 2DE

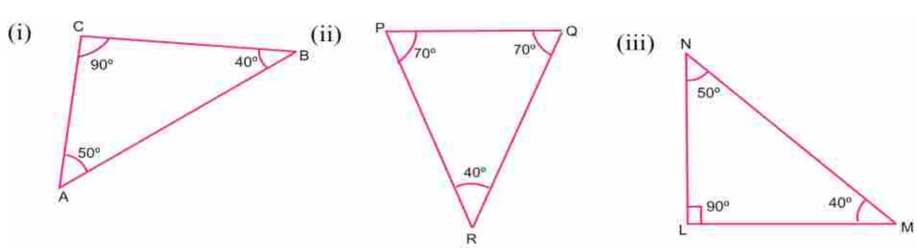
9.7 त्रिभुजों का वर्गीकरण (Classification of Triangles)

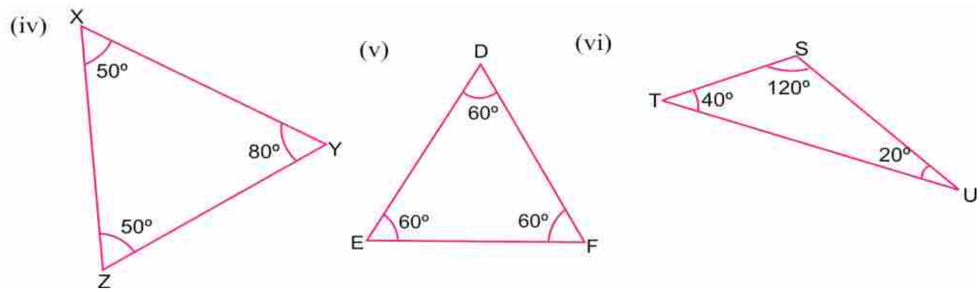
पिछले अध्याय में, हमने त्रिभुज के बारे में सीखा। 'त्रिभुज एक समतल बन्द आकृति है जो कि तीन असमांतर रेखाखण्डों से बनती है।'

इस के छह भाग अथवा तत्त्व होते हैं जिन में तीन भुजाएँ और तीन कोण हैं। इसलिए हम, त्रिभुजों को उनकी भुजाओं और कोणों के आधार पर वर्गीकृत कर सकते हैं।

9.7.1 भुजाओं के आधार पर (On the basis of sides)

नीचे दी गई त्रिभुजों की भुजाएँ मापिए:-

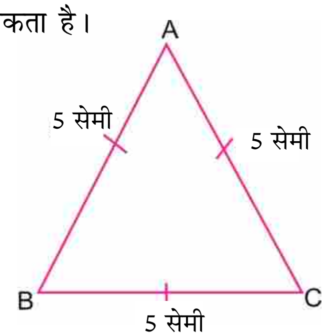




सारणी को पूरा कीजिए:-

त्रिभुज की विशेषता	त्रिभुज का नाम
(a) त्रिभुज जिसकी सभी भुजाओं की लंबाई समान है	ΔDEF
(b) त्रिभुज जिसकी दो भुजाओं की लंबाई समान है	....
(c) त्रिभुज जिसकी सभी भुजाओं की लंबाई भिन्न है	....

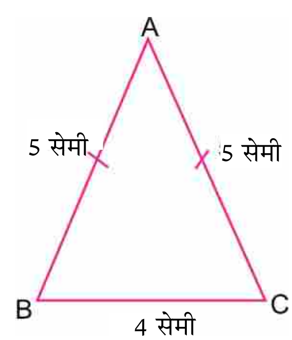
त्रिभुजों को उनकी भुजाओं के माप के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है।



समबाहु त्रिभुज (Equilateral triangle) : एक त्रिभुज जिसकी सभी भुजाओं की लंबाई समान है, एक समबाहु त्रिभुज कहलाती है।

दी हुई ΔABC, में

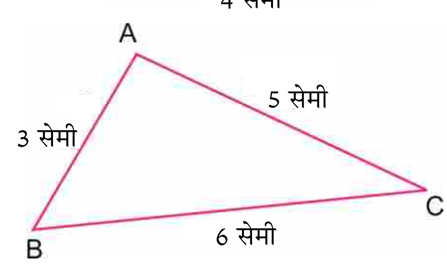
AB = BC = AC = 5सेमी, इसलिए यह एक समबाहु त्रिभुज है।



समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles triangle) : एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाओं की लंबाई समान है, एक समद्विबाहु त्रिभुज कहलाती है।

दी हुई ΔABC में,

AB = AC = 5सेमी, इसलिए ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



विषम बाहु त्रिभुज (Scalene triangle) : एक त्रिभुज जिसकी सभी भुजाएँ भिन्न हैं, एक विषमबाहु त्रिभुज कहलाती है।

दी हुई ΔABC में,

AB ≠ BC ≠ AC, इसलिए ΔABC एक विषमबाहु त्रिभुज है।

9.7.2 कोणों के आधार पर (On the Basis of Angles)

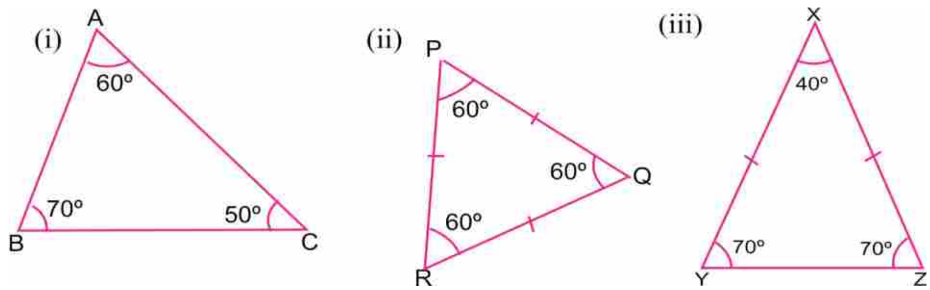
जिन त्रिभुजों की भुजाओं का माप आपने पहले 9.7.1 में किया है, के कोणों को माप कर निरीक्षण करें और नीचे दी गई सारणी को पूरा करें:-

त्रिभुज की विशेषता	त्रिभुज का नाम
सभी न्यून कोणों वाली त्रिभुज	ΔXYZ. ....
एक समकोण वाली त्रिभुज	....
एक अधिक कोण वाली त्रिभुज	....

त्रिभुज को उनके कोणों के माप के आधार पर वर्गीकृत कर सकते हैं।

न्यून त्रिभुज अथवा न्यूनकोण त्रिभुज (Acute triangle or acute angled triangles) : एक त्रिभुज जिसके सभी कोण न्यून हो, न्यून त्रिभुज अथवा न्यूनकोण त्रिभुज कहलाती है।

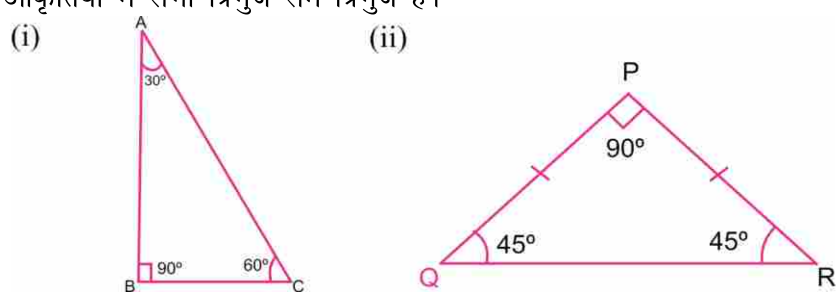
नीचे दी आकृतियों में सभी त्रिभुज न्यून त्रिभुज है।



न्यून त्रिभुज विषमबाहु, समबाहु अथवा समद्विबाहु त्रिभुज हो सकती है।

सम त्रिभुज अथवा समकोण त्रिभुज (Right triangle or Right Angled triangle) : एक त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण हो, एक सम त्रिभुज अथवा समकोण त्रिभुज कहलाती है।

नीचे दी आकृतियों में सभी त्रिभुजें सम त्रिभुजें हैं।



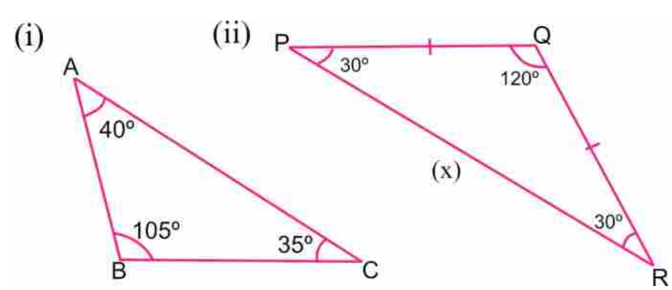
समकोण के सम्मुख भुजा 'कर्ण' कहलाती है और बाकी दो भुजाएँ

इसकी आकृति में, AC और QR क्रमशः कर्ण है।

> * एक सम त्रिभुज विषमबाहु अथवा समद्विबाहु त्रिभुज हो सकती है।
>
> * एक सम त्रिभुज में एक कोण समकोण होता है और शेष दो न्यून कोण होते हैं।

अधिक त्रिभुज अथवा अधिककोण त्रिभुज (Obtuse Triangle or Obtuse Angled Triangle) : एक त्रिभुज जिसका एक कोण अधिक है, अधिक त्रिभुज अथवा अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है।

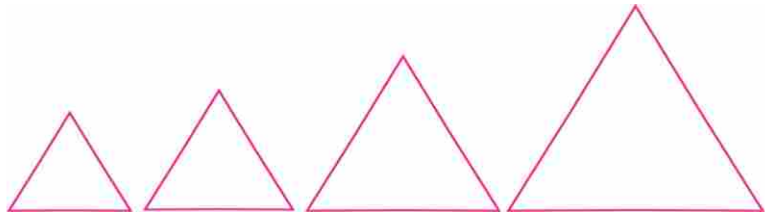
नीचे दी गई आकृति में दोनों त्रिभुजें अधिक त्रिभुजें हैं।



* **एक अधिक त्रिभुज केवल विषमबाहु अथवा समद्विबाहु त्रिभुज हो सकती है।**
* **एक अधिक त्रिभुज में, एक कोण अधिक होता है और शेष दो कोण न्यून कोण होते हैं।**

त्रिभुजों के बारे में उपरोक्त चर्चा से हम निरीक्षण कर सकते हैं।

* त्रिभुज का आकार कोणों के माप पर प्रभाव नहीं डालता।

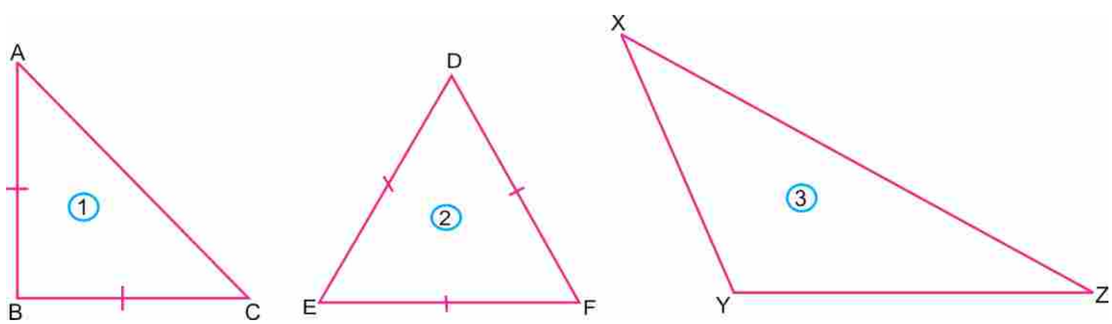


* बड़े कोण की सम्मुख भुजा छोटे कोण की सम्मुख भुजा से बड़ी होती है।
* यदि एक त्रिभुज के कोण बराबर हो तो बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ लंबाई में बराबर होती है।
* एक त्रिभुज के सभी कोणों का जोड़ 180º होता है।
* एक त्रिभुज में कोई दो भुजाओं का जोड़ इसकी तीसरी भुजा से सदैव बड़ा होता है।

भुजाओं और कोणों के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण करना।

आवश्यक सामग्री (Material Required): स्केल, कोण मापक और पेन इत्यादि।

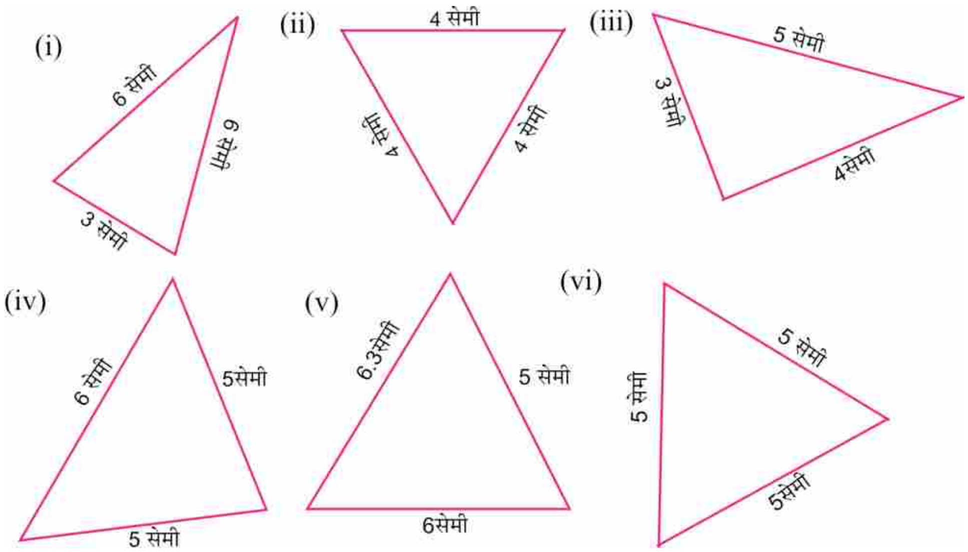
विधि (Procedure):- दी हुई त्रिभुज का प्रत्येक कोण और प्रत्येक भुजा की लंबाई मापिए।



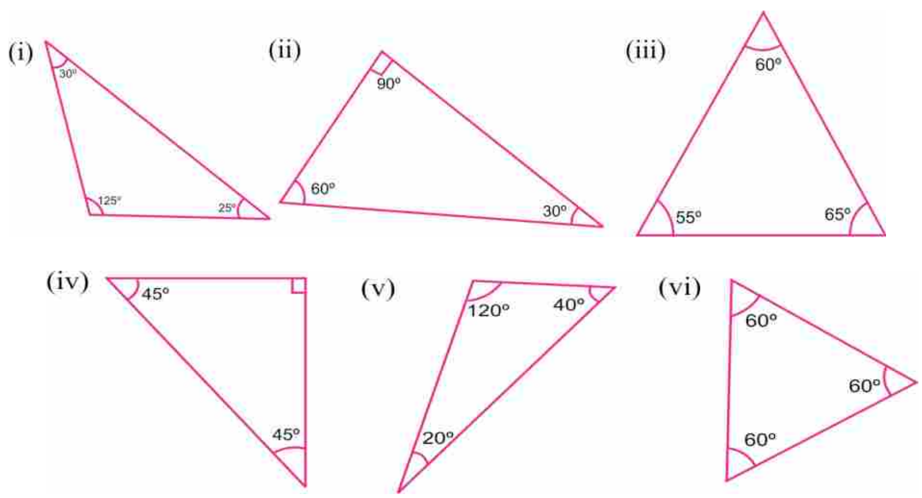
क्रम. संख्या	त्रिभुज का नाम	भुजाओं के आधार पर वर्गीकरण	कोणों के आधार पर वर्गीकरण
1	ΔABC	AB = BC ≠ AC समद्विबाहु त्रिभुज	∠B = 90º समकोण त्रिभुज
2	ΔDEF	DE = EF = DF समबाहु त्रिभुज	∠E = ∠F = ∠D = 60º न्यून कोण त्रिभुज
3	ΔXYZ	XY ≠ YZ ≠ ZX विषमबाहु त्रिभुज	∠Y = 120º अधिक कोण त्रिभुज

प्रश्नावली 9.4

1. नीचे दिए गए त्रिभुजों का विषमबाहु, समद्विबाहु अथवा समबाहु में वर्गीकरण करो:-



2. नीचे दिए गए त्रिभुजों का न्यून, अधिक अथवा सम त्रिभुजों में वर्गीकरण करो:-



3. नीचे दिए हुए में से कौन-सी त्रिभुजें दिए हुए कोणों के साथ संभव है?

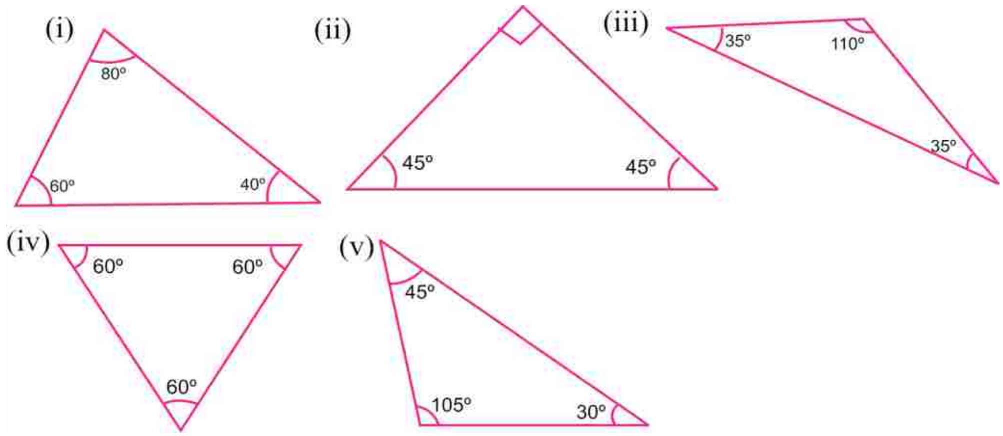
(i) 60°, 60°, 60°	(ii) 110°, 50°, 30°	(iii) 65°, 55°, 60°
(iv) 90°, 40°, 50°	(v) 48°, 62°, 50°	(vi) 90°, 95°, 30°

4. नीचे दी हुई त्रिभुजों में से प्रत्येक का विषमबाहु, समद्विबाहु अथवा समबाहु त्रिभुजों में वर्गीकरण करें:-

(i) 4 सेमी, 5सेमी, 6सेमी	(ii) 5सेमी, 7सेमी, 5सेमी	(iii) 4.2मी, 5.3मी, 6.1मी
(iv) 3.5सेमी, 3.5सेमी, 3.5सेमी	(iv) 8सेमी, 4.2सेमी, 4.2सेमी	(v) 2सेमी, 3सेमी, 4सेमी

5. नीचे दी हुई त्रिभुजों को दोनों प्रकार से नाम दो:-

(भुजाओं और कोणों के आधार पर)



6. रिक्त स्थान भरें:-

(i) एक त्रिभुज की .... भुजाएँ हैं।

(ii) एक त्रिभुज के .... शीर्ष हैं।

(iii) एक त्रिभुज के .... कोण हैं।

(iv) एक त्रिभुज के .... भाग हैं।

(v) एक त्रिभुज जिसकी सभी भुजाएँ भिन्न हैं .... के रूप में जानी जाती है।

(vi) एक त्रिभुज जिसके सभी कोण न्यून हों .... के रूप में जानी जाती है।

(vii) एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर हों .... के रूप में जानी जाती है।

(viii) एक त्रिभुज जिसका एक कोण अधिक हो .... के रूप में जानी जाती है।

(ix) एक त्रिभुज जिसकी सभी भुजाएँ समान हो .... के रूप में जानी जाती है।

(x) एक त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण हो .... के रूप में जानी जाती है।

7. सही अथवा गलत बताओ:-

(i) प्रत्येक समबाहु त्रिभुज एक समद्विबाहु त्रिभुज होती है।

(ii) प्रत्येक न्यून कोण त्रिभुज एक विषमबाहु त्रिभुज होती है।

(iii) प्रत्येक समद्विबाहु त्रिभुज एक समबाहु त्रिभुज होती है।

(iv) एक अधिक त्रिभुज में दो अधिक कोण होते हैं।

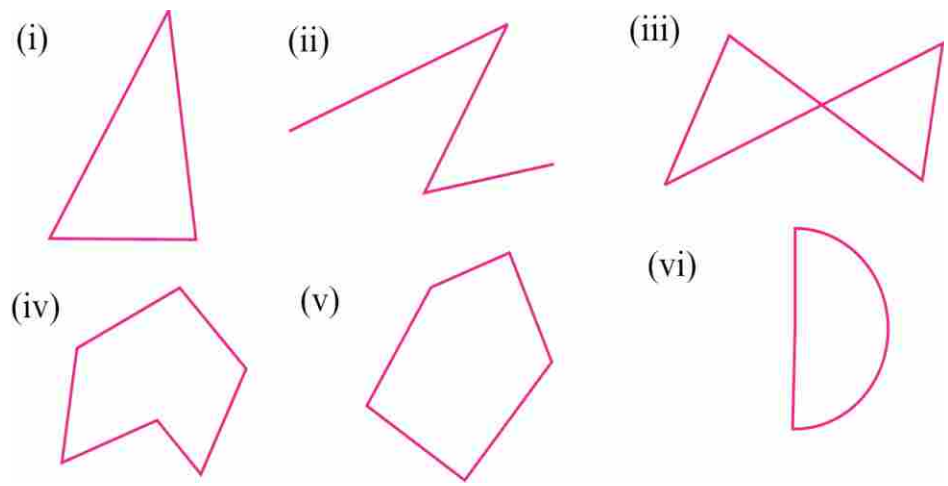
(v) एक सम त्रिभुज में, केवल एक ही समकोण होता है।

(vi) सम त्रिभुज कभी भी समद्विबाहु नहीं हो सकती।

9.8 बहुभुज (Polygons)

हम पिछले अध्याय में पहले ही सीख चुके हैं कि बहुभुज एक समतल आकृति है जो कि रेखाखण्डों को मिला कर बनती है, यहाँ प्रत्येक रेखाखण्ड केवल और केवल शेष दो रेखाखण्डों को मिलता है। दो रेखाखण्डों के प्रतिच्छेदन बिन्दु को बहुभुज का शीर्ष कहा जाता है।

निम्न दी गई आकृतियों को देखो:-



यहां (i), (iv), (v) बहुभुज है पर (ii), (iii) और (vi) बहुभुज नहीं है। जैसे कि (ii) बन्द नहीं है, (iii) में एक आकृति की भुजाएँ एक दूसरे को तीन स्थानों पर प्रतिच्छेद करती है और (vi) रेखाखण्डों से नहीं बनीं।

बहुभुजों का वर्गीकरण (Classification of Polygons)

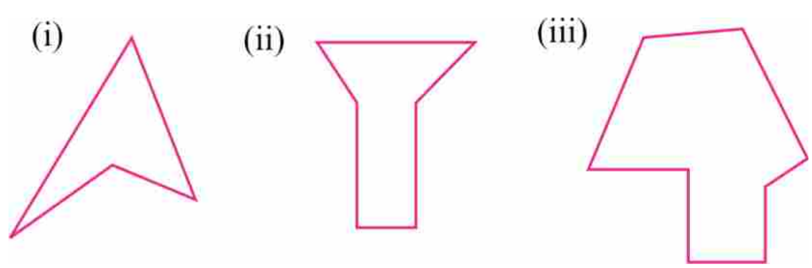
सम और विषम बहुभुज (Regular and Irregular Polygons) : यदि सम बहुभुज की सभी भुजाएँ और कोण समान हों तो बहुभुज एक सम बहुभुज कहलाता है। अन्यथा यह विषय बहुभुज कहलाता है। समबाहु त्रिभुज और वर्ग सम बहुभुज की उदाहरणें हैं और विषम बहु त्रिभुज, आयत आदि विषम बहुभुज कहलाते हैं।

उत्तल और अवत्तल बहुभुज (Convex and Concave Polygons) : एक बहुभुज को उत्तल बहुभुज कहा जाता है यदि इसके प्रत्येक कोण का माप 180^o से कम हो।

उत्तल बहुभुज में, बहुभुज की किसी भुजा को निरूपित (दर्शाने) करने वाली रेखा के एक ही तरफ सभी शीर्ष होते हैं। वर्ग, आयत, समांतर चतुर्भुज, सभी त्रिभुजें इत्यादि इसकी उदाहरणें हैं।

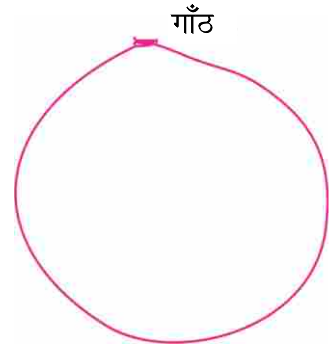
एक बहुभुज को अवतल बहुभुज कहा जाता है यदि कम से कम एक कोण का माप प्रतिवर्ती कोण (180^0 से अधिक) हो।

यदि एक बहुभुज के अभ्यंतर भाग में दो बिन्दुओं को जोड़ने वाला रेखाखण्ड इसके अन्दर नहीं होता, तो यह एक अवतल बहुभुज है।

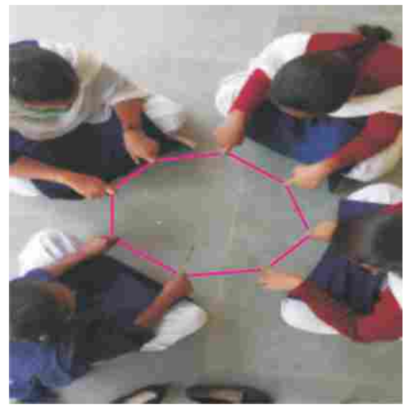


ये अवतल बहुभुज की आकृतियाँ हैं।

उत्तल और अवतल बहुभुजों के ऊपर खेल विधि द्वारा क्रिया (Play way Activity on Concave and Convex Polygons) :



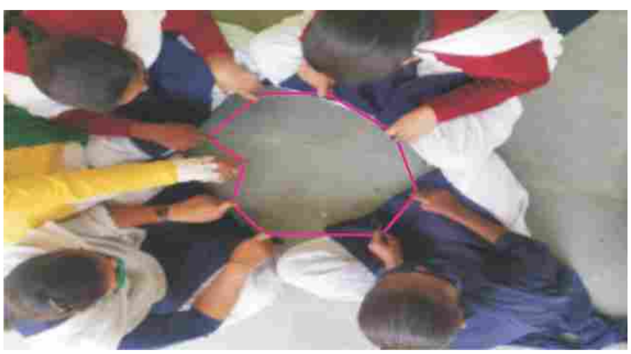
⇒ एक धागा लो और इसको एक वृत्त के रुप में रखो अथवा इसके दोनों किनारों को बांध कर एक वृत्त बनाओ।



⇒ एक विद्यार्थी को बुलाओ और उसको वृत्त के अन्दर आकृतियाँ बनाने के लिए कहो और धागे को बाहर की दिशा की ओर खींचो।

आपको एक उत्तल बहुभुज प्राप्त होगा।

एक अन्य विद्यार्थी को बुलाओ और उसको धागे के बाहर एक या अधिक अंगुलियाँ रखने के लिए कहो और इसको अन्दर की ओर धकेलो।

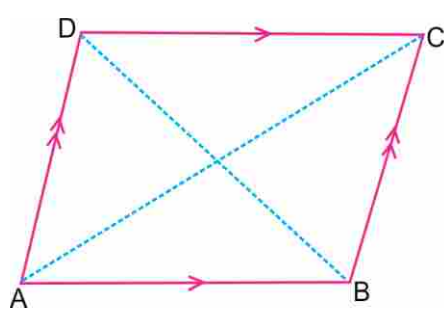


आपको एक अवतल बहुभुज प्राप्त होगा।

9.9 चतुर्भुज की किस्में (Types of Quadrilateral)

हम पिछले अध्याय में पहले ही चतुर्भुज के मूलभूत तत्त्वों जैसे कि भुजाओं, कोणों, विकर्णों, शीर्षों, अभ्यंतर और बर्हिभाग आदि के बारे में पढ़ चुके हैं। यहाँ हम चतुर्भुज की किस्मों के बारे में पढ़ेंगे:

* **समांतर चतुर्भुज (Parallelogram):-** एक चतुर्भुज जिसमें सन्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समान और समांतर होते हैं, समांतर चतुर्भुज कहलाता है।



दी गई आकृति में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें,

$AB = DC, AD = BC$

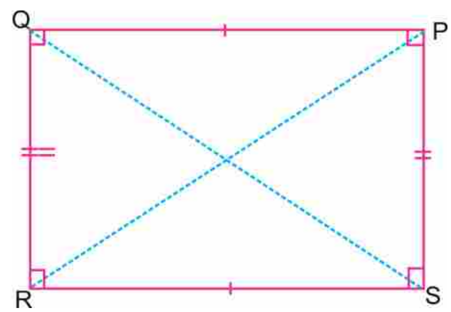
अथवा $AB \parallel DC, AD \parallel BC$

इसका ध्यानपूर्वक निरीक्षण करो और इसकी भुजाओं, कोणों और विकर्णों को मापो, आपको समांतर चतुर्भुज की निम्नलिखित विशेषताएँ मिलती हैं।

* सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं।
* सम्मुख भुजाएँ समान्तर हैं।
* सम्मुख कोण समान है।
* विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

* **आयत (Rectangle):-** एक समाँतर चतुर्भुज जिसमें प्रत्येक कोण समकोण है, आयत कहलाता है।

दी हुई आकृति मे, PQRS एक आयत है जिसमें $PQ = RS, PS = RQ$ and $\angle P = \angle Q = \angle R = \angle S = 90^o$



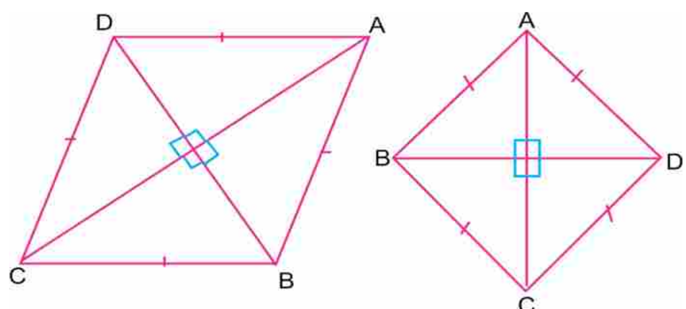
इसका ध्यानपूर्वक निरीक्षण करो और इसकी भुजाओं, कोणों और विकर्णों को मापो, आप आयत की निम्न विशेषताएँ प्राप्त करते हो:

* सम्मुख भुजाएँ बराबर है।
* प्रत्येक कोण 90^o है।
* विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
* विकर्ण लंबाई में बराबर है।

* **समचतुर्भुज (Rhombus):-** एक चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हैं, एक समचतुर्भुज कहलाता है।

अथवा

एक समांतर चतुर्भुज जिसकी आसन्न भुजाएँ समान हैं, समचतुर्भुज कहलाता है।



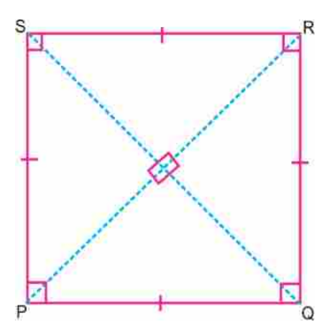
दी हुई आकृतियों में, ABCD एक समचतुर्भुज है जिसमें $AD \parallel BC, AB \parallel CD$ and $AB = BC = CD = DA$

इसका ध्यानपूर्वक निरीक्षण करो और इसकी भुजाओं, कोणों और विकर्णों को मापो, आप समचतुर्भुज की निम्न विशेषताएं प्राप्त करते हो।

* सभी भुजाएँ बराबर हैं।
* सन्मुख कोण बराबर हैं।
* विकर्ण एक दूसरे को 90^o पर समद्विभाजित करते हैं।

* **वर्ग (Square):-** एक समचतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण 90^o है, एक वर्ग कहलाता है।

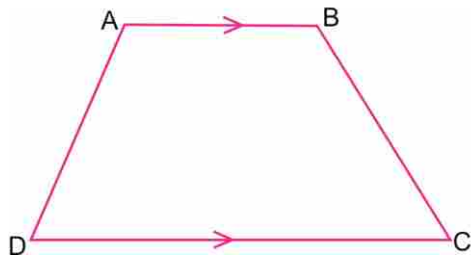
दी हुई आकृति में एक PQRS आयत है जिसमें–दी हुई आकृति में, PQRS एक वर्ग है जिसमें $PQ = QR = RS = SP$ and $\angle P = \angle Q = \angle R = \angle S = 90^o$



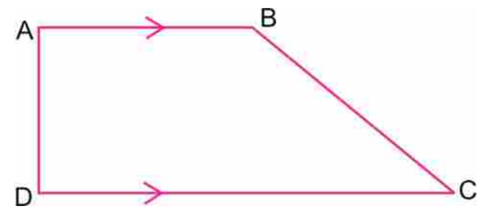
इसका ध्यानपूर्वक निरीक्षण करो और इसकी भुजाओं, कोणों, और विकर्णों को मापो, आप वर्ग की निम्न विशेषताएँ प्राप्त करते हो।

* सभी भुजाएँ समान हैं।
* प्रत्येक कोण समकोण अर्थात 90° है।
* विकर्ण लंबाई में बराबर है।
* विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
* **समलंब चतुर्भुज (Trapezium):-** एक चतुर्भुज जिसमें सन्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर होता है, समलंब चतुर्भुज कहलाता है।

  दी हुई आकृति में, ABCD एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें AB ∥ DC



(i)



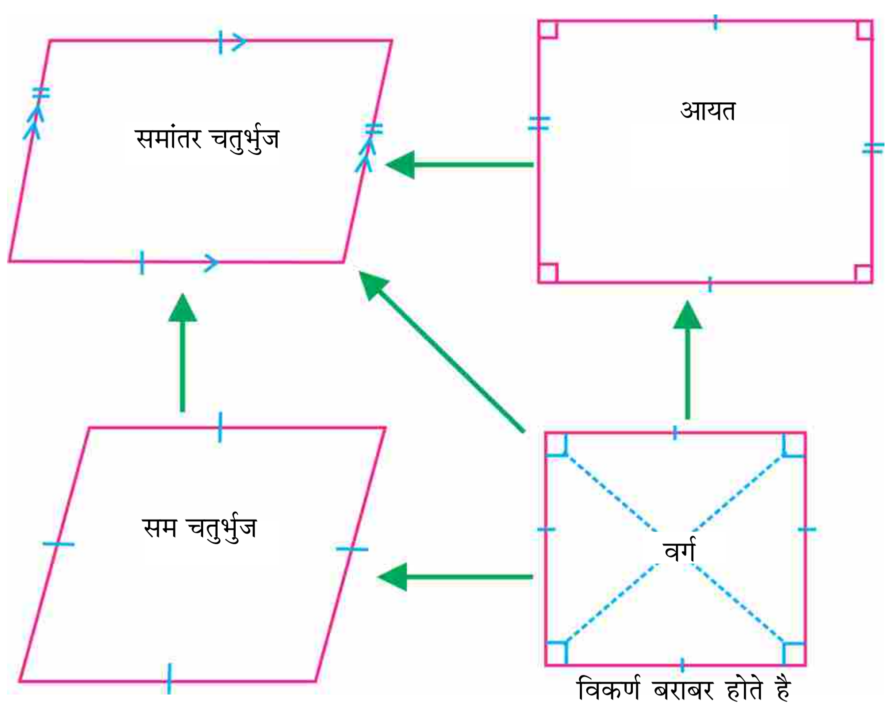
(ii)

समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज (Isosceles Trapeziums):- एक चतुर्भज जिसमें सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर होता है और शेष दो भुजाएं बराबर होती हैं समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज कहलाता है। उपरोक्त आकृतियों में, यदि AB ∥ DC और AD = BC तो ABCD एक समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज है।

इसका ध्यानपूर्वक निरीक्षण करो और इसकी भुजाओं, कोणों और विकर्णों को मापो।

* सन्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर है।
* विकर्ण समद्विभाजित नहीं होते।

चतुर्भुजों की सारणी (Table of Quadrilaterals)



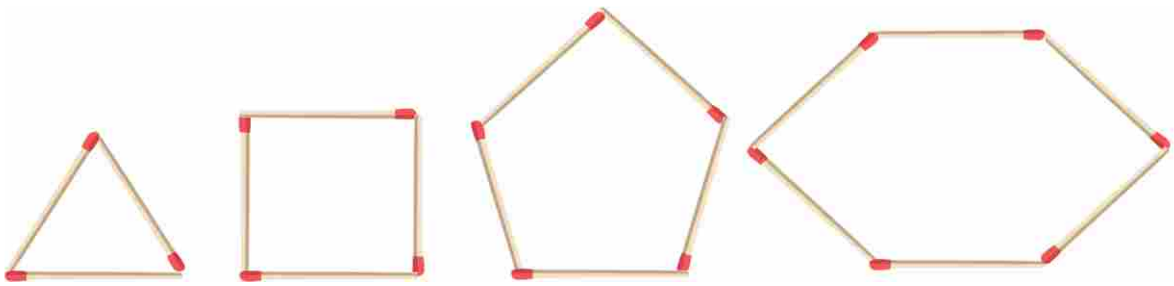
क्रिया

माचिस की तीलियों का प्रयोग करके बन्द रेखागणितीय आकृतियाँ जैसे कि त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज और षट्भुज बनाना।

पूर्व ज्ञान (Pre-requisite): रेखागणितीय आकृतियों का ज्ञान

आवश्यक सामग्री (Materials Required) :- माचिस की तीलियाँ, गोंद, पेपर

विधि (Procedure) : नीची दी आकृतियों में दिखाए अनुसार माचिस की तीलियाँ जोड़ो।



निरीक्षण (Observation):

1. तीन बन्द माचिस की तीलियाँ त्रिभुज बनाती हैं।
2. चार बन्द माचिस की तीलियाँ चतुर्भुज बनाती हैं।
3. पाँच बन्द माचिस की तीलियाँ पंचभुज बनाती हैं।
4. छह बन्द माचिस की तीलियाँ षट्भुज बनाती हैं।

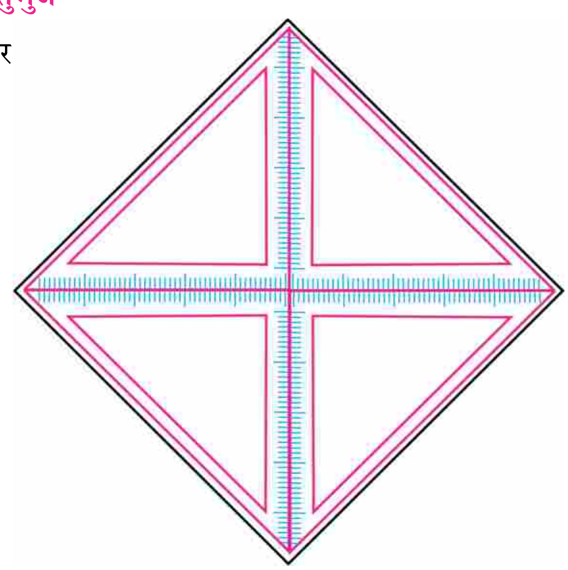
क्रिया

सेट स्कवेयर के एक युग्म का प्रयोग करके निम्नलिखित आकृतियाँ बनाओ (i) वर्ग (ii) आयत (iii) समांतर चतुर्भुज (iv) समचतुर्भुज (v) समलबंचतुर्भुज

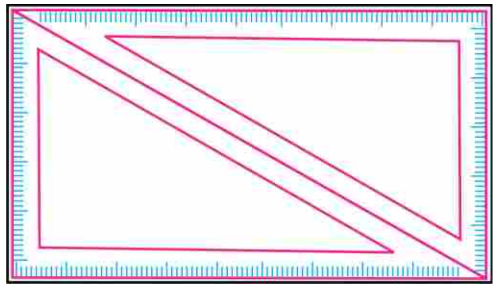
आवश्यक सामग्री (Material Required):- सेट स्कवेयर

विधि Procedure):-

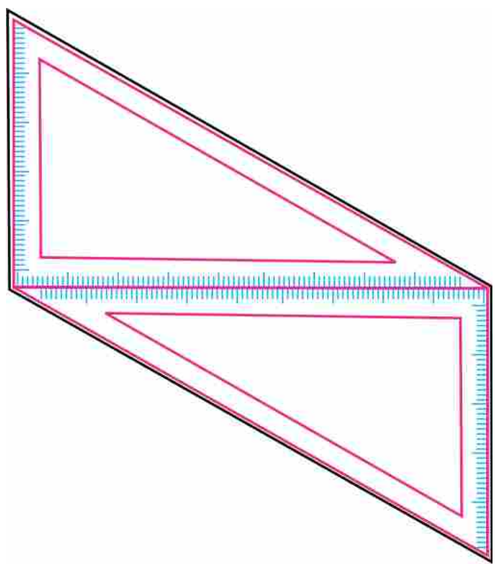
(i) **वर्ग (Square):-** 45° – 45° – 90° के चार सैट स्कवेयर लो और उनको दिखलाए अनुसार रखो:



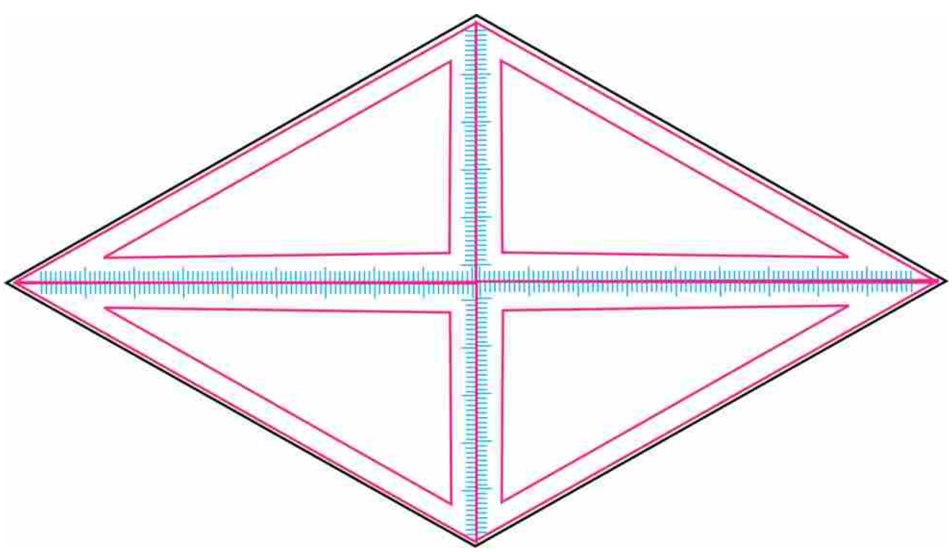
(ii) **आयत (Rectangle):-** 30° – 60° – 90° सेट स्कवेयर लो और उनको दिखलाए अनुसार रखो।



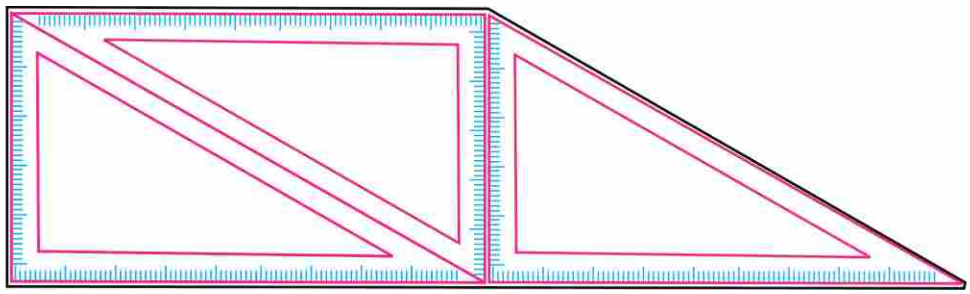
(iii) **समांतर चतुर्भुज (Parallelogram):-** 30° – 60° – 90° के सेट स्कवेयर लो और चित्र में दिखाए अनुसार रखो।



(iv) **समचतुर्भुज (Rhombus):-** 30° – 60° – 90° के सेट स्कवेयर लो और दिखाए अनुसार रखो।

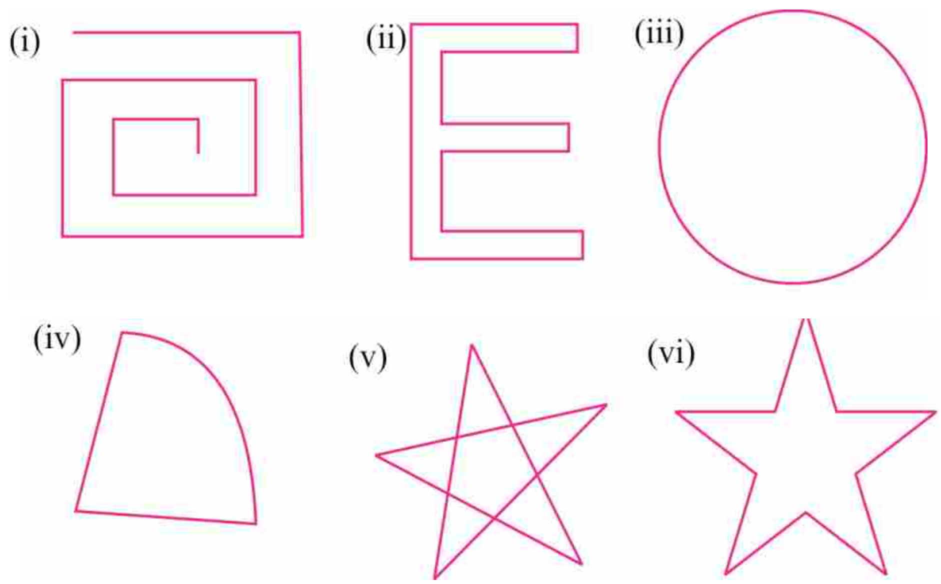


(v) **समलंब चतुर्भुज (Trapezium) :-** 30º– 60º– 90º अथवा 45º– 45º– 90º के तीन सैट स्कवेयर लो और उनको दिखाए अनुसार रखो।

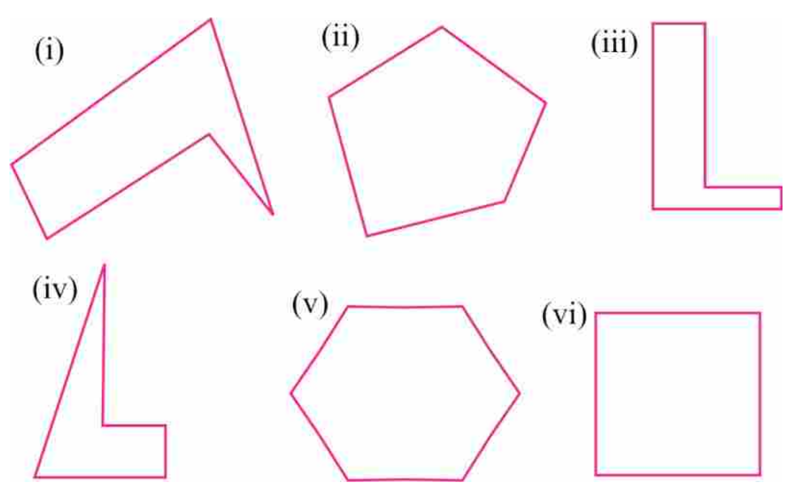


प्रश्नावली 9.5

1. निम्न में से कौन से बहुभुज है और कौन-सा बहुभुज नहीं है? कारण बताओ।



2. नीचे दिए हुए को उत्तल अथवा अवतल बहुभुजों में वर्गीकृत करें:-



3. यदि एक विशेष चतुर्भुज की विशेषता सही है तो बॉक्स में निशान (√) लगाओ, नहीं है तो (x) का निशान लगाएं।

चतुर्भुज विशेषताएँ	आयत	समाँतर चतुर्भुज	सम चतुर्भुज	समलंब चतुर्भुज	वर्ग
सभी भुजाएँ समान हैं					
केवल सन्मुख भुजाएँ समान हैं					
विकर्ण समान हैं					
विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं					
विकर्ण एक दूसरे पर लंब हैं					
प्रत्येक कोण 90° है					

4. रिक्त स्थान भरो:-

(i) .... एक चतुर्भुज है जिसमें सन्मुख भुजाओं का केवल एक युग्म समांतर होता है।

(ii) .... एक चतुर्भुज है जिसमें सभी भुजाएं समान है और विकर्ण समान लंबाई के हैं।

(iii) एक बहुभुज जिसका कम से कम एक कोण प्रतिवर्ती होता है .... कहलाता है।

(iv) .... एक समचतुर्भुज है।

(v) .... एक चतुर्भुज है जिस में सन्मुख भुजाएँ समान हैं और विकर्ण समान लंबाई के नहीं हैं।

5. सही अथवा गलत बताओ:-

(i) एक आयत सदैव एक सम चतुर्भुज होती है।

(ii) एक आयत के विकर्ण एक दूसरे पर लंब होते हैं।

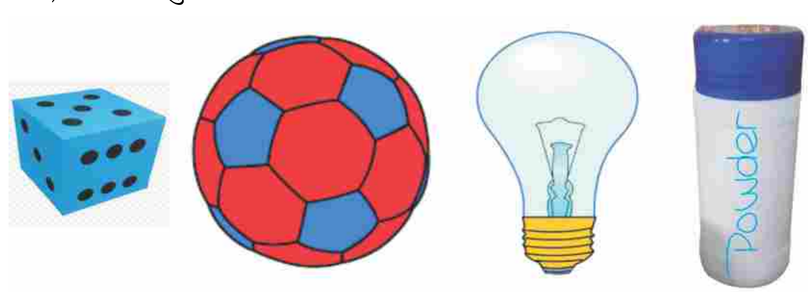
(iii) एक वर्ग, एक समांतर चतुर्भुज है।

(iv) एक समलंब चतुर्भुज, एक समांतर चतुर्भुज है।

(v) एक समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं।

9.10 त्रिविमीय आकृतियाँ (आकार) (Three Dimensional Shapes)

आप ने सपाट आकृतियों अथवा द्वि-आयामी आकारों अथवा समतल आकृतियों जैसे (आकार) कि त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त आदि के बारे सीख लिया है। ये आकार एक तल में होती है। अब आप ठोस आकृतियों अथवा त्रिविमीय आकृतियों के बारे में सीखेंगे। ये आकृतियों एक से अधिक तलों में होती है। हमारे दैनिक जीवन में, हम बहुत सी ठोस आकृतियाँ देखते हैं, उनमें से कुछ है:-



त्रिविमीय आकृतियों में 3 विमाएँ अर्थात लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई होती हैं। एक त्रिविमीय आकृति को बेहतर ढंग से बताया जा सकता है, यदि इसके फलकों (सपाट तलों), शीर्षों और किनारों के बारे में जानकारी हो।

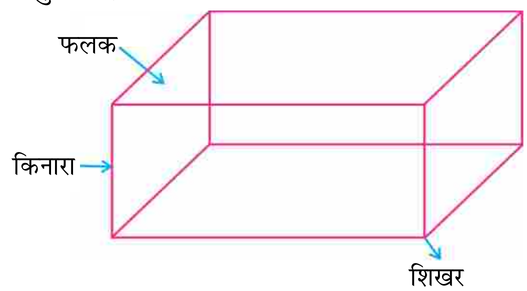
- एक ठोस आकृति का तल एक फलक कहलाता है।
- वह रेखा जहाँ दो फलक मिलते हैं एक किनारा कहलाता है।
- वह बिन्दु जहाँ तीन किनारे मिलते हैं एक कोना अथवा शीर्ष कहलाता है।

त्रिविमीय आकृतियाँ की भिन्न-भिन्न किस्में निम्नलिखित अनुसार हैं:-

* **घनाभ (Cuboid):-** वस्तुएँ जैसे कि माचिस की डिब्बी, ईंट, ज्यामितीय बॉक्स आदि एक घनाभ जैसे दिखाई देते हैं। ये छह आयताकार समतल क्षेत्रों से मिलकर बनते हैं।

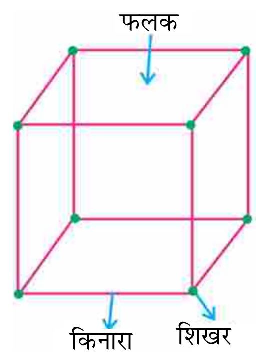
  "एक घनाभ छह आयताकार समतल क्षेत्रों से घिरा ठोस है।"

  क घनाभ के 6 फलक, 8 शीर्ष और 12 किनारे हैं।



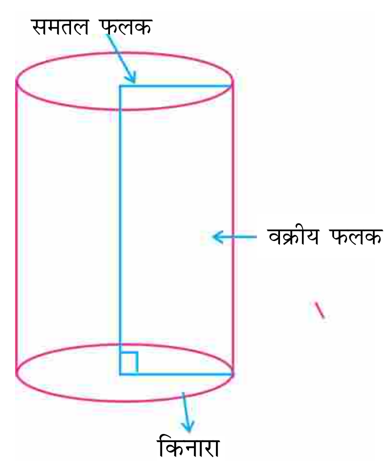
* **घन (Cube):-** एक घनाभ जिसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई समान है एक घन कहलाता है। वस्तुएँ जैसे कि पासा (गोटी), चीनी के टुकड़े आदि घन जैसे दिखाई देते है।

  एक घन के 6 फलक, 8 शीर्ष और 12 किनारे होते हैं। घन के सभी फलक समान होते हैं।



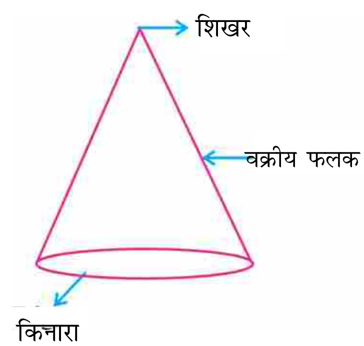
* **बेलन (Cylinder):-** वस्तुएं जैसे कि ड्रम, ग्लास, वृत्ताकार पाइपें बेलन जैसी दिखाई देती है। इन ठोसों का तल वक्रीय (टेढ़ा) होता है जिनके साथ एक जैसे वृत्ताकार आधार होते हैं। ऐसे ठोस लंब चक्रीय बेलन है।

  एक बेलन के 2 समतल फलक (ऊपर और नीचे) तथा 1 वक्रीय फलक होता है। इसके 2 वृत्ताकार किनारे होते हैं। इसका कोई शीर्ष नहीं होता।



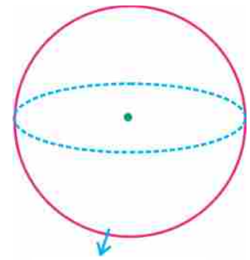
* **शंकु (Cone):-** वस्तुएँ जैसे कि आइसक्रीम कोण, जोकर की टोपी, जन्मदिन वाली टोपी एक शंकु जैसे दिखाई देते हैं।

  एक शंकु में 1 समतल फलक होता है जोकि इसका आधार होता है और 1 वक्रीय फलक होता है। इसका 1 किनारा और 1 शीर्ष होता है।



* **गोला (Sphere):-** वस्तुएँ जैसे कि ग्लोब, गेंद, सूर्य इत्यादि गोले जैसी दिखाई देती है। एक गोला 3-विमीय स्थान में उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय है जो कि एक स्थिर बिन्दु से समान दूरी पर होते हैं।

  इसका एक वक्रीय तल होता है, कोई शीर्ष नहीं होता और न ही कोई किनारा होता है।

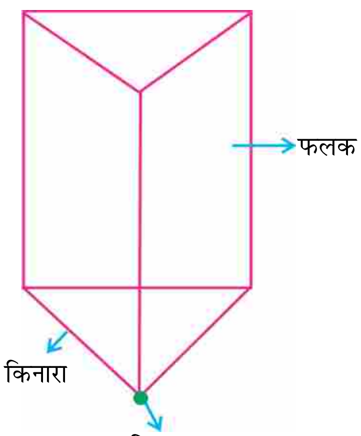


* **प्रिज़्म (Prism):-** एक ठोस वस्तु जिसके आधार समांतर होते हैं और एक ही माप और आकार के होते हैं, और भुजाएँ जिनके सम्मुख किनारे समान और समांतर होते हैं।

  एक त्रिभुजाकार प्रिज्म प्रत्येक आधार में दो एक जैसी त्रिभुजों और तीन सर्वांगसम आयतों का बना होता है।

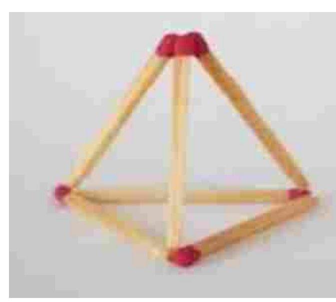
  इसके 6 फलक, 9 किनारे और 6 शीर्ष होते हैं।

  घन और घनाभ भी प्रिज़्म है। उनको क्रमश: वर्गाकार प्रिज्म और आयताकार प्रिज्म कहा जाता है।



* **पिरामिड (Pyramid):-** एक पिरामिड एक ठोस आकृति है जिसका सरलरेखीय आधार होता है और शेष फलक त्रिभुजें होती है।

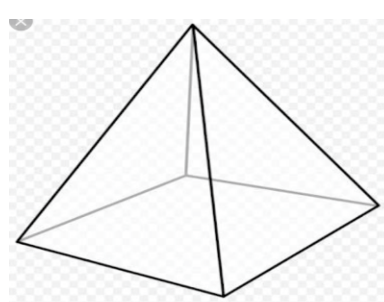
  शेष फलकों का एक उभयनिष्ठ बिन्दु होता है जिसको पिरामिड का शीर्ष कहा जाता है।



• त्रिभुजाकार आधार वाले एक पिरामिड को त्रिभुजाकार पिरामिड कहा जाता है। इसके 4 फलक, 4 शीर्ष और 6 किनारे होते हैं।

• एक वर्गाकार आधार वाले पिरामिटड के एक वर्गाकार पिरामिड कहा जाता है। इसके 5 फलक, 8 किनारे और 5 शीर्ष होते हैं।

  एक त्रिभुजाकार पिरामिड जिसका एक आधार और सभी तीन वक्रीय तल समबाहु त्रिभुजें होते है कि षट्फलक कहा जाता है।



प्रश्नावली 9.6

1. आपने आस-पास में से नीचे दी आकृतियों में से प्रत्येक की दो उदाहरणें दो:-

(i) घन (ii) घनाभ (iii) शंकु (iv) बेलन (v) गोला

2. नीचे दी गई को समतल आकृतियों और ठोस आकृतियों में बाँटो:-

(i) आयत (ii) गोला (iii) बेलन (iv) वृत्त (v) घन

(vi) घनाभ (vii) त्रिभुज (viii) शंकु (ix) वर्ग (x) प्रिज़्म

3. नीचे दिए ठोसों के आधार की आकृति का नाम बताओ:-

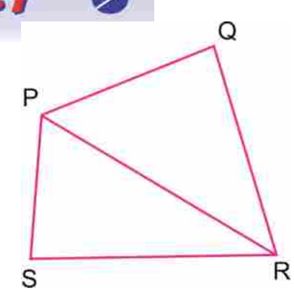
(i) घन (ii) बेलन (iii) षट् फलक (iv) घनाभ (v) वर्गाकार पिरामिड

4. सारणी में भरें:-

आकृति	सपाट तल की संख्या	वक्रीय तलों की संख्या	शीर्षों की संख्या	किनारों की संख्या
(i) घनाभ				
(ii) घन				
(iii) बेलन				
(iv) शंकु				
(v) गोला				
(vi) त्रिभुजाकार प्रिज़्म				
(vii) वर्गाकार पिरामिड				
(viii) षट् फलक				

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. संलग्न आकृति में, निम्नलिखित में से कौन-सा सही है-



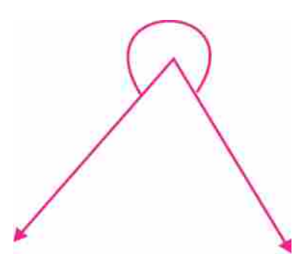
(a) PR = PQ

(b) PR > QR

(c) PS > PR

(d) PR < PQ

2. दी हुई आकृति में, कौन-सा कोण दिखाया गया है?



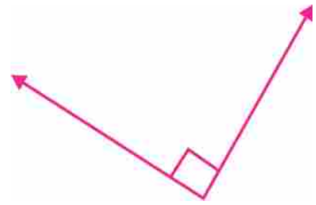
(a) प्रतिवर्ती

(b) न्यून

(c) अधिक

(d) समकोण

3. दी हुई आकृति में, कौन सा कोण दिखाया गया है।



(a) न्यून

(b) समकोण

(c) अधिक

(d) प्रतिवर्ती

4. निम्नलिखित में से लंब रेखाओं की उदाहरण कौन-सी है?

(a) रेल की पटरियाँ (b) अक्षर (X) बनाने वाले रेखाखण्ड

(c) एक मेज़ के आसन्न किनारे (d) अक्षर (M) बनाने वाले रेखाखण्ड

5. निम्नलिखित में से कौन-से त्रिभुज बनाते हैं?

(a) 60º, 72º, 48º (b) 73º, 54º, 59º (c) 60º, 51º, 70º (d) 100º, 42º, 39

6. निम्नलिखित में से कौन-सी त्रिभुज की भुजाएँ है?

(a) 1, 2, 3 (b) 2, 2, 7 (c) 3, 4, 2 (d) 5, 6, 12

7. एक समांतर चतुर्भुज जिसकी आसन्न भुजाएँ समान हो .... कहलाता है।

(a) समलंब चतुर्भुज (b) सम चतुर्भुज (c) आयत (d) वर्ग

8. निम्नलिखित प्रदत्त में से आयत के लिए कौन सा सही नहीं है?

(a) विकर्ण समान हैं (b) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं

(c) प्रत्येक कोण 90º का है (d) सभी भुजाएँ समान हैं

9. निम्नलिखित में से कौन सा सही नहीं है?

(a) प्रत्येक समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है

(b) प्रत्येक वर्ग एक समचतुर्भुज होता है।

(c) प्रत्येक आयत एक वर्ग होता है।

(d) प्रत्येक वर्ग एक समांतर चतुर्भुज है।

10. एक घन के किनारे हैं:-

(a) 10 (b) 6 (c) 12 (d) 8

सीखने के परिणाम

इस अध्याय के पूरा होने के बाद विद्यार्थी:

- भिन्न भिन्न ढंगों से रेखाखण्डों की तुलना करने के योग्य हैं।
- रेखाखण्डों, कोणों आदि को मापने के योग्य हैं।
- आस-पास की उदाहरणों के द्वारा कोणों के बारे में जानने के योग्य हैं।
- भिन्न-भिन्न समुच्चयों में बहुभुजों के बारे में जानने के योग्य हैं।
- आस-पास में से 3D आकृतियों के बारे में जानने के योग्य हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 9.1

1. (i) 4.4 सेमी (ii) 3.6 सेमी (iii) 2.5 सेमी (iv) 5.8 सेमी (v) 5 सेमी

2. (i) AB = AB (ii) CD < AC (iii) AC > AD (iv) BC < AC (v) BD > CD

प्रश्नावली 9.2

1. (i) न्यून कोण (ii) अधिक कोण (iii) प्रतिवर्ती कोण (iv) ऋजु कोण
(v) न्यून कोण (vi) सम कोण (vii) अधिक कोण (viii) सम कोण
(ix) प्रतिवर्ती कोण (x) न्यून कोण

2. (i) न्यून कोण (ii) अधिक कोण (iii) समकोण (iv) शून्य कोण
(v) अधिक कोण (vi) प्रतिवर्ती कोण (vii) सपूंर्ण कोण (viii) प्रतिवर्ती कोण
(ix) न्यून कोण (x) ऋजु कोण

3. (i) 60° (ii) 125° (iii) 110° (iv) 80° (v) 120°
(vi) 105° (vii) 80° (viii) 135° (ix) 88° (x) 90°

4. (i) 180° (ii) 60° (iii) 360°

5. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{3}{4}$ (v) $\frac{3}{4}$ (iv) $\frac{5}{12}$

6. (i) 1 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 1 (v) 1 (vi) 3
(vii) 3 (viii) 1 (ix) 2 (x) 3

7. (i) 3 (ii) 8 (iii) 8 (iv) 2

8. (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) $\frac{1}{2}$

9. (i) 90° (ii) 180° (iii) 60°

11. (i) सही (ii) गलत (iii) सही (iv) सही

12. (i) न्यून कोण (ii) ऋजु कोण अथवा 180° (iii) अधिक कोण

प्रश्नावली 9.3

1. (ii), (iii), (v) **2.** (ii), (iii) **3.** 90° **4.** (i) सही (ii) सही (iii) सही

प्रश्नावली 9.4

1. (i) समद्विबाहु (ii) समबाहु (iii) विषमबाहु (iv) समद्विबाहु
(v) विषमबाहु (vi) समबाहु

2. (i) अधिक कोण त्रिभुज (ii) सम कोण त्रिभुज (iii) न्यून कोण त्रिभुज (iv) सम कोण त्रिभुज

3. (i), (iii), (iv)

4. (i) विषमबाहु (ii) समद्विबाहु (iii) विषमबाहु (iv) समबाहु

(vi) समद्विबाहु (vi) विषमबाहु

5. (i) विषमबाहु, न्यून कोण त्रिभुज (ii) समद्विबाहु, सम कोण त्रिभुज

(iii) समद्विबाहु, अधिक कोण त्रिभुज (iv) समबाहु, न्यून कोण त्रिभुज

(v) विषमबाहु, अधिक कोण त्रिभुज

6. (i) 3 (ii) 3 (iii) 3 (iv) 6

(v) विषमबाहु त्रिभुज (vi) न्यून कोण त्रिभुज (vii) समद्विबाहु त्रिभुज (viii) अधिक कोण त्रिभुज

(ix) समबाहु त्रिभुज (x) समकोण त्रिभुज

7. (i) सही (ii) गलत (iii) गलत (iv) गलत (v) सही (vi) गलत

प्रश्नावली 9.5

4. (i) समलंब चतुभुर्ज (ii) वर्ग (iii) अवतल बहुभुज (iv) वर्ग (v) समांतर चतुर्भुज

5. (i) गलत (ii) गलत (iii) सही (iv) गलत (v) सही

प्रश्नावली 9.6

2. समतल आकृतियाँ (i), (iv), (vii), (ix)

ठोस आकृतियाँ (ii), (iii), (v), (vi), (viii), (x)

3. (i) वर्ग (ii) वृत्त (iii) समबाहु त्रिभुज

(iv) आयत (v) वर्ग

बहुवैकल्पिक प्रश्न

(1) b **(2)** a **(3)** b **(4)** c **(5)** a **(6)** c **(7)** b **(8)** d **(9)** c **(10)** c

V9R7M4

10 प्रायोगिक ज्यामिति

(PRACTICAL GEOMETRY)

उद्देश्य

इस अध्याय में आप सीखेंगे

(i) ज्यामिती यंत्रों के बारे में।

(ii) कोण और उनकी रचनाओं के बारे में।

(iii) कोणों का उनके माप अनुसार वर्गीकरण के बारे में।

(iv) कोण द्विभाजक, लम्ब समद्विभाजक आदि की रचना करना।

10.1 भूमिका (Introduction)

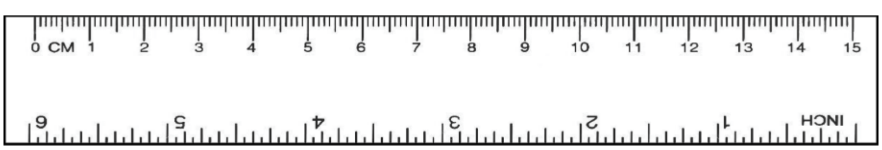
आपके कमरे, स्नानघर, फर्श, बगीचा आदि के डिज़ाइन और आकार को देखो। मिस्त्री तथा नक्शेकार को इन्हें बनाने के लिए सही माप की ज़रूरत होती है। ऐसी रचनाओं को 'ज्यामितीय रचनाएँ' कहते हैं।

इस अध्याय में आप ज्यामितीय आकृतियों की रचना के बारे में सीखोगे। सबसे पहले ज्योमैट्री बॉक्स में रखे सामान के बारे में जानकारी हासिल करें। जो इन आकृतियों को बनाने के काम आते हैं।

10.2 मूल ज्यामितीय यंत्र (Basic Geometrical Tools)

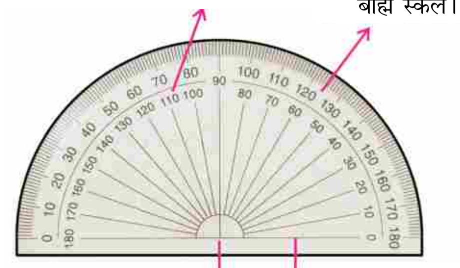
*** रूलर अथवा सीधा किनारा (The Ruler):-** रूलर एक मीटर स्केल से छोटा होता है। इसके सीधे किनारे होते हैं जिनकी आम तौर पर लम्बाई 30 सेमी (लगभग एक फुट) या 15 सेमी (लगभग 6 इंच) होती है। प्रत्येक सेंटीमीटर को आगे 10 बराबर भागों में बाँटा जाता है, जिसे मिली-मीटर कहते हैं।

इसके एक किनारे पर सेंटीमीटर तथा मिलीमीटर होते हैं तथा दूसरे किनारे पर इंच होते हैं।



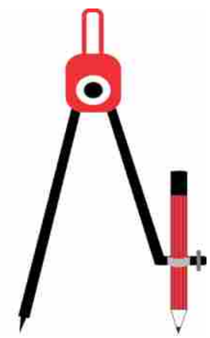
हम रूलर का उपयोग रेखाखंड को बनाने तथा नापने के लिए करते हैं।

*** कोण मापक (Protractor):-** यह एक अर्धवृत्ताकार यंत्र है जिसका एक सीधा किनारा तथा एक किनारा वक्र होता है जिसे 180 बराबर भागों में बाँटा जाता हैं। प्रत्येक भाग का माप 1° होता है। इसमें दो स्केल होते हैं : भीतरी स्केल तथा बाह्य स्केल। भीतरी स्केल में दाएँ से बाएँ 0° से 180° तक निशान लगे होते हैं तथा बाह्य स्केल में बाएँ से दाएँ 0° से 180° तक निशान लगे होते हैं। इसमें सीधे किनारे के सामानान्तर वाली रेखा होती है जिसे आधार रेखा (Base Line) कहा जाता है। आधार रेखा के मध्य बिंदु को कोण मापक का केन्द्र (Centre) कहते हैं। कोण मापक अंग्रेज़ी अक्षर 'D' की तरह दिखाई देता है, इसलिए इसे 'D' भी कहते है।



हम कोण मापक का उपयोग कोणों को बनाने तथा मापने के लिए करते हैं।

*** परकार (Compasses):-** परकार की दो धातु वाली भुजाएं होती है, जो आपस में एक किनारे से जुड़ी होती हैं। एक भुजा के एक किनारे पर तीखा धातु का अंत बिंदु (Pointer) होता है तथा दूसरी भुजा पर एक पेच लगा होता है, जिसमें पेंसिल को अच्छी तरह कसा जाता है। पेंसिल का तीखा किनारा, धातु के अंत बिंदु से किसी भी निश्चित दूरी पर रखा जा सकता है।

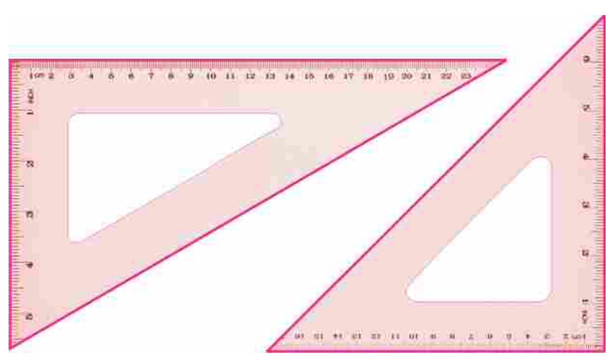


परकार बराबर लम्बाइयाँ मापने, चाप लगाने तथा वृत्त बनाने के लिए प्रयोग की जाती है।

*** डिवाइडर (Divider):-** डिवाइडर के दो धातु के अंत बिंदु होते हैं, जो आपस में एक किनारे से जुड़े होते हैं। दोनों भुजाओं के बीच की दूरी को भुजाओं को बंद करके या खोलकर निश्चित किया जा सकता है।

डिवाइडर का प्रयोग अलग-अलग लम्बाई के रेखाखंडों की तुलना करने में किया जाता है।

*** सेट स्कवेयर (Set-Squares):-** ज्योमैट्री बॉक्स में दो त्रिभुजाकार यंत्र होते हैं, जिन्हें सेट स्कवेयर कहते हैं। एक में 30°–60°–90° कोण होते हैं इसलिए इसे 30°–60°–90° सेट स्कवेयर कहते हैं। दूसरे में 45° – 45° – 90° कोण होते हैं इसलिए इसे 45° – 45° – 90° सेट स्कवेयर कहते हैं। इनमें दो सीधी लंब रेखाएं होती है। एक किनारे पर सेंटीमीटर तथा दूसरे किनारे पर इंच होते हैं।



सेट स्कवेयर का प्रयोग लंब रेखाओं, समानान्तर रेखाओं तथा कोई कोण जैसे 30° , 45° , 60° , 75°, 90° आदि को बनाने के लिए किया जाता है।

ज्यामितीय आकृतियाँ बनाते समय निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना बहुत जरूरी है।

- बढ़िया तथा सीधे किनारे वाला रूलर तथा तीखी पैन्सिल का उपयोग।
- हमेशा पतली रेखाएँ खींचें तथा हल्के बिंदु अंकित करें।
- कोशिश करें, दो पेंसिलें ज्योमैट्री बॉक्स में रखें। एक पेंसिल परकार के लिए तथा दूसरी पेंसिल रेखाएं आदि खींचने के लिए।
- यकीनी बनाएं कि परकार का सिरा तथा पेंसिल का सिरा एक लेवल पर हो।

प्रश्नावली 10.1

1. रूलर का क्या उपयोग है?
2. कोण मापक का उपयोग बताएँ?
3. परकार का उपयोग बताएँ।
4. सेट स्कवेयर की मदद से निम्नलिखित कोण बनाएं:-

   (i) 30º (ii) 45º (iii) 60º (iv) 75º (v) 90º

10.3 रेखाखण्ड की रचना(Construction of a line segment)

पिछले अध्याय में हम रेखाखण्डों को मापना, प्रेक्षण और डिवाइडर की मदद से तुलना करना आदि तकनीक सीख चुके हैं। यहाँ हम रेखा खण्ड को दो तरीकों से बनाना सीखेंगे।

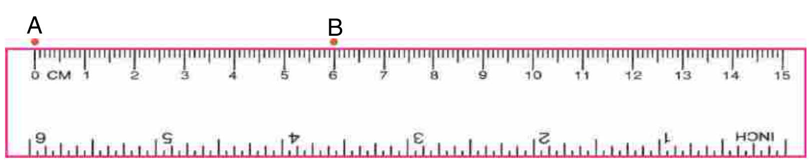
(i) रूलर की मदद से (ii) परकार की मदद से

(i) रूलर की मदद से रेखाखण्ड बनाना (Construction of a line segment using a ruler):- रेखाखण्ड को रूलर और पेंसिल से बनाने की सरल विधि नीचे दिखाई गई है।

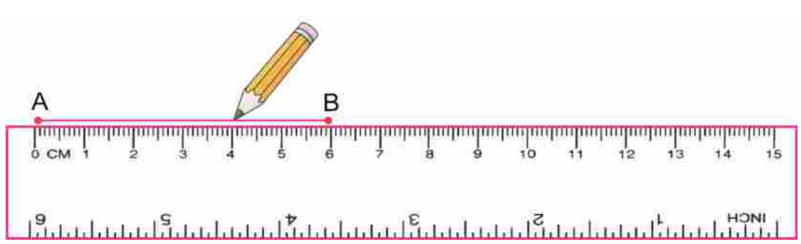
एक 6 सेमी लम्बाई का रेखाखण्ड बनाना सीखते हैं:-

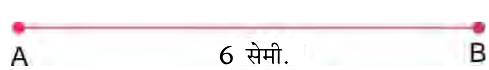
रचना के चरण (Step of Construction):-

1. रूलर को कागज़ पर सही ढंग से पकड़ कर रखें।
2. रूलर पर '0' के निशान से कागज पर पेंसिल से एक बिंदु A लगाएं तथा रूलर पर 6 सेमी. के निशान से कागज़ पर बिंदु B लगाएँ।



3. रूलर के साथ-साथ पेंसिल की मदद से A तथा B को मिलाएँ।





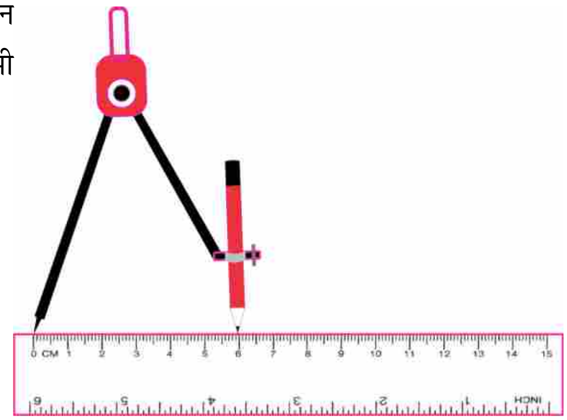
इस प्रकार AB = 6सेमी. वांछित रेखाखण्ड है।

इससे अच्छी विधि रेखाखण्ड की रचना के लिए परकार का प्रयोग है।

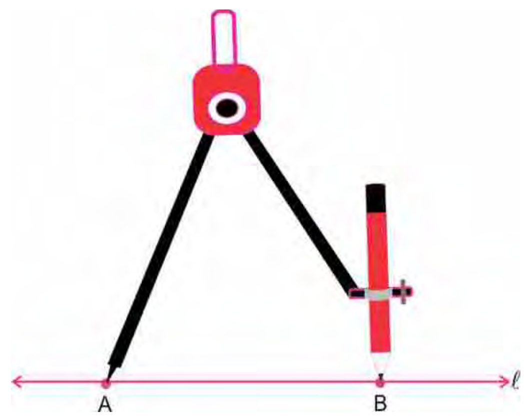
(ii) परकार तथा रूलर की सहायता से रेखाखण्ड की रचना (Constuction of a line segment using a ruler and Compasses):- परकार की सहायता से रेखाखण्ड बनाने की विधि नीचे दी गई है:

1. एक रेखा ℓ बनाएँ तथा उस पर कोई बिंदु A लगाएँ।

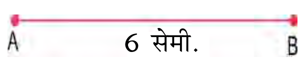
2. परकार का नुकीला सिरा रूलर के '0' निशान पर लगाएँ तथा इसे पेंसिल की ओर से 6 सेमी के निशान तक खोलें।



3. अब चरण 2 में खुली परकार के नुकीले सिरे को A पर रखें तथा रेखा ℓ पर एक चाप लगाएँ जो B पर काटती है।



4. AB =6 सेमी. वांछित रेखाखण्ड है।



10.3.1 दिए गए रेखाखण्ड के बराबर माप का रेखाखण्ड बनाना (Construction of a copy of a given line segment)

मान लो एक रेखाखण्ड XY दिया गया है।

हम एक और रेखाखण्ड PQ बनाना चाहते हैं जिसकी लम्बाई XY के बराबर हो।

आम तौर पर हम रूलर से रेखाखण्ड XY को मापते हैं तथा उस माप का एक और रेखाखण्ड AB खींचते हैं।

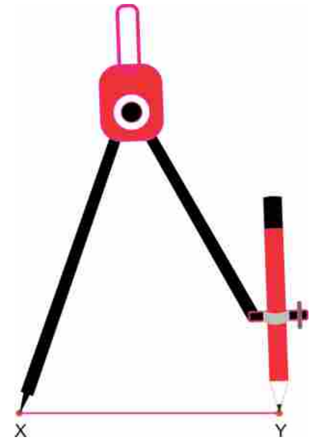
परन्तु इस विधि से हमेशा रेखाखण्ड का सही माप नहीं आता तो रेखाखण्ड के सही माप के लिए हम रूलर और परकार का प्रयोग करेंगे।

परकार और रूलर की सहायता से रचना:

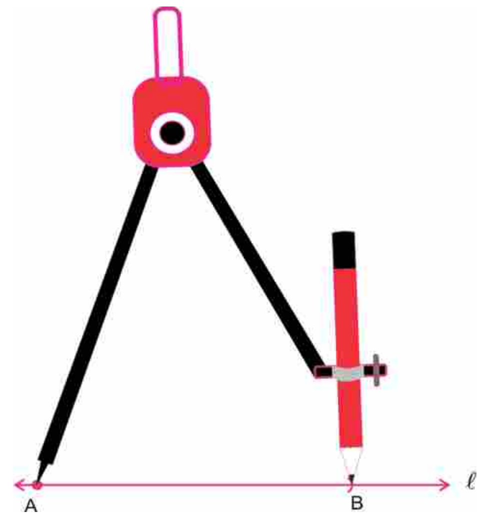
रेखा खण्ड XY दिया गया है।

चरण 1:– एक रेखा ℓ बनाएँ तथा उस पर बिंदु A लगाएँ।

चरण 2:– परकार से दी गई रेखाखण्ड XY को मापें।



चरण 3:– परकार के उसी माप से (चरण 2), परकार का नुकीला सिरा रेखा ℓ के बिंदु A पर रखें तथा चाप लगाएँ जो ℓ को B पर काटती है।



चरण 4:– AB वांछित रेखाखण्ड है जिसकी लम्बाई XY के बराबर है।

$\therefore$ AB = XY

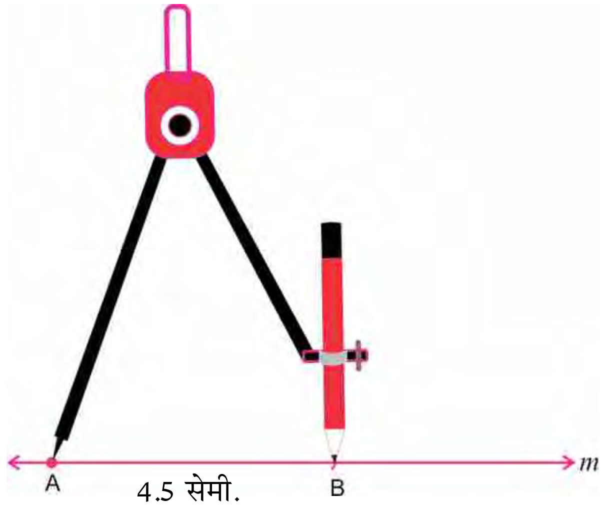
10.3.2 रेखाखण्ड की रचना करना जिसकी लम्बाई दिए गए दो रेखाखण्डों के जोड़ के बराबर हो (Construction of a line segment whose length is the sum of the lengths of the two given line segments)

मान लो, दो रेखाखण्ड AB तथा BC है, जिनकी लम्बाइयाँ क्रमश: 4.5 सेमी तथा 3 सेमी है। हम परकार तथा रूलर की सहायता से एक रेखाखण्ड AC की रचना कर सकते हैं, जिसकी लम्बाई AB + BC भाव 4.5 + 3 = 7.5 सेमी. होगी।

रचना के चरण (Steps of Construction):-

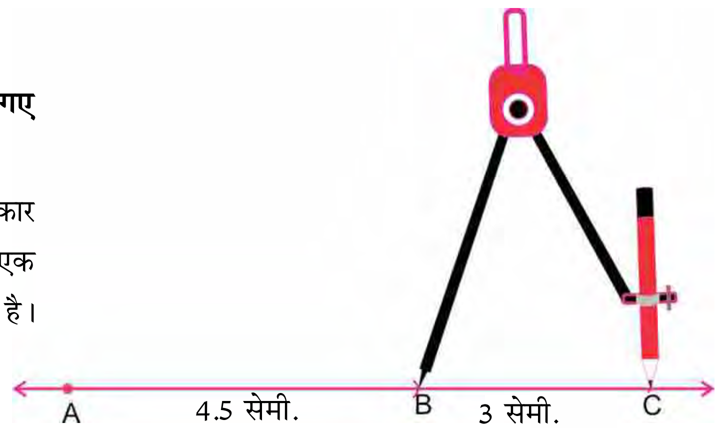
चरण 1:– एक रेखा m बनाएँ जिसकी लम्बाई AB और BC के जोड़ से अधिक हो। उस पर एक बिंदु A लें।

चरण 2:– परकार की मदद से AB को मापें तथा उस माप से, परकार के नुकीले सिरे को रेखा m पर लगे बिंदु A पर रखें तथा m पर एक चाप लगाएँ जो m को B पर काटती है।



चरण 3:– **अब परकार की मदद से दिए गए रेखाखण्ड BC को मापें।**

चरण 4:– परकार के उस माप से (चरण 3) परकार के नुकीले सिरे को B पर रखते हुए एक चाप लगाएँ जो m को C पर काटती है।

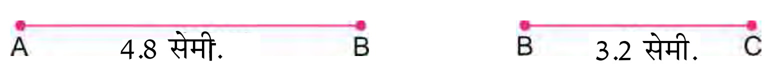


चरण 5:– इस प्रकार AC वांछित रेखाखण्ड है, जिसकी लम्बाई रेखाखण्ड AB तथा BC के जोड़ के बराबर है।

$\therefore$ AC = AB + BC = 4.5 + 3 = 7.5सेमी

10.3.3 रेखाखण्ड की रचना करना जिसकी लम्बाई दो दिए गए रेखाखण्डों की लम्बाइयों के अंतर के बराबर हो। (Construction of a line segment equal to the difference of the lengths of two given line segments)

मान लो रेखाखण्ड PQ तथा PR की लम्बाइयाँ क्रमश: 8 सेमी. तथा 3.2 सेमी है। हम रेखाखण्ड QR की रचना परकार तथा रूलर की मदद से कर सकते हैं, जिसकी लम्बाई PQ-PR = 8 – 3.2 = 4.8 सेमी है।

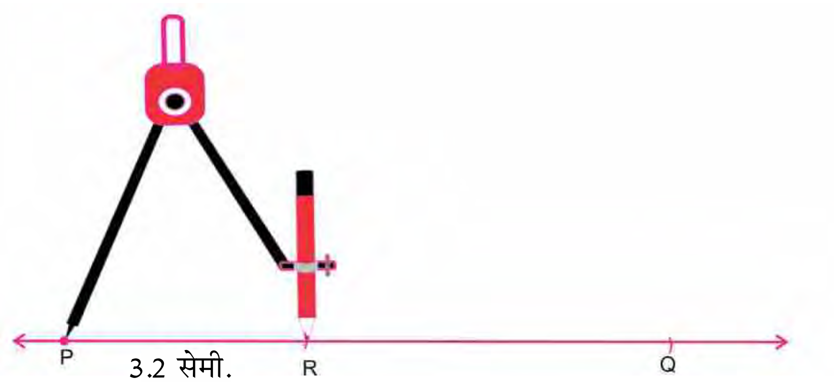


रचना के चरण (Steps of Construction)

चरण 1:– एक रेखा ℓ बनाओ तथा उस पर बिंदु P लो।

चरण 2:– परकार से दिया गया रेखाखण्ड PQ मापो और उसी माप से परकार को रेखा ℓ के बिंदु P पर रखकर चाप लगाओ, जो रेखा ℓ के बिंदु Q पर काटती है।

चरण 3:- अब परकार से दिया गया रेखाखण्ड PR मापो तथा उसी माप से परकार को रेखा ℓ के बिंदु P पर रखकर चाप लगाओ, जो ℓ को बिन्दु R पर काटती है।



चरण 4:- अब RQ वांछित रेखाखण्ड है जिसकी लम्बाई रेखाखण्ड PQ तथा रेखाखण्ड PR के अंतर के बराबर है।

$\therefore$ RQ = PQ – PR = 8 – 3.2 = 4.8 सेमी

प्रश्नावली 10.2

1. रूलर की सहायता से दी गई लम्बाइयों के रेखाखण्ड बनाओ।

   (i) 5 सेमी (ii) 6.5 सेमी (iii) 5.2 सेमी (iv) 6.8 सेमी (v) 9.7 सेमी (vi) 8.4 सेमी
2. प्रश्न 1 में दी लम्बाइयों के रेखाखण्ड परकार तथा रूलर की सहायता से बनाएँ।
3. 8.4 सेमी लम्बाई वाला रेखाखण्ड AB बनाओ और उसमें से AC को काटो, जिसकी लम्बाई 5.3 सेमी है। BC को मापो।
4. दो रेखाखण्ड AB और CD बनाओ जिनकी लम्बाइयाँ क्रमश: 8.4 सेमी और 4.5 सेमी है। नीचे लिखी लम्बाइयों की रचना करो।

   (i) AB + CD (ii) AB – CD (iii) 2CD
5. दो रेखाखण्ड PQ और RS बनाओ जिनकी लम्बाइयाँ क्रमश: 6.4 सेमी और 3.6 सेमी है। नीचे लिखी लम्बाइयों की रचना करो।

   (i) PQ + RS (ii) PQ – RS (iii) 2PQ (iv) 2RS (v) 3RS
6. किसी भी लम्बाई का रेखाखण्ड PQ बनाओ। इसे बिना मापे, इसकी लम्बाई के बराबर एक और रेखाखण्ड बनाओ।

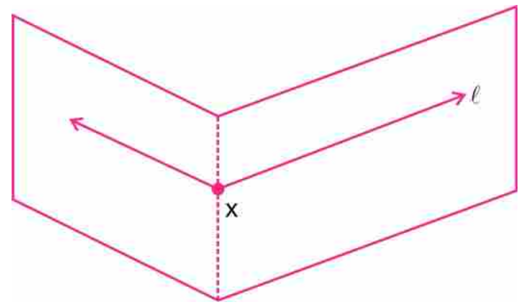
10.4 रेखा पर एक बिंदु से लंब की रचना (Construction of a perpendicular at a point on the line)

एक रेखा ℓ पर एक बिंदु X है। आओ रेखा ℓ पर इस बिंदु X से एक लंब बनाए।

एक रेखा पर लंब बनाने के लिए कई विधियाँ हैं:-

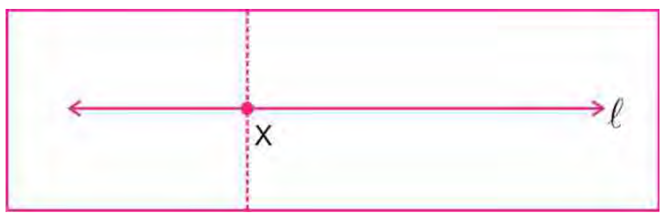
(a) पेपर फोल्ड विधि (By Paper Folding)

1. इस रेखा को टरेस पेपर पर बनाओ।
2. अब टरेस पेपर को इस प्रकार मोड़ो कि मोड़ के दोनों तरफ से रेखा एक दूसरे पर आ जाए।



3. मोड़ को इस प्रकार करें ताकि मोड़ वाली क्रीज़ बिंदु X पर आ जाए।

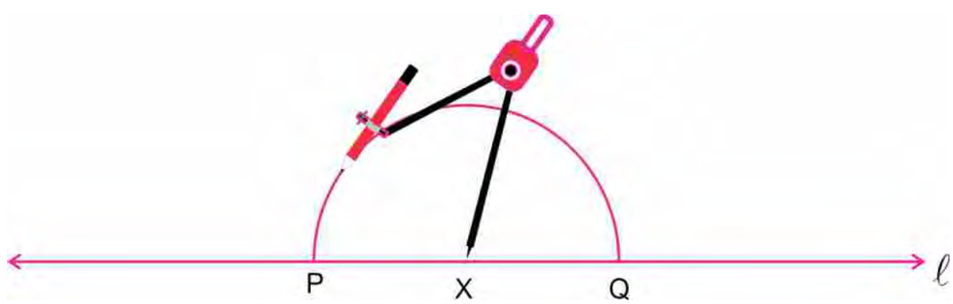
4. मोड़ को खोलने के बाद, जो क्रीज़ हासिल होगी, वह रेखा ℓ पर बिंदु X से खींचा गया लंब है।



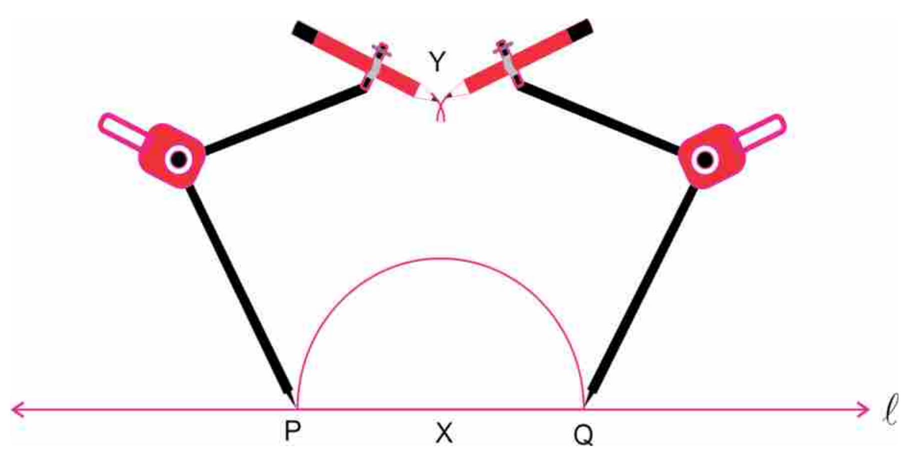
(b) रूलर और परकार से (By ruler and compasses) :

1. एक रेखा ℓ बनाओ और उस पर बिंदु X लो।

2. बिंदु X से रेखा ℓ पर किसी भी त्रिज्या से एक चाप बनाओ जो ℓ को P तथा Q पर काटती है।



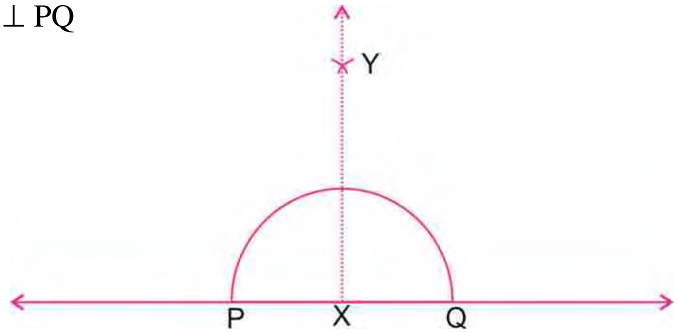
3. अब P और Q से चरण 2 में खोली परकार के माप से आधी से ज़्यादा खोलकर चाप लगाएँ जो आपस में बिंदु Y पर काटती हैं।



4. XY को मिलाओ।

इस प्रकार XY, PQ या रेखा ℓ पर लंब है।

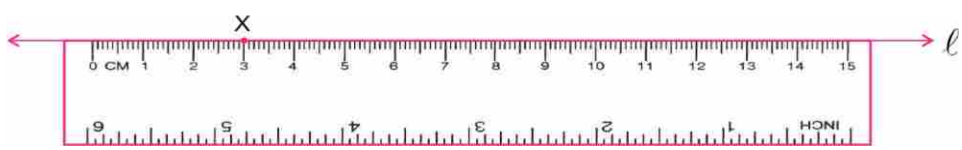
या $XY \perp PQ$

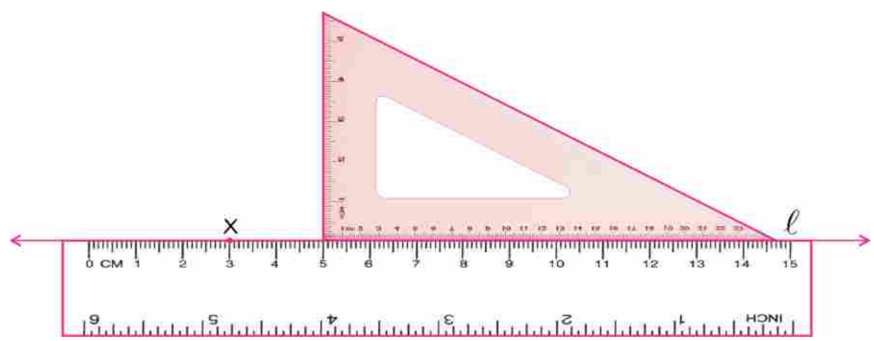


यहाँ X को लंब का आधार कहते हैं।

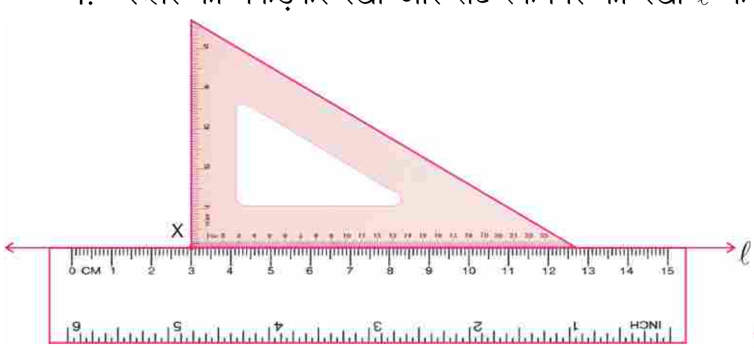
(c) सेट स्कवेयर और रूलर की मदद से रचना (Construction using a set square and a ruler):

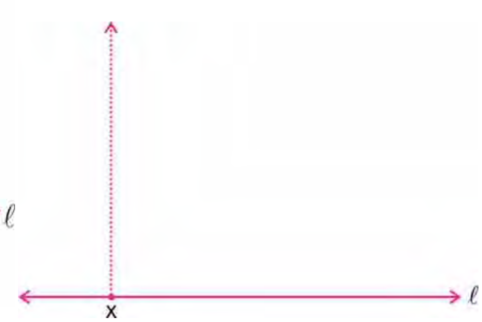
1. एक रेखा ℓ बनाओ और उस पर बिंदु X लो।
2. स्केल के एक किनारे को रेखा ℓ से मिलाएं।





3. सेट स्कवेयर को इस प्रकार रखें कि उसका एक समकोण वाला किनारा रूलर के साथ आ जाए।
4. रूलर को पकड़कर रखो और सेट स्कवेयर को रेखा ℓ के अनुसार बिंदु X तक स्लाइड करो।





5. सेट स्कवेयर को उसी स्थान (चरण 4) में रखो और इसके सीधे किनारे (Vertical Edge) पर रेखा XY बनाओ।

अब XY रेखा ℓ पर वांछित लंब है, $XY \perp \ell$.

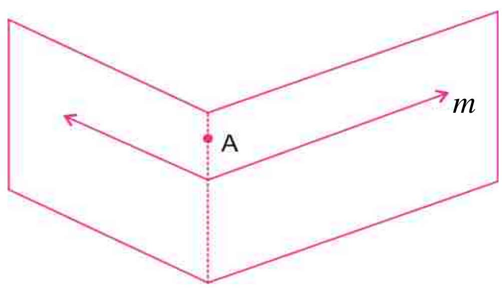
10.4.1 एक दी गई रेखा पर उस बिंदु से शीर्षलंब खींचना, जो बिंदु रेखा पर नहीं है(Construction of an Altitude to a line from a given point which is not on the line)

एक रेखा m दी गई है और बिंदु A , जो रेखा m पर नहीं है। आओ, अब बिंदु A से रेखा m पर शीर्षलंब खींचना सीखें।

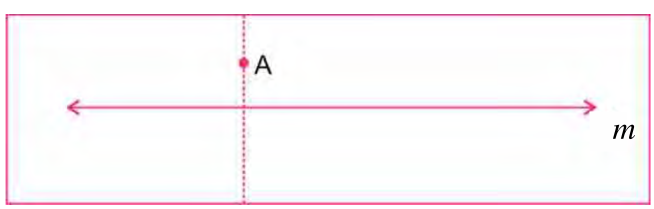
शीर्षलंब खींचने की कई विधियाँ हैं, जो नीचे दी गई है:

(a) पेपर फोल्ड विधि (By Paper Folding)

1. टरेस पेपर पर रेखा m बनाओ।
2. अब टरेस पेपर को इस प्रकार मोड़ो कि रेखा m एक दूसरे पर आ जाए।

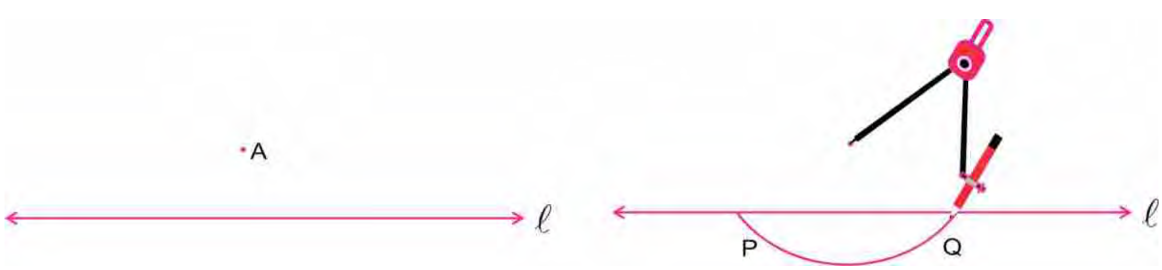


3. कागज़ को इस प्रकार मोड़ो कि उसकी क्रीज़ बिंदु A पर आ जाए।
4. कागज़ का फोल्ड खोलने के बाद, आपको A पर जो क्रीज़ मिलेगी, वह रेखा m पर वांछित शीर्षलंब है।

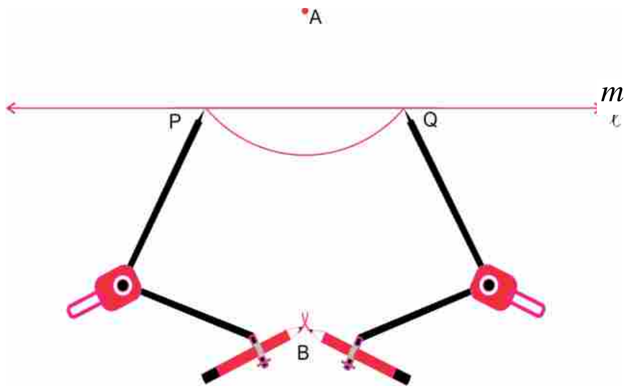


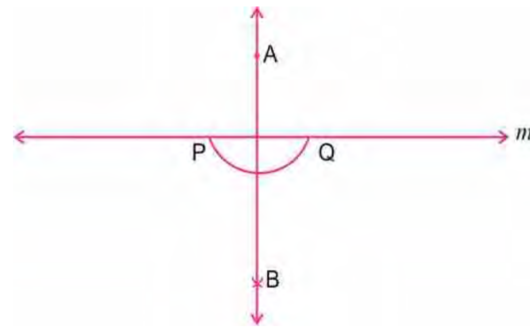
(b) रूलर और परकार की मदद से (By Ruler and Compasses)

1. एक रेखा m बनाओ तथा एक बिंदु A लो, जो रेखा पर नहीं है।
2. बिंदु A से रेखा m पर चाप लगाओ, जो रेखा को बिंदु P और Q पर काटती है।



3. कोई भी त्रिज्या लेकर, P और Q को केन्द्र मानकर, दो चाप लगाएं जो आपस में बिंदु B पर काटती हैं।
4. AB को मिलाएं।



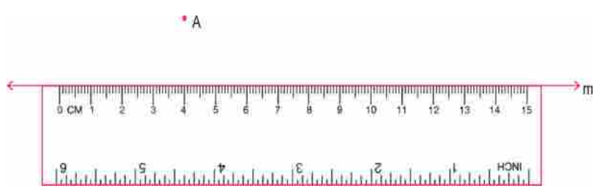


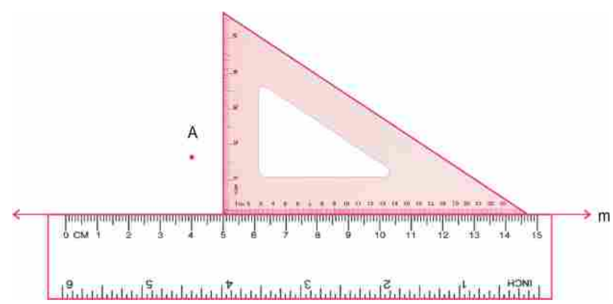
इस प्रकार AB रेखा *m* पर शीर्षलंब है।

भाव AB $\perp$ *m*

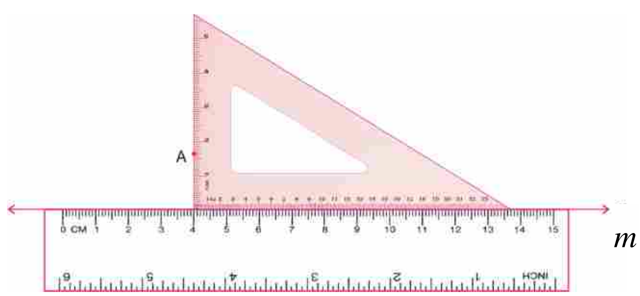
(c) रूलर और सेट स्कवेयर की मदद से (Construction using a set square and a ruler)

1. एक रेखा *m* बनाओ और एक बिंदु A लो, जो रेखा पर नहीं है।
2. रूलर का एक किनारा रेखा *m* पर लगाओ।





3. सेट स्कवेयर का एक समकोण वाला किनारा, रूलर के साथ लगाओ।
4. अब रेखा *m* के साथ सेट स्कवेयर को बिंदु A तक स्लाइड करो।

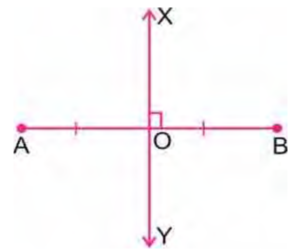


5. अब सेट स्कवेयर को उसी स्थिति (चरण 4) में रखकर उसके सीधे किनारे के साथ AB रेखा बनाओ।

   अब AB, रेखा *m* पर वांछित शीर्षलंब हैं, AB $\perp$ *m*.

10.5 लंब समद्विभाजक (Perpendicular Bisector)

वह रेखा जो एक रेखाखण्ड के मध्य बिंदु पर लंब होती है, उसे रेखाखण्ड का लंब समद्विभाजक कहते हैं। इसे सममिति रेखा भी कहते हैं।



दिए गए चित्र में, रेखा XY, रेखाखण्ड AB का लंब समद्विभाजक है। यहाँ $AO = OB$ और $\angle XOB = \angle XOA = 90^\circ$

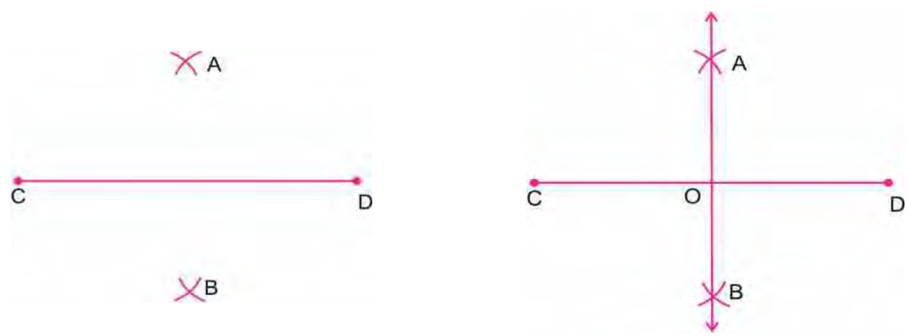
10.5.1 रेखाखण्ड के लंब समद्विभाजक की रचना (Construction of the perpendicular bisector of a line segment)

एक रेखाखण्ड CD = 6.4 सेमी लो। इस रेखाखण्ड का लंब समद्विभाजक बनाएँ।

रचना के चरण (Step of Constrution):

1. एक रेखाखण्ड CD = 6.4सेमी बनाओ।

2. C को केन्द्र मानकर, CD के आधे से ज़्यादा परकार खोलकर, CD के दोनों ओर चाप लगाएं।
3. अब D को केन्द्र मानकर, चरण 2 जितनी परकार खोलकर चाप लगाएँ, जो चरण 2 में लगाई चापों को A तथा B पर काटती हैं।
4. AB को मिलाओ, जो CD को 'O' पर काटती है। बिंदु O रेखाखण्ड AB को दो बराबर भागो में बाँटता है।



इस प्रकार AB,CD का लंब समद्विभाजक है।

प्रश्नावली 10.3

1. एक रेखा r बनाएँ और उस पर बिंदु P लो। बिंदु P से रेखा r पर लंब बनाएँ।
   (i) रूलर और परकार द्वारा
   (ii) रूलर और सेट स्कवेयर द्वारा
2. एक रेखा p बनाएं तथा उस पर बिंदु z लें। p पर बिंदु z से लंब बनाएँ।
   (i) रूलर और परकार द्वारा
   (ii) रूलर और सेट स्कवेयर द्वारा

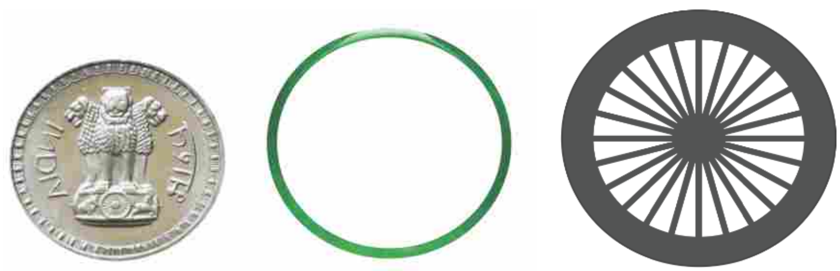
3. एक रेखा AB बनाएँ और रेखा के दोनों और बिंदु P और Q लें। बिंदुओं P और Q से रेखा AB पर रूलर और परकार से लंब बनाएँ।
4. 7सेमी लम्बा रेखाखण्ड खींचे और इसका लंब समद्विभाजक बनाएँ।
5. PQ = 6.8सेमी का रेखाखण्ड बनाएँ और इसका लंब समद्विभाजक XY बनाएँ, जो PQ को M पर काटता है। PM और QM को मापो। क्या PM = QM है?
6. AB =5.4सेमी रेखाखण्ड का लंब समद्विभाजक बनाएँ। लंब समद्विभाजक पर कोई भी बिंदु X लो और X को A और B से मिलाओ। क्या AX = BX है?
7. निम्नलिखित लंबाइयों के रेखाखण्ड का लंब समद्विभाजक बनाएँ।
   (i) 8.2सेमी (ii) 7.8सेमी (iii) 6.5सेमी
8. 8 सेमी लम्बा रेखाखण्ड बनाएँ तथा परकार की सहायता से इसे चार बराबर भागों में बाँटें। प्रत्येक भाग को मापें।

10.6 वृत्त (Circle)

पिछले अध्याय में हम वृत्त और उसके भाग त्रिज्या, जीवा, केन्द्र, व्यास आदि का अध्ययन किया था।

वृत्त एक बंद वक्र है,जो एक निश्चित बिंदु से बराबर दूरी पर अनन्त बिंदुओं का समूह है। उस निश्चित बिंदु को केन्द्र और उस बराबर दूरी को त्रिज्या कहते हैं।

चूड़ी, सिक्का, पहिया, रोटी आदि वृत्ताकार आकार में होते हैं।

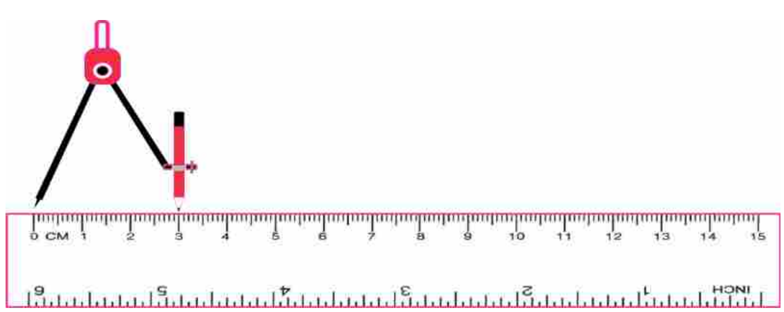


यहाँ हम दी गई त्रिज्या के अनुसार वृत्त की रचना सीखेंगे।

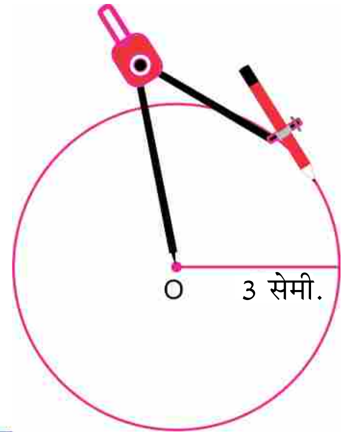
10.6.1 दी गई त्रिज्या से वृत्त की रचना (Construction of a Circle of a given radius)

आएँ, 3 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाना सीखें।

1. कॉपी पर बिंदु O लगाओ, जहाँ वृत्त बनाना है।
2. दिखाए गए चित्र अनुसार, 3 सेमी माप की परकार खोलो।



3. 3 सेमी माप की परकार खोलकर, बिंदु O पर रखकर, उसे पूरा घुमाओ। एक चक्कर पूरा करने के बाद आपको वांछित वृत्त प्राप्त होता है।



प्रश्नावली 10.4

1. दी गई त्रिज्या के वृत्त बनाओ:

   (i) 3.5सेमी (ii) 4सेमी (iii) 2.8सेमी (iv) 4.7सेमी (v) 5.2सेमी

2. 6 सेमी व्यास का एक वृत्त बनाएँ।
3. एक ही केन्द्र O पर त्रिज्या 3.2 सेमी और 4.5 सेमी त्रिज्या वाले समकेन्द्री वृत्त बनाएँ।
4. त्रिज्या 4.2 सेमी का केन्द्र O पर एक वृत्त बनाएँ। तीन बिंदु A, B, C इस प्रकार लें ताकि A वृत्त पर हो, B वृत्त के अंदर हो तथा C वृत्त के बाहर हो।
5. 3 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाएँ और एक जीवा बनाएँ। जीवा का लंब समद्विभाजक बनाएँ। क्या यह लंब समद्विभाजक केन्द्र में से गुज़रता है?

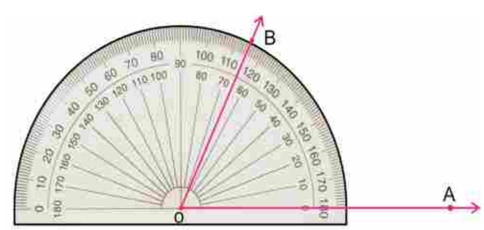
10.7 कोण (Angles)

आप पहले ही अलग-अलग प्रकार के कोणों के बारे में जानते हैं। इस भाग में आप कोणों की कोण मापक और परकार की सहायता से रचना करना सीखेंगे।

आओ, 65° के कोण की रचना करें।

रचना के चरण:

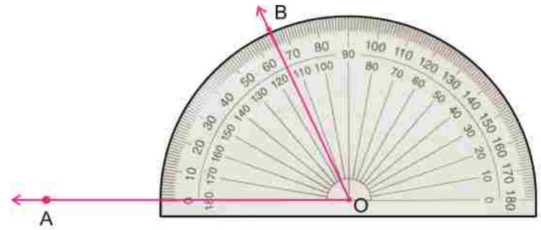
1. एक किरण OA बनाएँ।
2. कोण मापक को OA पर इस प्रकार रखें कि कोण मापक का केन्द्र आरम्भिक बिंदु O पर तथा आधार रेखा (BaseLine) OA के ऊपर आ जाए।



3. कोण मापक के भीतरी स्केल पर 65° पर बिंदु B लगाएँ।
4. कोण मापक को हटाएँ और OB को मिलाएँ।

   इस प्रकार वांछित कोण $\angle AOB = 65°$ है।

यदि किरण $\overrightarrow{OA}$ आधार रेखा के केन्द्र के बाई ओर हो तो बाह्य स्केल पर 65º पर बिंदु B लगाएँ। तब $\angle AOB = 65^\circ$



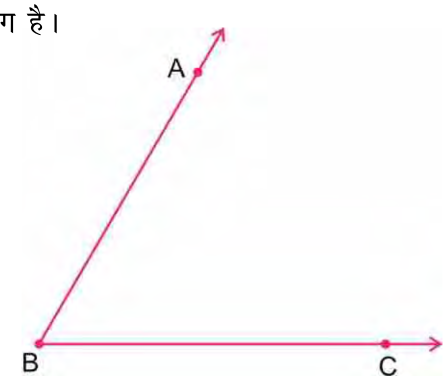
याद रखें LORI (Left Outer Right Inner) (बायाँ बाहरी और दायाँ भीतरी)

जब किरण की दिशा बायीं ओर हो तो बाहरी स्केल पढ़ों तथा जब किरण की दिशा दायीं ओर हो तो भीतरी स्केल पढ़ें।

10.7.2 दिए गए कोण के बराबर माप के कोण की रचना (Constrution of an angle equal to a given angle)

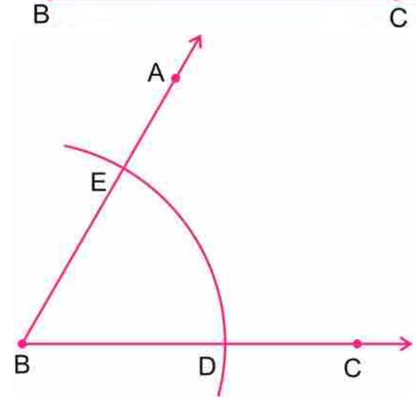
मान लो आपको किसी दिए कोण के बराबर माप का कोण बनाने के लिए कहा जाता है, जिसका माप नहीं दिया गया है। इसके लिए सबसे बढ़िया ढंग रूलर और परकार का उपयोग है।

कोण $\angle ABC$ के बराबर माप के कोण $\angle PQR$ की रचना करें।

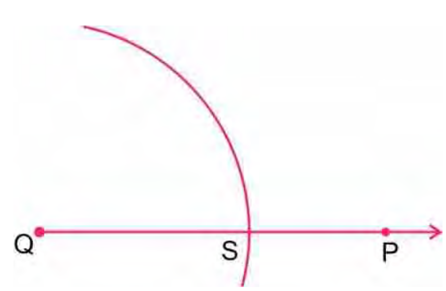


रचना के चरण (Steps of Construction)

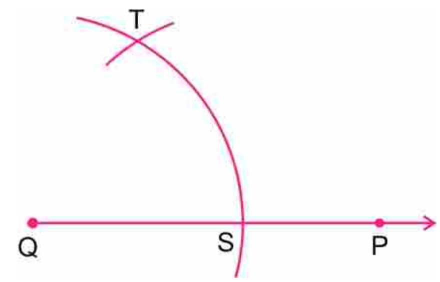
1. B को केन्द्र मानकर, कोई भी त्रिज्या लेकर चाप बनाएँ, जो $\angle ABC$ की भुजाओं CA और BA को क्रमशः D और E पर काटती है।



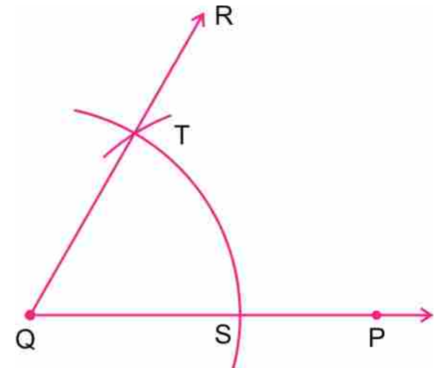
2. एक किरण QP बनाएँ। Q को केन्द्र मानकर और चरण 1 जितनी त्रिज्या लेकर, किरण QP पर चाप लगाएं जो बिंदु S पर काटती है।



3. अब D और E के बीच की दूरी को परकार से मापें। S को केन्द्र मानकर, DE के बराबर त्रिज्या लेकर, चाप बनाएँ जो बिंदु T पर काटती है।



4. QT को मिलाएँ और इसे QR तक बढ़ाएँ।
5. $\angle PQR$, $\angle ABC$ के बराबर माप वाला वांछित कोण है।



6. कोण मापक की मदद से, दोनों कोणों के माप की जाँच कर।

10.8 कोण समद्विभाजक (Angle Bisector)

कोई भी रेखा, जो किसी कोण को दो बराबर भागों में बाँटती हैं, उसे उस कोण का कोण समद्विभाजक कहते हैं। इस भाग में आप कोण समद्विभाजक की रचना सीखेंगे।

10.8.1 कोण समद्विभाजक की रचना (Construction of an Angle Bisector)

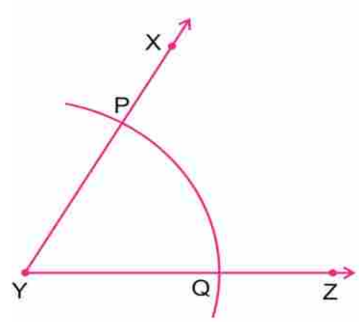
एक कोण को दो बराबर भागों में बाँटने का मतलब, कोण के भीतरी भाग में इसके शिखर से ऐसी रेखा खींचना है जो कोण को दो बराबर भागों में बाँटती है।

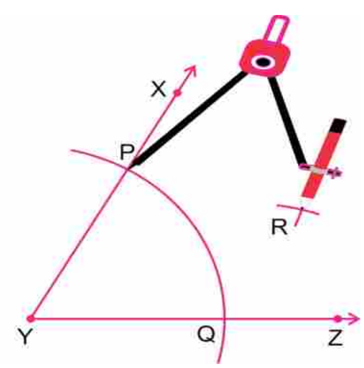
अब, $\angle XYZ$ के कोण समद्विभाजक की रचना करें।

रचना के चरण (Steps of construction)

1. किसी भी माप का $\angle XYZ$ बनाओ।

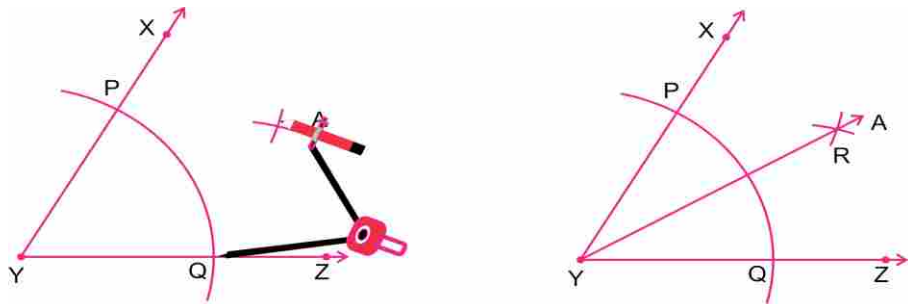
2. Y को केन्द्र मानकर, किसी भी त्रिज्या से एक चाप लगाएँ जो XY और YZ को बिंदु P तथा Q पर काटती हैं।





3. P से PQ के आधे से अधिक माप की त्रिज्या लेकर चाप बनाएँ।

4. Q से उसी त्रिज्या (चरण 3) की चाप बनाएँ, जो पिछली चाप को R पर काटती है।



5. YR को मिलाएँ तथा A तक बढ़ाएँ। इस प्रकार किरण YA, $\angle XYZ$ का कोण समद्विभाजक है।

10.9 कुछ खास कोणों की परकार द्वारा रचना (Construction of angles of special measures by compasses)

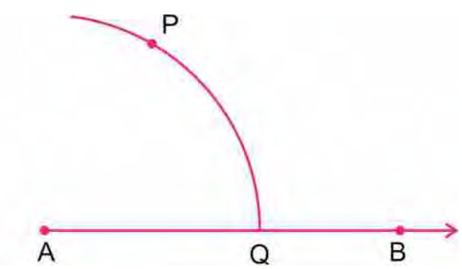
इस भाग में हम कुछ खास कोण जैसे 30°, 45°, 60°, 90°, 120° आदि की रचना रूलर और परकार की मदद से सीखेंगे।

* 60° कोण की रचना (Construction of 60° angles)

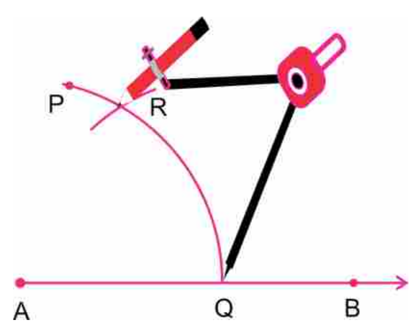
रूलर और परकार की मदद से 60° का कोण हम निम्नलिखित तरीके से बनाएँगे।

1. एक किरण AB बनाओ।

2. बिंदु A से किसी भी त्रिज्या की चाप PQ बनाएँ जो AB को Q पर काटती है।

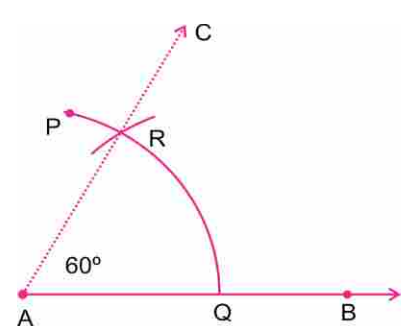


3. उसी त्रिज्या से बिंदु Q से चाप लगाएँ जो चाप PQ को बिंदु R पर काटती है।



4. AR को मिलाएँ तथा C तक बढ़ाएं।

5. इस प्रकार $\angle BAC = 60^\circ$

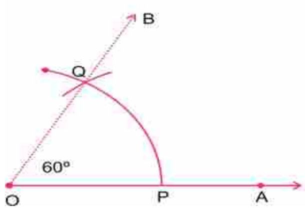


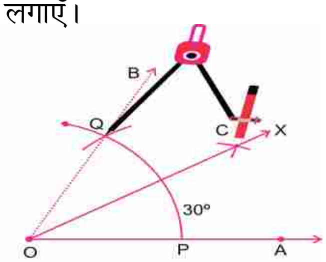
* 30° कोण की रचना Construction of 30° angles

हम जानते हैं कि 30°, 60° का आधा है। $30^\circ = \frac{1}{2} \times 60^\circ$ इसलिए 30° का कोण बनाने के लिए, 60° के कोण को समद्विभाजित करते हैं।

रचना के चरण (Steps of Construction) :

1. परकार द्वारा एक कोण $\angle AOB = 60^\circ$ बनाया। (चित्र में दिखाए अनुसार)
2. PQ के आधे से अधिक त्रिज्या लेकर, P से चाप लगाएँ।





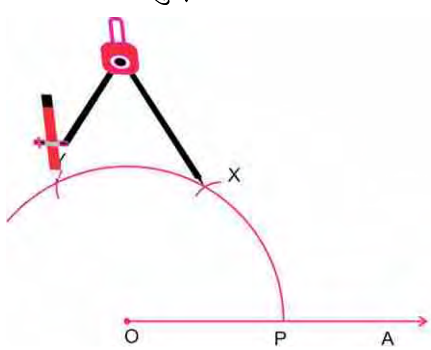
3. इसी प्रकार, उसी त्रिज्या से Q से चाप लगाएँ, जो पहले वाली चाप को बिंदु C पर काटती है।
4. OC को मिलाया और X तक बढ़ाया।
5. इस प्रकार $\angle AOC = 30^\circ$

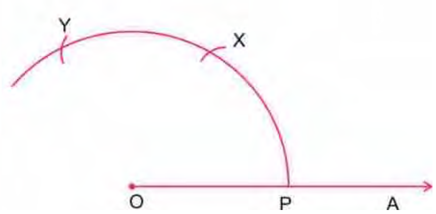
* 90° कोण की रचना (Construction of 90° angle) :

हम जानते हैं कि 60° और 120° के बिल्कुल मध्य में 90° आता है। इसलिए 90° के कोण की रचना के लिए, 60° और 120° के बीच के कोण को समद्विभाजित करेंगे।

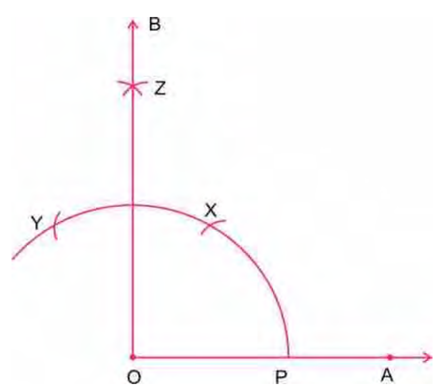
रचना के चरण (Steps of Construction) :

1. जैसे ऊपर चर्चा की गई है, चाप X और Y क्रमशः 60° और 120° की लगाएँ।
2. X को केन्द्र मानते हुए और चाप 'XY' के आधे से अधिक त्रिज्या लेकर एक चाप लगाएँ।





3. Y को केन्द्र मानते हुए और चरण 2 के अनुसार त्रिज्या लेकर चाप लगाएँ जो चरण 2 वाली चाप को Z पर काटती है।
4. OZ को मिलाएँ और B तक बढ़ाएँ।
5. इस प्रकार $\angle AOB = 90^\circ$

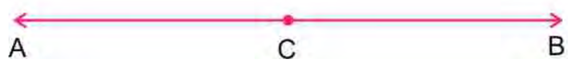


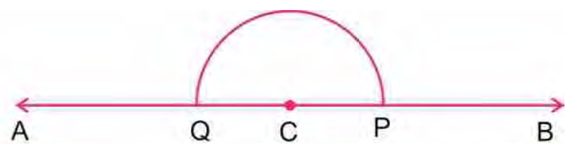
परिवर्तित विधि :-

परकार और रूलर की सहायता से 90° के कोण को बनाने की एक विधि और है। हम जानते हैं कि 90°, 180° का आधा है। इस लिए हम 0° और 180° के बीच के कोण को समद्विभाजित करेंगे।

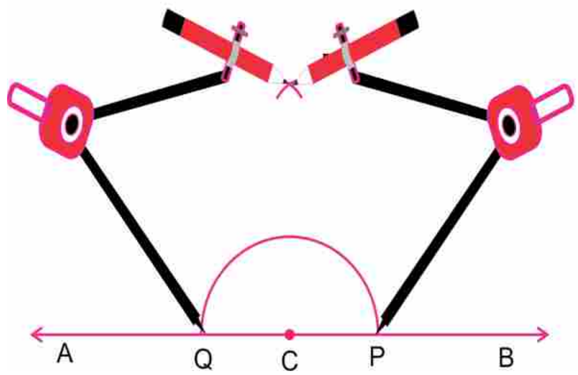
रचना के चरण (Steps of Construction) :

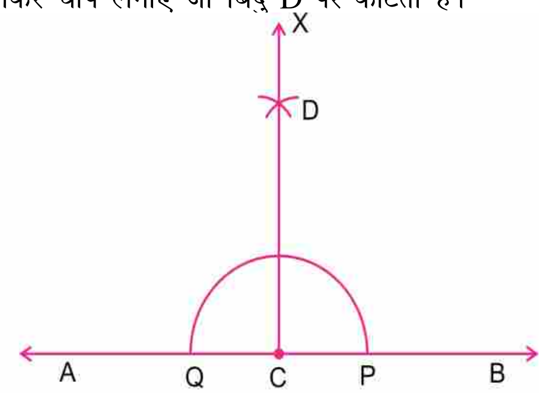
1. एक सीधी रेखा AB बनाएँ और उस पर बिंदु C लें।
2. C को केन्द्र मानते हुए, किसी भी त्रिज्या की एक चाप PQ लगाएँ जो AB को बिंदु P और Q पर काटती है।





3. यहाँ $\angle ACB = 180°$ (यह एक सरल रेखा है।)
4. P और Q को केन्द्र मानते हुए और कोई भी त्रिज्या लेकर चाप लगाएं जो बिंदु D पर काटतीं हैं।





5. CD को मिलाएँ और X तक बढ़ाएँ।
6. इस प्रकार, $\angle ACX = \angle BCX = 90°$

प्रश्नावली 10.5

1. नीचे दिए कोणों को कोण मापक की सहायता से दोनों दिशाओं में (बाएँ और दाएँ) बनाएँ।

   (i) 75° (ii) 110° (iii) 62° (iv) 165° (v) 170°

   (vi) 32° (vii) 128° (viii) 25° (ix) 80° (x) 135°

2. नीचे दिए कोणों को परकार द्वारा समद्विभाजित करें।

   (i) 48° (ii) 140° (iii) 75° (iv) 64° (v) 124°

3. 80° का कोण बनाएँ तथा परकार द्वारा इसे चार बराबर भागों में बाँटें।
4. समकोण बनाएँ और उसे समद्विभाजित करें।
5. रूलर और परकार से नीचे दिए गए कोण बनाएँ।

   (i) 30° (ii) 45° (iii) 135° (iv) 180° (v) 120° (vi) 75°

6. कोण मापक से 30° का कोण बनाएँ तथा इसे रूलर और परकार से समद्विभाजित करें।

10.10 किसी रेखा के बाह्य बिंदु से समानान्तर रेखा की रचना करना (Construction of a Parallel Line through the point lying outside a line)

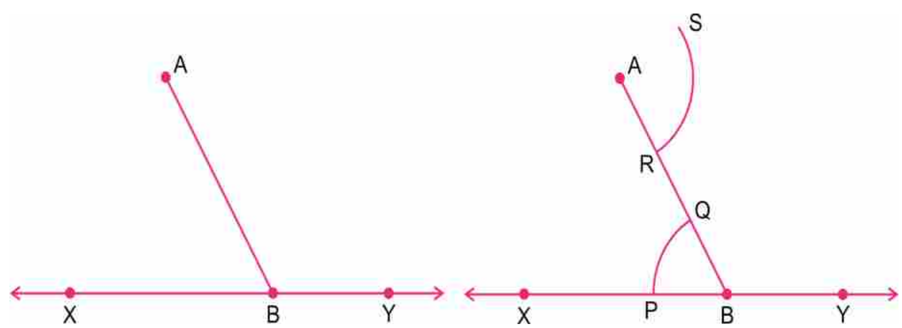
पिछले अध्याय में हम समानान्तर रेखाओं के बारे में पढ़ चुके हैं, कि समानान्तर रेखाएँ वो रेखाएँ होती है,जो कभी भी एक दूसरे को नहीं काटती। यहाँ हम एक रेखा के बाह्य बिंदु से समानान्तर रेखा की रचना के बारे में सीखेंगे।

(a) रूलर और परकार द्वारा (By a Ruler and Compasses)

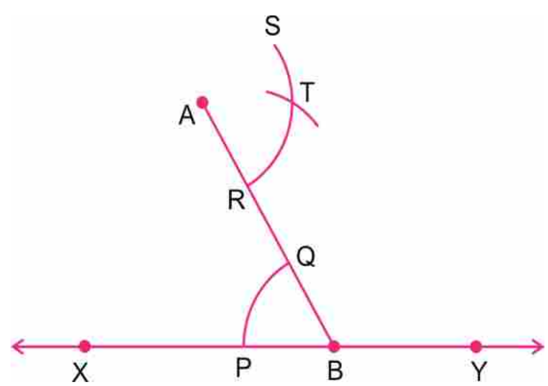
एक रेखा XY लो और एक बिंदु A लो, जो उस पर नहीं है।

रचना के चरण (Steps of Construction)

1. XY रेखा पर कोई बिंदु B लो।
2. AB को मिलाएँ।



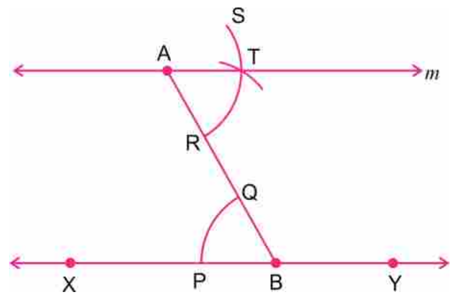
3. B को केन्द्र मानकर रेखा XY पर किसी भी त्रिज्या की चाप PQ लगाई। इसी प्रकार उसी त्रिज्या को लेकर बिंदु A से AB पर चाप RS लगाई।



4. परकार द्वारा चाप PQ को मापो।
5. बिंदु R से त्रिज्या PQ के बराबर चाप लगाएँ, जो RS को T पर काटती है।

6. AT को मिलाओ और दोनों ओर बढ़ाओ।

इस प्रकार रेखा m, XY के समानान्तर रेखा है।

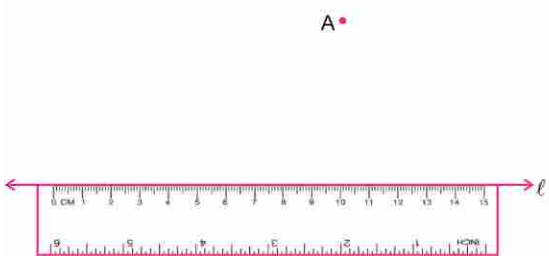


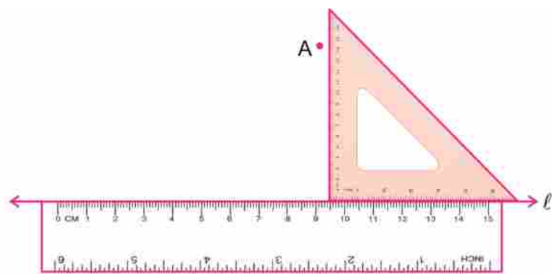
(b) सेट स्कवेयर द्वारा (By Set Squares)

हम सेट स्कवेयर की मदद से भी समानान्तर रेखाएँ बना सकते हैं। यह समानान्तर रेखा बनाने की सही विधि है।

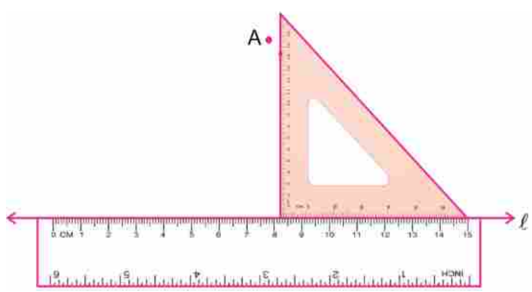
रचना के चरण (Steps of Constructions) :

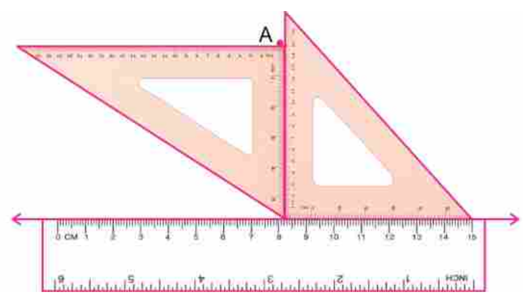
1. एक रेखा ℓ लो तथा बिंदु A लो जो रेखा पर नहीं है।
2. रेखा ℓ के साथ रूलर का एक किनारा लगाएँ।



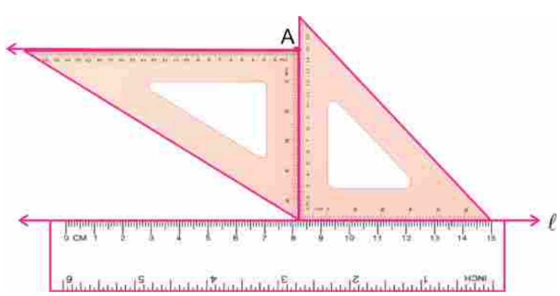


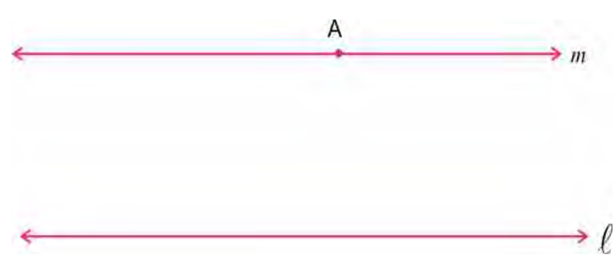
3. अब सेट स्कवेयर को इस प्रकार लगाएँ कि उसका समकोण वाला किनारा रूलर के साथ लग जाए।
4. अब सेट स्कवेयर को, रेखा ℓ पर स्लाइड करो ताकि उसका ऊर्ध्वाधर भाग बिंदु A तक पहुँच जाए।





5. सेट स्कवेयर को उसी स्थिति में रखकर, एक और सेट स्कवेयर लें और उसे बिंदु A पर इस प्रकार लगाएँ कि उसके समकोण का एक किनारा पिछले सेट स्कवेयर के साथ लग जाए। (चित्र अनुसार)
6. अब A से दूसरे सेट स्कवेयर की सहायता से रेखा m बनाएँ।





7. इस प्रकार $m \| \ell$.

प्रश्नावली 10.6

1. एक रेखा XY बनाओ और बिंदु P लो जो XY पर नहीं है। P से रूलर और परकार की मदद से XY के समानान्तर रेखा बनाएँ।
2. सेट स्कवेयर की मदद से बिंदु A से, रेखा m के समानान्तर रेखा ℓ बनाए, जो रेखा m पर स्थित नहीं है।
3. एक रेखा AB दी गई है और उस पर बिंदु X नहीं है। बिंदु X से AB के समानान्तर रेखा बनाएँ।

   (i) रूलर और परकार की मदद से (ii) सेट स्कवेयर की मदद से

सीखने के परिणाम

इस अध्याय के पूरा होने के बाद विद्यार्थीः

- ज्योमैट्री के औज़ारों को जानने लगेंगे।
- अलग-अलग प्रकार के कोणों की रचना कर सकते हैं।
- कोणों का उनके माप अनुसार वर्गीकरण कर सकते हैं।
- कोण द्विभाजक की रचना कर सकते हैं।
- रेखाखण्ड का लंब समद्विभाजक बना सकते हैं।

T2I3Y1

11

अनुपात और समानुपात

(RATIO AND PROPORTION)

उद्देश्य

इस अध्याय में आप सीखेंगे

(i) अनुपात का प्रयोग करते हुए राशियों की तुलना करना।

(ii) भिन्न-भिन्न परिस्थितियों में अनुपात का प्रयोग करना।

(iii) व्यावहारिक रूप में समानुपात का प्रयोग करने के योग्य होना।

(iv) दैनिक जीवन की समस्याओं में इकाई विधि का प्रयोग करना।

11.1 भूमिका (Introduction)

हम अपने दैनिक जीवम में कई ऐसी परिस्थितियों का सामना करते हैं जिसमें हमें दो राशियाँ जो कि नाप-तोल में एक जैसी हों, उनकी तुलना करनी पड़ती है।

उदाहरण के लिए, एक परीक्षा में पारस ने 84 अंक और चरन ने 70 अंक प्राप्त किए। आम तौर पर उनके काम की निपुणता की तुलना दो तरीकों से की जाती है।

(i) अंतर द्वारा तुलना (Comparison by difference)

अंकों का अंतर = $84 - 70 = 14$

भाव, पारस ने चरन से 14 अंक अधिक प्राप्त किए।

इस तरह की तुलना को अंतर द्वारा तुलना कहते हैं।

(ii) भाग द्वारा तुलना (Comparison by Division)

$$\frac{\text{पारस के अंक}}{\text{चरन के अंक}} = \frac{84}{70} = \frac{6}{5}$$

भाव, पारस के अंक, चरन के अंकों का $\frac{6}{5}$ गुणा है।

या $$\frac{\text{पारस के अंक}}{\text{चरन के अंक}} = \frac{70}{84} = \frac{5}{6}$$

भाव, चरन के अंक पारस के अंकों का $\frac{5}{6}$ गुणा है।

इस तरह की तुलना को भाग द्वारा तुलना कहते हैं।

इस तरह, यदि हम यह देखना चाहते हैं कि एक राशि दूसरी राशि से कितनी कम या ज़्यादा है तो हम उनकी अंतर द्वारा तुलना करते हैं। दूसरी तरफ, यदि हम यह जानना चाहते हैं कि एक राशि दूसरी राशि की कितनी गुना कम या ज़्यादा है तो हम भाग द्वारा तुलना करते हैं।

जब हम एक जैसी दो राशियों की तुलना भाग द्वारा करते हैं तो हम दोनों राशियों का अनुपात लिखते हैं।

भाव है कि **भाग द्वारा तुलना करने को अनुपात भी कहा जाता है।**

11.2 अनुपात (Ratio)

अनुपात एक ऐसा संबंध है, जो कि पहली राशि दूसरी राशि की कितनी गुना है, दर्शाने के लिए प्रयोग की जाती है। इसलिए दो अंकों a और b (b≠0) का अनुपात $\frac{a}{b}$ है या $a \div b$ है और इसे a:b (a अनुपात b) पढ़ा जाता है जहाँ a और b अनुपात की राशियाँ हैं।

पहली राशि 'a' को **पूर्व पद (antecedent)** और दूसरी राशि 'b' को **उत्तर पद (consequent)** कहा जाता है।

11.2.1 अनुपात की विशेषताएँ (Properties of Ratio)

- जिन दो राशियों की तुलना की जाती है वे एक जैसी और एक ही इकाई (लंबाई, आयतन और मात्रा) में होनी चाहिए।
  भाव है कि हम 18 लड़के और 12 घोड़ों की तुलना नहीं करते। हम लड़कियों की संख्या और घोड़ों की संख्या की तुलना करते हैं।
- जिस क्रम में राशियाँ ली गई हैं, वह महत्त्वपूर्ण है। भाव 3:4, 4:3 से बिल्कुल अलग है।
- दो राशियों का अनुपात केवल एक संख्या है, इसकी कोई इकाई नहीं होती।
- **बराबर अनुपात (Equivalent Ratios) :** अनुपात की राशियों को एक जैसी संख्या जो कि शून्य (0) न हो, के साथ गुणा या भाग किया जा सकता है, तब उसके (मूल्य) में कोई अंतर नहीं आएगा।

  भाव 2 : 3

  $2 \times 2 : 3 \times 2 = 4:6$ (दोनों राशियों को 2 से गुणा करो)

  या $2 \times 4 : 3 \times 4 = 8:12$ (दोनों राशियों को 4 से गुणा करें)

  और 18:24

  या $18 \div 2 : 24 \div 2 = 9:12$ (दोनों राशियों को 2 से भाग करें)
- **अनुपात सरलतम रूप में (Ratio in the simplest form) :** एक अनुपात a:b सरलतम रूप में है। यदि इसके पूर्व पद (a) और उत्तर पद (b) में 1 के अतिरिक्त दूसरा सांझा गुणनखण्ड न हो। सरलतम अनुपात को न्यूनतम अनुपात भी कहा जाता है। इसलिए दोनों संख्याओं को उनके म.स.व. से भाग करें।

  उदाहरण के लिए 32 : 24

  या 32 और 24 का म.स.व. = 8

  या $32 \div 8 : 24 \div 8$

  या 4 : 3

नोट : भिन्न और अनुपात में अंतर

- भिन्न एक पूर्ण हिस्से के भाग को या एक ग्रुप के भाग को दर्शाती है जिसमें हर पूर्ण हिस्से के कुल हिस्सों को दर्शाता है, जिसमें पूर्ण हिस्से को बाँटा गया है।
- अनुपात दो राशियों की तुलना है

  उदाहरण के लिए, 8 विद्यार्थियों के समूह में 5 लड़के और 3 लड़कियाँ हैं। लड़कों की संख्या की भिन्न $\frac{5}{8}$ और लड़कियों की संख्या की भिन्न $\frac{3}{8}$ है।

  इसमें हर हमेशा 8 रहेगा, क्योंकि पूरे ग्रुप में कुल 8 विद्यार्थी हैं। जबकि लड़कों की संख्या और लड़कियों की संख्या का अनुपात 5:3 है। लड़कों की संख्या और कुल विद्यार्थियों की संख्या का अनुपात 5:8 तथा लड़कियों की संख्या और कुल विद्यार्थियों की संख्या का अनुपात 3:8 है।

  अनुपात उन राशियों की संख्याओं पर निर्भर करता है जिसकी तुलना की जा सकती है। अनुपात पूरे ग्रुप पर निर्भर नहीं करता।

आओ! कुछ उदाहरण देखें:-

उदाहरण 1: **निम्नलिखित अनुपातों को सरलतम रूप में लिखें:-**

(i) 18:24 (ii) 15:45 (iii) 36:28

हल : (i) 18:24

अनुपात को सरलतम रूप में लिखने के लिए हमे दोनों संख्याओं को उनके म.स.व. से भाग देने पड़ेगा।

इसलिए 18 और 24 का म.स.व. = 6.

$\therefore$ 18 : 24

$= (18 \div 6) : (24 \div 6) = 3:4$

इसलिए का 18:24 सरलतम रुप 3:4 है।

अन्य विधि : (अभाज्य गुणनखंड)

18:24 के अभाज्य गुणनखंड

$= 2\times3\times3 : 2\times2\times2\times3$

दोनों संख्याओं को सांझे गुणनखंड 2×3 से भाग करने पर

हमारे पास है $= 3:2\times2$ या 3:4

अन्य विधि : 18 : 24

इसमें हम दोनों राशियों को एक-एक करके सांझे गुणनखंड से भाग करते हैं।

- दोनों संख्याएँ 2 से भाग होती हैं, इसलिए दोनों को 2 से भाग करने पर मिलता है 9:12
- अब दोनों संख्याएँ 3 से भाग होती हैं, इसलिए दोनों को 3 से भाग करने पर मिलता है 3 : 4, जो कि इसका सरलतम रूप है।

(ii) 15:45

इस अनुपात को सरलतम रूप में बदलने के लिए, हम दोनों संख्याओं को उनके म.स.व.से भाग करेंगें।

इसलिए 15 और 45 का म.स.व. 15.

$\therefore$ 15 : 45

$\therefore \quad \frac{15}{45} = \frac{15 \div 15}{45 \div 15} = \frac{1}{3}$ या (15 ÷ 15) : (45 ÷ 15) = 1:3

इसलिए 15:45 का सरलतम रुप 1:3 है।

अन्य विधि : (अभाज्य गुणनखंड)

15 : 45

पहले दोनों संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड बनाएं:-

= $3 \times 5 : 3 \times 3 \times 5$

दोनों संख्याओं को उनके सांझे गुणनखंड $3 \times 5 = 15$ से भाग करने पर हमारे पास है।

= 1 : 3

अन्य विधि : 15 : 45 पहले दोनों संख्याओं को 3 से भाग करें

= 5 : 15 अब दोनों संख्याओं को 5 से भाग करें

= 1 : 3 (जो कि सरलतम रूप है)

(iii) 36 : 28

दोनों संख्याओं को उनके म.स.व. 4 से भाग करें।

$\therefore$ 36 : 28

= (36 ÷ 4) : (28 ÷ 4) = 9 : 7

इसलिए सरलतम रूप 9 : 7 हैं।

अन्य विधि : 36: 28

= $2 \times 2 \times 3 \times 3 : 2 \times 2 \times 7$ (दोनों को सांझे गुणनखण्ड $2 \times 2 = 4$ के साथ भाग करने पर)

= 9 : 7

अन्य विधि : 36 : 28

दोनों तरफ 2 से भाग करने पर, हमें प्राप्त होता है

= 18 : 14

फिर से दोनों तरफ 2 से भाग करने पर, हमें प्राप्त होता है

= 9 : 7

उदाहरण 2: निम्नलिखित अनुपातों को सरलतम रूप में लिखें:-

(i) 15 मिनट का 40 मिनट से (ii) 3 कि.ग्रा. का 800 ग्राम से

(iii) 150 सेंमी. का 6 मीटर से (iv) 2 दर्जन का 16 वस्तुओं से

(v) 1 मिनट का 30 सेकंड से

हल : (i) 15 मिनट का 40 मिनट से

= 15 : 40 (दोनों संख्याओं को उनके म.स.व = 5 से भाग करने पर)

= 3 : 8

(ii) 3 किलोग्राम का 800 ग्राम से (∵ 1किलोग्राम = 1000ग्राम)

3000 ग्राम का 800 ग्राम से

= 3000 : 800 (दोनों संख्याओं को उनके म.स.व. =200 से भाग करने पर)

= 15 : 4

(iii) 150 सेंटीमीटर का 6 मीटर से (∴ 1मीटर = 100 सेंटीमीटर)

= 150 : 600 (दोनों संख्याओं को उनके म.स.व. 150 से भाग करने पर)

= 1 : 4

(iv) 2 दर्जन का 16 वस्तुओं से (∴1 दर्जन = 12 वस्तुएँ)

24 का 16 वस्तुओं से

= 24 : 16 (दोनों संख्याओं को उनके म.स.व =8 से भाग करने पर)

= 3 : 2

(v) 1 मिनट का 30 सेकंड से

= 60 सेकंड का 30 सेकंड से (∴ 1 मिनट = 60 सेकंड)

= 60 : 30 (दोनों संख्याओं को उनके म.स.व. =30 से भाग करने पर)

= 2 :1

उदाहरण 3: **एक कक्षा में 35 लड़के और 25 लड़कियाँ हैं।**

(i) लड़कों की संख्या का लड़कियाँ की संख्या से

(ii) लड़कियों की संख्या का कक्षा के कुल विद्यार्थियों से

(iii) कुल विद्यार्थियों का लड़कों की संख्या से

हल : हमारे पास है लड़कों की संख्या = 35

लड़कियों की संख्या = 25

∴ कक्षा में कुल विद्यार्थियों की संख्या= (35 + 25)

= 60

(i) लड़कों की संख्या का लड़कियों की संख्या से अनुपात

= 35 : 25

= 7 : 5 (दोनों को म.स.व. = 5 से भाग)

(ii) लड़कियों की संख्या का कक्षा विद्यार्थियों से अनुपात

= 25 : 60

= 5 :12 (दोनों को म.स.व = 5 से भाग)

(iii) कुल विद्यार्थियों का लड़कों की संख्या से अनुपात

= 60 : 35

= 12 : 7 (दोनों को म.स.व. 5 से भाग)

उदाहरण 4: **एक साल में, नेहा ₹ 80,000 कमाती है और ₹ 30,000 बचत करती है। राशियों का अनुपात पता करें:-**

(i) उसकी बचत का कमाई से अनुपात।

(ii) उसकी कमाई का उसके द्वारा खर्च की गई राशि से

(iii) उसकी बचत का उसके द्वारा खर्चा की गई राशि से

हल : नेहा की कमाई = ₹80,000

नेहा की बचत = ₹30,000

नेहा का खर्च = ₹80,000 – ₹30000 = ₹50,000

(i) नेहा की बचत का उसकी कमाई से अनुपात

= 30,000 : 80,000

(दोनों संख्याओं को उनके म.स.व = 10,000 से भाग करने पर)

= 3 : 8

(ii) नेहा की कमाई का उसके द्वारा खर्च की गई राशि से अनुपात

= 80,000 : 50,000

(दोनों संख्याओं को उनके म.स.व 10,000 से भाग करने पर)

= 8 : 5

(iii) नेहा की बचत का उसके द्वारा खर्च की गई राशि से अनुपात

= 30,000 : 50,000

(दोनों संख्याओं को उनके म.स.व. 10,000 से भाग करने पर)

= 3 : 5

उदाहरण 5: **एक कक्षा टेस्ट में 56 में से 42 बच्चे पास हुए। अनुपात पता करें:-**

(i) पास विद्यार्थियों की संख्या का फेल विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात।

(ii) फेल विद्यार्थियों की संख्या का कुल विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात।

हल : कक्षा में कुल विद्यार्थी = 56

पास विद्यार्थियों की संख्या = 42

फेल विद्यार्थी = 57 – 42 = 14

(i) पास विद्यार्थियों की संख्या का फेल विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात

= 42 : 14 (दोनों संख्याओं को उनके म.स.व. 14 से भाग करने पर)

= 3 : 1

(ii) फेल विद्यार्थियों की संख्या का कक्षा में कुल विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात

= 14 : 56 (दोनों संख्याओं को उनके म.स.व. 14 से भाग करने पर)

= 1 :4

उदाहरण 6: **माँ की वर्तमान आयु 48 वर्ष और उसके पुत्र की 20 वर्ष है। अनुपात पता करें:-**

(i) पुत्र की वर्तमान आयु का माँ की वर्तमान आयु से

(ii) दस साल पहले, माँ की आयु का पुत्र की आयु से

(iii) 8 वर्ष बाद, पुत्र की आयु का माँ की आयु से

हल : (i) पुत्र की वर्तमान आयु का माँ की वर्तमान आयु से अनुपात

= 20 : 48 (दोनों संख्याओं को उनके म.स.व. 2 से भाग करने पर)

= 5 : 12

(ii) दस वर्ष पहले, माँ की आयु = 20 – 10 = 10 वर्ष

दस वर्ष पहले, पुत्र की आयु = 48 – 10 = 38 वर्ष

दस वर्ष पहले माँ की आयु का पुत्र की आयु से अनुपात

= 38 : 10

(दोनों संख्याओं को उनके म.स.व. 28 से भाग करने पर)

= 19 : 5

(iii) 8 वर्ष बाद, माँ की आयु = 48 + 8 = 56 वर्ष

8 वर्ष बाद, पुत्र की आयु = 20 + 8 = 28 वर्ष

8 वर्ष बाद, पुत्र की आयु माँ की आयु से अनुपात

= 28 : 56

(दोनों संख्याओं को उनके म.स.व. 28 से भाग करने पर)

= 1 : 2

उदाहरण 7: **तुल्य अनुपात पता करें:-**

(i) 5:7 **(ii) 10:3**

हल : (i) 5 : 7 का तुल्य अनुपात पता करने के लिए हमें दोनों संख्याओं को किसी भी प्राकृतिक संख्या (1 के अतिरिक्त) से गुणा करना होगा। (मान लो 2)

$\therefore$ $5:7 = (5\times2):(7\times2) = 10:14$

(ii) 10 : 3 का तुल्य अनुपात पता करने के लिए हमें दोनों संख्याओं को किसी भी प्राकृतिक संख्या (1 के अतिरिक्त) से गुणा करना होगा।

$\therefore$ 10 : 3

$= (10\times3) : (3\times3) = 30 : 9$

उदाहरण 8: **असलम और हरप्रीत के बीच 100 को 2:3 में बाँटें।**

हल : जैसे कि, असलम और हरप्रीत का हिस्सा 2:3 सरलतम रूप में हैं। उनका वास्तविक भाग पता करने के लिए, हमें चल राशि (मान लो x) से गुणा करना होगा।

मान लो असलम का हिस्सा = 2x और

हरप्रीत का हिस्सा = 3x

प्रश्नानुसार (असलम का हिस्सा) + (हरप्रीत का हिस्सा) = 100

$\Rightarrow$ $2x + 3x = 100$

$\Rightarrow$ $5x = 100$

$$x = \frac{100}{5} = 20$$

$\therefore$ असलम का हिस्सा = 2x = 2×20 = ₹40

तथा हरप्रीत का हिस्सा = 3x = 3×20 = ₹60

अन्य विधि : 100 को कुल हिस्सों में बाँटा गया 2 + 3 = 5 हिस्से

$\therefore$ असलम का हिस्सा = $\frac{2}{5}$ का ₹100 = $\frac{2}{5} \times 100$ = ₹40

हरप्रीत का हिस्सा = $\frac{3}{5}$ का ₹100 = $\frac{3}{5} \times 100$ = ₹60

उदाहरण 9: **कक्षा में लड़कों और लड़कियों की संख्या का अनुपात 5:7 है। यदि कक्षा में कुल 72 विद्यार्थी है तों कक्षा में लड़कों और लड़कियों की संख्या पता करें?**

हल : मान लो लड़कों की संख्या = 5x

और लड़कियों की संख्या = 7x

विद्यार्थियों की कुल संख्या = 72

अर्थात (लड़कों की संख्या) + (लड़कियों की संख्या) = 72

$\Rightarrow$ 5x + 7x = 72

$\Rightarrow$ 12x = 72

$\Rightarrow x = \frac{72}{12} = 6$

$\therefore$ लड़कों की संख्या = 5x = 5 × 6 = 30

लड़कियों की संख्या = 7x = 7×6 = 42

अन्य विधि :

लड़कों की संख्या का लड़कियों की संख्या से अनुपात = 5:7

अनुपात की संख्याओं का जोड़ = 5 + 7 = 12

$\therefore$ लड़कों की संख्या $= \frac{5}{12} \times 72 = 30$

लड़कियों की संख्या $= \frac{7}{12} \times 72 = 42$

प्रश्नावली 11.1

1. निम्नलिखित अनुपातों को सरलतम रूप में बदलें:–

(i) 12:32 (ii) 45:25 (iii) 91:104 (iv) 60:72

(v) 375:125

2. निम्नलिखित अनुपातों को सरलतम अनुपात में बदलें:–

(i) ₹20 का ₹55 से (ii) 18मी. to 63मी. (iii) 40 पैसे का ₹2 से

(iv) 1 घंटे का 36 मिनट से (v) 5किलोग्राम का 1200 ग्राम से

3. निम्नलिखित अनुपातों को सरल करें:–

(i) 2 साल : 14 महीने (ii) 28 मिनट : 2 घंटे

(iii) 125 मि.ली. : 2 लीटर (iv) 4 मी. 20 सैं.मी. : 80 सेमी

(v) 3 दर्जन : 12 वस्तुएँ

4. निम्नलिखित प्रत्येक अनुपात के लिए दो तुल्य अनुपात पता करें:–

(i) 4:1 (ii) 3:5 (iii) 5:12

5. एक कक्षा में लड़के और लड़कियों की संख्या क्रमानुसार 60 और 52 है। लड़को की संख्या का लड़कियों की संख्या से अनुपात पता करें?

6. पंकज के पास 23 पेन और 42 पेंसिलें हैं। पेनों का पेंसिलों से अनुपात पता करें?

7. एक वर्ष में हरजोत ₹2,80,000 कमाता है और ₹60,000 बचत करता है, अनुपात पता करें?

(i) उनकी बचत का खर्च से

(ii) उसकी कमाई का बचत से

(iii) उसके खर्च का कमाई से

8. एक स्कूल में, 175 लड़के, 205 लड़कियाँ और 20 अध्यापक हैं। अनुपात पता करें:-

(i) लड़कों की संख्या का अध्यापकों की संख्या से।

(ii) लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से।

(iii) अध्यापकों की संख्या का स्कूल में कुल व्यक्तियों से।

9. 144 विद्यार्थियों में से, एक स्कूल में, 48 विद्यार्थी क्रिकेट खेलते हैं, 28 विद्यार्थी कबड्डी खेलते हैं, 40 वॉली-बॉल खेलते हैं और बाकी बचे विद्यार्थी खो-खो खेलते हैं। अनुपात पता करें:-

(i) कबड्डी खेलने वाले विद्यार्थियों का खो-खो खेलने वाले विद्यार्थियों से।

(ii) क्रिकेट खेलने वाले विद्यार्थियों का वॉली-बॉल खेलने वाले विद्यार्थियों से।

(iii) खो-खो खेलने वाले विद्यार्थियों का स्कूल के कुल विद्यार्थियों की संख्या से।

10. कुश और शैली की वर्तमान आयु क्रमानुसार 22 वर्ष और 16 वर्ष हैं। अनुपात पता करें:-

(i) उनकी वर्तमान आयु का

(ii) 4 वर्ष बाद कुश की आयु का शैली की आयु से

(iii) 5 वर्ष पहले शैली की आयु का कुश की आयु से

(iv) कुश की वर्तमान आयु का 6 वर्ष बाद शैली की आयु से

11. एक पेंसिल बॉक्स में 150 पेंसिलें हैं। जिनसे से 40 लाल, 60 काली और बाकी नीली पेंसिलें हैं। अनुपात पता करें:-

(i) लाल पेंसिलों का काली पेंसिलों से।

(ii) नीली पेंसिलों का कुल पेंसिलों से।

(iii) कुल पेंसिलों का लाल पेंसिलों से।

12. ₹175 को प्रीत और सुखी में 4:3 अनुपात में बाँटें।

13. दो संख्याएँ 3:7 अनुपात में हैं और उनका जोड़ 140 है। संख्याएँ पता करें।

14. एक त्रिभुज के कोण 1:2:3 अनुपात में हैं। प्रत्येक कोण का माप पता करें।

15. 4 मीटर 16 सेमी. लंबी एक पाइप को दो टुकड़ों में 3:5 अनुपात में बाँटा गया। पाइप के प्रत्येक टुकड़े की लंबाई पता करें।

11.3 समानुपात (Proportion)

जब दो अनुपान समान हों तो अनुपातों की ये समानता समानुपात कहलाती है और उनके पदों को समान अनुपात में कहा जाता है।

''दो अनुपातों की समानता समानुपात कहलाती है''

मान लीजिए दो अनुपात 4 : 10 और 8 : 20

हम देखते हैं कि 4 : 10 = 2 : 5 और 8 : 20 = 2 : 5

इसलिए 4 : 10= 8 : 20 समानुपात कहलाती है।

इसलिए इस समानुपात को इस तरह से लिखा जा सकता है 4:10::8:20

इसे 4 अनुपात 10 = 8 अनुपात 20 भी पढ़ा जाता है।

• (: : चिह्न या '=' बराबर अनुपात या समानुपात को दर्शाता है।)

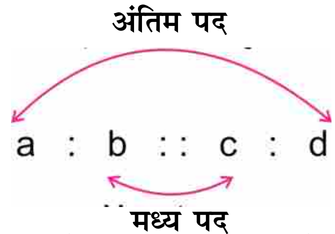
आम तौर पर चार संख्याएँ a, b, c, d समान अनुपात में हैं यदि a : b = c : d.

इसे इस तरह से दर्शाया जाता है a:b::c:d अर्थात $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ या ad = bc

इसके विपरीत यदि ad = bc तो $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ या a: b::c:d.

यहाँ a, b, c, d पहला, दूसरी, तीसरी,चौथी संख्या कहलाती है।

पहली और चौथी संख्या (अंतिम पद), दूसरी और तीसरी संख्या (मध्य पद) कहलाती हैं।



हम देखते हैं कि अंतिम पदों की गुणा = मध्य पदों की गुणा

- यदि अंतिम पदों की गुणा ≠ मध्य पदों की गणा तो यह समानपात में नहीं हैं।

11.3.1 निरंतर (लगातार) समानुपात (Continued proportion)

यदि किसी समानुपात में दूसरा और तीसरा पद समान हों तो इस समानुपात को निरंतर कहा जाता है।

अर्थात यदि a : b : : b : c तो हम देखते हैं कि a, b, c निरंतर समानुपात में हैं।

उदाहरण : **यदि 3:6: : 6 : 12 तो 3, 6, 12 निरंतर समानुपात में हैं।**

आमतौर पर यदि a,b,c निरंतर समानुपात में हैं तो

- 'a' पहला समानुपात कहलाता है।
- 'b' मध्य समानुपात कहलाता है।
- 'c' तीसरा समानुपात कहलाता है।

आओ समानुपात को समझने के लिए कुछ और उदाहरण देखें:–

उदाहरण 11: **निम्नलिखित अनुपात समानुपात में हैं या नहीं?**

(i) 2:7 और 6:21 (ii) 12:10 और 48:40 (iii) 12:16 और 24:28

७ (i)

अंतिम पदों की गुणा = 2×21 = 42

मध्य पदों की गुणा = 7 × 6 = 42

∴ अंतिम पदों की गुणा = मध्य पदों की गुणा

इसलिए 2:7 और 6:21 समानुपात में हैं।

अन्य विधि :

पहला अनुपात = 2:7

दूसरा अनुपात = 6:21

= 2 : 7 (दोनों पदों को 3 से भाग करने पर)

∴ दोनों पद बराबर हैं।

2:7 और 6:21 समानुपात में हैं।

(ii)

अंतिम पदों की गुणा = $12 \times 40 = 480$

मध्य पदों की गुणा = $10 \times 48 = 480$

∴ अंतिम पदों की गुणा = मध्य पदों की गुणा

इसलिए 12 : 10 और 48 : 40 समानुपात में है।

अन्य विधि :

पहला अनुपात = 12 : 10

= 6 : 5 (दोनों पदों को 2 से भाग करने पर)

दूसरा अनुपात = 48 : 40

= 6 :5 (दोनों पदों को 8 से भाग करने पर)

∴ दोनों अनुपात बराबर हैं।

इसलिए 12:10 और 48:40 समानुपात में हैं

(iii)

अंतिम पदों की गुणा = $12 \times 28 = 336$

मध्य पदों की गुणा = $16 \times 24 = 384$

∴ अंतिम पदों की गुणा ≠ मध्य पदों की गुणा

इसलिए 12:16 तथा 24:28 समानुपात में है।

अन्य विधि :

पहला अनुपात = 12:16

= 3 : 4 (दोनों पदों को 4 से भाग करने पर)

दूसरा अनुपात = 24 : 28

= 6 : 7 (दोनों पदों को 4 से भाग करने पर)

∴ दोनों अनुपात समान नहीं हैं।

इस तरह 12: 16 तथा 24: 28 समानुपात में नहीं हैं।

उदाहरण 12: क्या निम्नलिखित अनुपात समानुपात बनाते हैं?

(i) 15 कि.ग्रा. : 25 कि.ग्रा. तथा 45 कि.ग्रा. : 75 कि.ग्रा.

(ii) 40 मिनट: 2 घंटे तथा 20 मिनट : 1 घंटा

(iii) 600 मिली. : 1 लीटर तथा 1 लीटर 200 मिली. = 2 लीटर

हल : (i) यहाँ दोनों अनुपातों में इकाइयाँ समान हैं।

अंतिम पदों का गुणा $= 15 \times 75 = 1125$

मध्यम पदों का गुणा $= 25 \times 45 = 1125$

$\therefore$ अंतिम पदों का गुणा = मध्यम पदों का गुणा

इस प्रकार, 15कि.ग्रा: 25कि.ग्रा तथआ 45कि.ग्रा : 75कि.ग्रा समानुपात में हैं।

(ii) यहाँ इकाइयाँ भिन्न-भिन्न हैं, इसलिए सर्वप्रथम इकाइयों को समान करते हैं।

सबसे पहले सभी इकाइयों को मिनटों में बदलने पर, हमारे पास है,

भाव 40 मिनट : 120 मिनट तथा 20 मिनट : 60 मिनट

अंतिम पदों की गुणा $= 40 \times 60 = 2400$

मध्य पदों की गुणा $= 120 \times 20 = 2400$

$\therefore$ अंतिम पदों की गुणा = मध्य पदों की गुणा

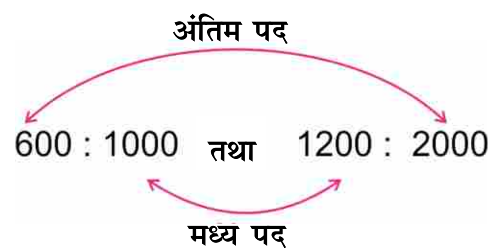
इसलिए 40 मिनट : 2 घंटे 20 मिनट : 1 घंटा समानुपात में है।

(iii) यहाँ ईकाइयाँ अलग-अलग हैं, इसलिए पहले हमें लीटर को मि.ली. में बदलकर इकाइयों को बराबर करना होगा।

$\therefore$ 600मि.ली. : 1लीटर और 1लीटर 200मि.ली. : 2लीटर

= 600मि.ली. : 1000मि.ली. और 1200मि.ली. : 2000मि.ली. ($\therefore$ 1लीटर = 1000 मिलीलीटर)

अब



अंतिम पदों की गुणा $= 600 \times 2000$

$= 1200000$

मध्य पदों की गुणा $= 1000 \times 1200 = 1200000$

∴ अंतिम पदों की गुणा = मध्य पदों की गुणा

इसलिए 600मिलीलीटर : 1 लीटर और 1लीटर 200मिलीलीटर : 2 लीटर समानुपात में हैं।

उदाहरण 13: **प्रत्येक में 'a' का मूल्य पता करें:-**

(i) 9: a : : 45 : 40 (ii) 21 : 28 : : a : 32

हल : (i) 9: a : : 45 : 40

(जैसा कि दिया है) दोनों पद समानुपात में हैं।

∴ अंतिम पदों की गुणा = मध्य पदों की गुणा

$\Rightarrow$ $9 \times 40 = a \times 45$

$\Rightarrow$ $\frac{9 \times 40}{45} = a$ $\Rightarrow a = 8$

(ii) दिया है 21:28 : : a : 32

(जैसा कि दिया है) दोनों पद समानुपात में हैं

∴ अंतिम पदों की गुणा = मध्य पदों की गुणा

$\Rightarrow$ $21 \times 32 = 28 \times a$

$\Rightarrow$ $\frac{21 \times 32}{28} = a$ $\Rightarrow$ $a = 24$

उदाहरण 14: **दिखाइए कि 4,9,16 निरंतर समानुपात में हैं?**

हल : निरंतर समानुपात के लिए 4, 8, 16 को 4, 8, 8, 16 लिखा जा सकता है।

∴ अंतिम पदों की गुणा = $4 \times 16 = 64$

मध्य पदों की गुणा = $8 \times 8 = 64$

∴ अंतिम पदों की गुणा = मध्य पदों की गुणा

इसलिए 4, 8, 16 निरंतर समानुपात में हैं।

प्रश्नावली 11.2

1. दिए गए पदों में से कौन से पद समानुपात में हैं?

(i) 20, 40, 25, 50 (ii) 35, 49, 55, 78 (iii) 24, 30, 36, 45

(iv) 10, 22, 45, 99 (v) 32, 48, 70, 210

2. निम्नलिखित अनुपात समानुपात बनाते हैं या नहीं?

(i) 5 : 9 और 20:36 (ii) 24:36 और 32:48 (iii) 32:40 और 36:42

(iv) 27 : 18 और 3:2 (v) 35:28 और 77:44

3. निम्नलिखित समानुपात सही हैं या गलत?

(i) 4 : 3 : : 36 : 37 (ii) 16:4 : : 20 : 5 (iii) 19 : 43 : : 8 : 21

4. पता करें निम्नलिखित अनुपात समानुपात में है या नहीं?

(i) 40 सेमी. : 1मीटर और ₹12 : ₹30.

(ii) 25 मिनट : 1 घंटा और 40 कि.मी. : 96 कि.मी.

(iii) ₹4 : 35 पैसे और 8 कि.ग्रा. : 9 कि.ग्रा.

5. प्रत्येक में 'x' का मूल्य पता करें:–

(i) 25 : x : : 15 : 6 (ii) 28 : 49 : : x : 56 (iii) 8 : 20 : : 10 : x

6. जाँच करो कि दिए गए पद निरंतर समानुपात में हैं?

(i) 1, 4, 16 (ii) 3, 9, 27 (iii) 5, 10, 20

11.4 ऐकिक विधि (Unitary Method)

हम अपने दैनिक जीवन में ऐसी बहुत सी स्थितियों का सामना करते हैं जैसे, 12 पेंसिलों का मूल्य ₹60 है तो ऐसी 5 पेंसिलों का मूल्य बताएँ या 1 दर्जन केलों का मूल्य ₹72 है तो ऐसे 4 केलों का मूल्य बताएँ? आदि। इसका मूल्य हम कैसे पता करते हैं?

वह विधि जिसमें दी गई जानकारी के आधार पर वस्तु की एक इकाई का मान निकालना और फिर उसी वस्तु की, जितनी इकाइयों का मान चाहिए, उनका मान निकलना, ऐकिक विधि कहलाती है।

उपरोक्त अनुसार:

$$\text{एक वस्तु की कीमत} = \frac{\text{दी गई वस्तुओं की कीमत}}{\text{वस्तुओं की संख्या}}$$

अर्थात यदि दी गई वस्तुओं की कीमत मालूम है तो वस्तु की कीमत, दी गई वस्तुओं की कीमत को कुल वस्तुओं से विभाजित करके पता किया जा सकता है।

फिर अपेक्षित वस्तुओं की कीमत = (एक वस्तु की कीमत) × (अपेक्षित वस्तुओं की गिनती)

भाग, अपेक्षित वस्तुओं की कीमत जानने के लिए एक वस्तु की कीमत को अपेक्षित वस्तुओं की गिनती से गुणा किया जाता है।

आओ! कुछ उदाहरणों द्वारा समझते हैं:–

उदाहरण 15: एक पेन की कीमत ₹8 है। ऐसे 12 पेनों की कीमत पता करें।

हल : एक पेन की कीमत = ₹8

∴ 12 पेनों की कीमत = ₹8 × 12 = ₹96

उदाहरण 16: 9 मीटर कपड़े की कीमत ₹225 है। एक मीटर कपड़े की कीमत पता करें।

Solution : 9 मीटर कपड़े की कीमत = ₹225

∴1 मीटर कपड़े की कीमत= ₹ $\frac{225}{9}$ = ₹25

उदाहरण 17: 15 कॉपियों की कीमत ₹180 है। ऐसी 8 कॉपियों की कीमत पता करें।

हल : 15 कॉपियों की कीमत = ₹180

∴ 1 कॉपी की कीमत = ₹ $\frac{180}{15}$ = ₹12

इस तरह, 8 कॉपियों की कीमत = ₹12 × 8 = ₹96

अन्य विधि :

इस उदाहरण को हम एक अन्य विधि, जिसे अनुपात विधि भी कहा जाता है, के साथ भी हल कर सकते हैं।

यदि दो राशियाँ एक दूसरे से इस तरह जुड़ी हैं कि जब हम एक राशि को बढ़ाते या घटाते हैं तो इसके अनुसार दूसरी राशि भी इसी तरह बढ़ती या घटती है ताकि दोनों राशियाँ समान रहें। ये राशियाँ सीधे अनुपात में हैं।

प्रश्नानुसार

कॉपियाँ	कीमत
15	180
8	x

आर-पार गुणा से

$$15 \times x = 180 \times 8$$

$$\therefore \quad x = \frac{180 \times 18}{15} = 96$$

$\therefore$ 8 कॉपियों की कीमत ₹96 है।

उदाहरण 18: यदि एक कार 18 लीटर पेट्रोल से 360 कि.मी. चलती है तो वह कार 24 लीटर पेट्रोल से कितनी दूरी तय करेगी?

हल : 18 लीटर पेट्रोल में कार द्वारा तय की गई दूरी = 360 कि.मी.

$\therefore$ 1 लीटर पेट्रोल मे कार द्वारा तय की गई दूरी = $\frac{360}{18} = 20$ कि.मी

इस तरह, 24 लीटर पेट्रोल में कार द्वारा तय की गई दूरी = $20 \times 24 = 480$ कि.मी

अन्य विधि :

पेट्रोल (लीटर)	दूरी
18	360
24	x

आर-पार गुणा से

$$18 \times x = 24 \times 360$$

$$x = \frac{24 \times 360}{18} = 480$$

$\therefore$ कार 24 लीटर पेट्रोल में 480 कि.मी. दूरी तय करेगी।

उदाहरण 19: रमन ने ₹375 में 15 चॉकलेट खरीदी। ₹525 में वह कितनी चॉकलेट खरीद सकती है?

हल : ₹ 375 में रमन ने चॉकलेट खरीदी = 15

$\therefore$ ₹ 1 में रमन ने चॉकलेट खरीदी = $\frac{15}{375}$

इस तरह ₹ 525 में रमन ने चॉकलेट खरीदी = $\frac{15}{375} \times 525 = 21$

अन्य विधि :

चॉकलेट	राशि
15	375
x	525

आर-पार गुणा से

$15 \times 525 = x \times 375$

$\Rightarrow \quad \frac{15 \times 525}{375} = x \quad \Rightarrow \quad x = 21$

इसलिए रमन ने ₹525 में 21 चॉकलेट खरीदी।

उदाहरण 20: पारस एक सप्ताह में ₹1960 कमाता है?

(i) वह 18 दिनों में कितना कमाएगा?

(ii) वह कितने दिनों में ₹7000 कमाएगा?

हल : (i) एक सप्ताह (7 दिनों) में पारस कमता है। = ₹1960

$\therefore$ 1 दिन में पारस कमाता है। = ₹$\frac{1960}{7}$ = ₹280

इस तरह 18 दिनों में पारस कमाएगा = ₹280 × 18 = ₹5040

अन्य विधि :

दिन	कमाई
7	1960
18	x

आर-पार गुणा से

$7 \times x = 1960 \times 8$

$\therefore \quad x = \frac{1960 \times 18}{7}$ = ₹5040

इसलिए, पारस 18 दिनों में ₹5040 कमाएगा।

(ii) ₹ 1960 कमाए जाते हैं = 7 दिन में

$\therefore$ ₹ 1 कमाए जाते हैं = $\frac{7}{1960}$ दिन

इसलिए ₹ 7000 कमाने के लिए जितने दिन चाहिए = $\frac{7}{1960} \times 7000$

= 25

अन्य विधि :

दिन	कमाई
7	1960
x	7000

आर-पार गुणा से

$$7 \times 7000 = 1960 \times x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7 \times 7000}{1960} = x \qquad \Rightarrow \qquad x = 25$$

इसलिए पारस ₹7000, 25 दिनों में कमाएगा।

प्रश्नावली 11.3

1. एक किलोग्राम सेबों की कीमत ₹45 है। 7 किलोग्राम सेबों की कीमत पता करें?
2. एक कार 7 लीटर पेट्रोल में 224 कि.मी. दूरी तय करती है। 1 लीटर पेट्रोल में यह कार कितनी दूरी तय करेगी?
3. एक पाइप 12 घंटों में 10 पानी के टैंक भरती है। वह पाईप ऐसे 15 टैंकों को भरने के लिए कितना समय लेगी?
4. 18 मीटर कपड़े की कीमत ₹810 है। 25 मीटर कपड़े की कीमत क्या होगी?
5. 24 किताबों का भार 6 कि.ग्रा. है। ऐसी 36 किताबों का भार क्या होगा?
6. एक रेलगाड़ी 5 घंटों में 280 कि.मी. की दूरी तय करती है तो 9 घंटों में वह कितने कि.मी. की दूरी तय करेगी?
7. एक 12 मीटर ऊँचा खंभा 30 मीटर लंबी परछाई बनाता है। उस खंभे की ऊँचाई पता करो जो 45 मीटर लंबी परछाई बनाता हो?
8. एक व्यक्ति 7 महीने में ₹ 11200 कमाता है।
   (i) 18 महीनों में वह कितने रुपये कमाएगा?
   (ii) ₹40,000 कमाने में उसे कितने महीने लगेंगें?
9. 1 दर्जन साबुनों की कीमत ₹153.60 है। ऐसे 16 साबुनों की कीमत पता करें?
10. 105 लिफ़ाफ़ों की कीमत ₹35 है। ₹10 में ऐसे कितने लिफ़ाफ़े खरीदे जा सकते हैं?
11. एक कार $2\frac{1}{2}$ घंटों में 90 कि.मी. दूरी तय करती है।
    (i) उसी चाल से चलने पर वह कार 54 कि.मी. दूरी कितने समय में तय करेगी?
    (ii) उसी चाल से 4 घंटों में कितनी दूरी तय करेगी?
12. अंशुल ने 6 ओवर में 57 रन बनाए। उसी स्ट्राइक दर पर वह 95 रन कितने ओवर में बनाएगा?
13. 5 कि.ग्रा. चावल की कीमत ₹32.50 है।
    (i) 14 कि.ग्रा. चावल की कीमत पता करें?
    (ii) ₹162.50 में कितने कि.ग्रा. चावल खरीदे जा सकते हैं?
14. यदि एक गाय 6 दिनों में 21 वर्गमीटर खेत चरती है तो 27 दिनों में कितने क्षेत्रफल में चरेगी?

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. 24 सेकंड का 1 मिनट से अनुपात है–

(a) 2:5 (b) 24:1 (c) 5:2 (d) 1:24

2. 2 मीटर का 75 सेमी. से अनुपात हैं–

(a) 2:75 (b) 75:2 (c) 8:3 (d) 3:8

3. 1 वर्ष का 8 महीनों से अनुपात है–

(a) 2:3 (b) 3:2 (c) 1:8 (d) 8:1

4. ₹40 को 2:3 में बाँटें।

(a) ₹20, ₹30 (b) ₹24, ₹16 (c) ₹30, ₹20 (d) ₹16, ₹24

5. 4:7 के तुल्य इनमें से कौन-सी भिन्न हैं?

(a) 28:42 (b) 28:49 (c) 20:49 (d) 20:42

6. यदि 8, a, 40, 65 समान अनुपात में हैं तो 'a' पता करें–

(a) 26 (b) 12 (c) 13 (d) 9

7. यदि 12, 25, x, 75 समान अनुपात में है तो 'x' पता करें–

(a) 36 (b) 40 (c) 30 (d) 38

8. 12 पेनों की कीमत ₹108 है। ऐसे 18 पेनों की कीमत पता करें?

(a) ₹152 (b) ₹216 (c) ₹ 162 (d) ₹144

9. असलम एक हफ्ते में ₹1680 कमाता है। वह ₹2400 कितने दिनों में कमाएगा?

(a) 10 (b) 8 (c) 12 (d) 9

10. एक बस $2\frac{1}{2}$ घंटों में 90 कि.मी. दूरी तय करती है। 5 घंटों में वह बस कितनी दूरी तय करेगी?

(a) 100कि.मी. (b) 180कि.मी. (c) 150कि.मी. (d) 120कि.मी.

सीखने के परिणाम

इस अध्याय के पूरा होने के बाद विद्यार्थी:

- अनुपात का प्रयोग करके दो राशियों की तुलना करने में समर्थ हो जाएँगे।
- दैनिक जीवन में अनुपात का प्रयोग करने में समर्थ होंगे।
- समान अनुपात के बारे में जानेंगे।
- समान अनुपात की दैनिक जीवन में प्रयोग करने में समर्थ होंगे।
- वास्तविक जीवन में इकाई विधि का प्रयोग करने में समर्थ होंगे।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 11.1

1. (i) 3:8 (ii) 9:5 (iii) 7:8 (iv) 5:6 (v) 3:1

2. (i) 4:11 (ii) 2:7 (iii) 1:5 (iv) 5:3 (v) 25:6

3. (i) 12:7 (ii) 7:30 (iii) 1:6 (iv) 21:4 (v) 3:1

4. (i) 8:2 (ii) 6:10 (iii) 10:24

5. 15:13 **6.** 23:42

7. (i) 3:11 (ii) 14:3 (iii) 11:14

8. (i) 35:4 (ii) 41:35 (iii) 1:20

9. (i) 1:1 (ii) 6:5 (iii) 7:36

10. (i) 11:8 (ii) 13:10 (iii) 11:17 (iv) 1:1

11. (i) 2:3 (ii) 1:3 (iii) 15:4

12. 100,75 13. 42, 98 14. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

15. 1 मी. 56 सेमी., 2मी.60 सेमी.

प्रश्नावली 11.2

1. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) हाँ (v) नहीं

2. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) नहीं (iv) हाँ (v) नहीं

3. (i) गलत (ii) सही (iii) गलत

4. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) नहीं

5. (i) x = 10 (ii) 32 (iii) 25

6. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) हाँ

प्रश्नावली 11.3

1. 315 **2.** 32 कि.मी. **3.** 18 hours **4.** ₹1125 **5.** 9 कि.ग्रा.

6. 504 कि.मी. **7.** 18 मी. **8.** (i) ₹28800 (ii) 25 महीने **9.** ₹204.80 **10.** ₹30

11. (i) $1\frac{1}{2}$ घंटे (ii) 144 कि.मी. **12.** 10 ओवर **13.** (i) ₹91 (ii) 25कि.ग्रा. (iii) 94.5 वर्गमीटर

बहुवैकल्पिक प्रश्न

(1) a **(2)** c **(3)** b **(4)** d **(5)** b

(6) c **(7)** a **(8)** c **(9)** a **(10)** b

12

परिमाप तथा क्षेत्रफल

(PERIMETER & AREA)

उद्देश्य

इस अध्याय में आप सीखेंगे

(i) परिमाप के संकल्प के बारे में।

(ii) अपने आस-पास की आकृतीयों का परिमाप ढूँढ़ना जैसे बाड़, फोटो फ्रेम आदि का।

(iii) क्षेत्रफल के संकल्प के बारे में।

(iv) अपने आस-पास की आकृतीयों का क्षेत्रफल ढूँढ़ना जैसे-फर्श, दरी आदि का।

12.1 भूमिका (Introduction)

हम बिंदु, रेखा और रेखाखण्ड के बारे में पहले ही सीख चुके हैं। बिंदु की केवल स्थिति होती है, रेखा की लम्बाई असीमित होती है परन्तु चौड़ाई नहीं होती, जबकि रेखाखण्ड की लम्बाई मापी जा सकती है। रेखाखण्ड या तो सरल (सीधे) या वक्र समतल चित्र बनाते हैं। जब हम समतल चित्रों की बात करते हैं, हम उनके क्षेत्र और उनकी सीमाओं के बारे में सोचते हैं। इसलिए उनकी तुलना करने के लिए कुछ मापदंडों की जरूरत है। इस अध्याय में, समतल चित्रों के परिमाप और क्षेत्रफल के संकल्प के बारे में सीखेंगे। इन दोनों संकल्पों की हमारी योजना ज़िंदगी में बहुत व्यावहारिक उपयोगिता है। हम आयत और वर्ग के परिमाप और क्षेत्रफल ढूँढ़ने के लिए फार्मूले (सूत्र) भी विकसित करेंगे।

12.2 परिमाप (Perimeter)

हम सभी खेलों/बगीचों के बारे में जानते हैं। मान लो हम इन्हें जानवरों से सुरक्षित रखने के लिए काँटेदार तार लगाना चाहते हैं। वाँछित तार की लम्बाई के माप के लिए, हम खेत/बगीचे की सीमा के एक बिंदु से शुरू करते हैं और सीमा रेखा के साथ-साथ चलते हैं, हम आरम्भिक बिंदु पर दोबारा पहुँचते हैं, जिसका अर्थ है कि हमनें खेत/बगीचे का एक चक्कर पूरा कर लिया है और तार की लम्बाई एक पूरे चक्कर की दूरी के बराबर होगी।

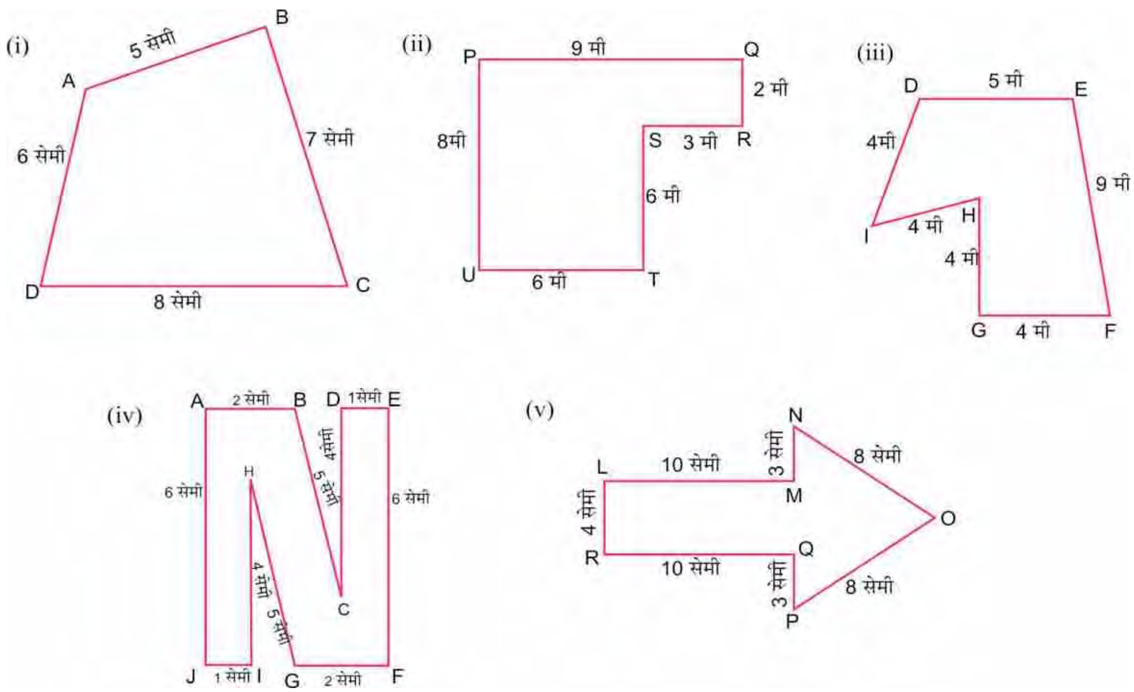
एक चित्र का परिमाप उसकी सीमा की कुल लम्बाई के बराबर होता है।

हम जानते हैं कि सभी बहुभुज (त्रिभुज, आयत, चतुर्भुज, वर्ग, षटकोण आदि) रेखात्मक चित्र है।

∴ परिमाप (Perimeter) = इसकी सभी भुजाओं की लम्बाइयों का जोड़

आओ, कुछ उदाहरणों पर विचार करें:-

उदाहरण 1: **प्रत्येक चित्र का परिमाप पता करो:-**



हल : (i) परिमाप = सभी भुजाओं का जोड़ = AB + BC + CD + DA

= (5 + 7 + 8+ 6) सेमी = 26सेमी

(ii) परिमाप = सभी भुजाओं का जोड़

= PQ + QR + RS + ST + TU + UP

= (9 + 2 + 3 + 6 + 6 + 8)मी. = 34मी.

(iii) परिमाप = सभी भुजाओं का जोड़

= DE + EF + FG + GH + HI + ID

= (5 + 9 + 4 + 4 + 4 + 4)मी. = 30मी.

(iv) परिमाप = सभी भुजाओं का जोड़

= AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HI + IJ + JA

= (2 + 5 + 4 + 1 + 6 + 2+ 5 + 4 + 1 + 6) सेमी = 36सेमी

(v) परिमाप = सभी भुजाओं का जोड़

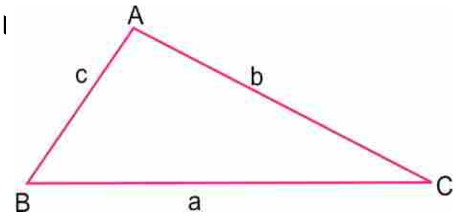
= LM + MN + NO + OP + PQ + QR + RL

= (10 + 3 + 8 + 8 + 3 + 10 + 4)सेमी

= 46सेमी

12.2.1 एक त्रिभुज/त्रिकोण का परिमाप (Perimeter of a Triangle)

ΔABC का परिमाप इसकी सभी भुजाओं के जोड़ के बराबर है।



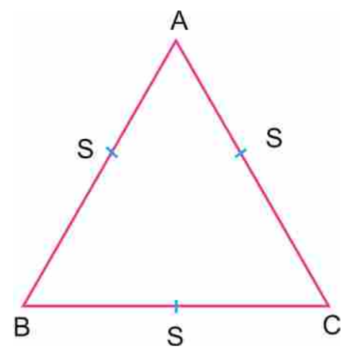
ΔABC का परिमाप $= AB + BC + CA$

$= c + a + b$

या $= a + b + c$

*** एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप (Perimeter of an Equilateral triangle) :**

हम जानते हैं कि एक त्रिभुज जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हों, को समबाहु त्रिभुज कहते हैं।



मान लो समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 's' है।

ΔABC का परिमाप $= AB + BC + CA$

$= s + s + s$

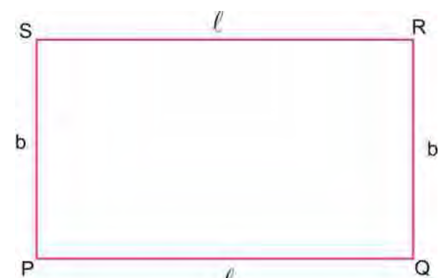
$= 3s$

$= 3 \times$ (ΔABC की एक भुजा की लम्बाई)

इसलिए एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 3 × समबाहु त्रिभुज की एक भुजा की लम्बाई

12.2.2 एक आयत का परिमाप (Perimeter of A Rectangle)

एक आयत PQRS का परिमाप इसकी सभी भुजाओं का जोड़ होता है। मान लो 'ℓ' और 'b' क्रमश: इसकी लम्बाई और चौड़ाई हैं।



$\therefore$ आयत PQRS का परिमाप $= PQ + QR + RS + SP$

$= \ell + b + \ell + b$

$= 2\ell + 2b = 2(\ell + b)$

इसलिए आयत का परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

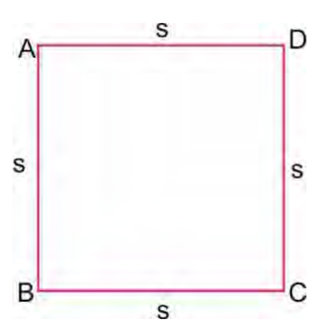
इस फार्मूले से हम आयत की लम्बाई और चौड़ाई भी पता कर सकत ह।

लम्बाई $= \frac{\text{परिमाप}}{2}$ – चौड़ाई और चौड़ाई $= \frac{\text{परिमाप}}{2}$ – लम्बाई

नोट:- परिमाप पता करने से पहले, यह ज़रूर ध्यान रखा जाना चाहिए कि लम्बाई और चौड़ाई की इकाइयाँ समान हों।

12.2.3 एक वर्ग का परिमाप (Perimeter of a Square)

हम जानते हैं कि वर्ग की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।



मान लो 's' वर्ग की प्रत्येक भुजा है।

$\therefore$ वर्ग ABCD का परिमाप $= AB + BC + CD + DA$

$= s + s + s + s = 4s$

$= 4 \times$ (वर्ग की भुजा)

इसलिए वर्ग का परिमाप = 4 × (वर्ग की भुजा)

इस फार्मूले से, हम वर्ग की भुजा प्राप्त कर सकते हैं।

$$\text{भुजा} = \frac{\text{परिमाप}}{4} \text{ या परिमाप} \div 4$$

12.2.4 एक समपंचभुज का परिमाप (Perimeter of a Regular Pentagon)

एक समपंचभुज, 5 बराबर भुजाओं वाला बहुभुज होता है।

$\therefore$ एक समपंचभुज का परिमाप = 5 × समपंचभुज की एक भुजा की लम्बाई

$\Rightarrow$ एक समपंचभुज की एक भुजा की लम्बाई $= \frac{\text{परिमाप}}{5}$

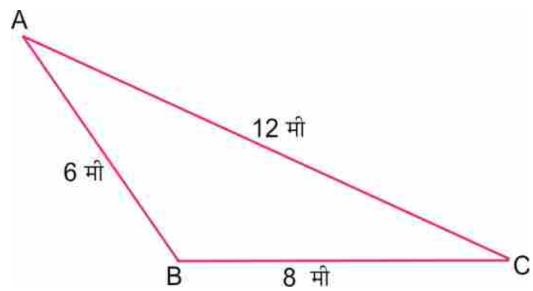
12.2.5 एक समषट्कोण का परिमाप (Perimeter of a Regular Hexagon) :

एक समषट्कोण, 6 बराबर भुजाओं वाला बहुभुज होता है।

$\therefore$ एक समषट्कोण का परिमाप = 6 × समषट्कोण की एक भुजा की लम्बाई

$\Rightarrow$ एक समषट्कोण की एक भुजा की लम्बाई $= \frac{\text{समष्ट्कोण का परिमाप}}{6}$

आओ, कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

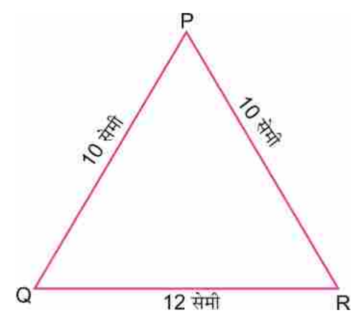


उदाहरण 2: त्रिभुज ABC का परिमाप पता करो जिसकी भुजाएँ AB = 6मी., BC = 8मी. और AC = 12मी.

हल : त्रिभुज ABC का परिमाप = इसकी सभी भुजाओं की लंबाइयों का जोड़

= AB + BC + CA

= (6 + 8 + 12)मी. = 26मी.



उदाहरण 3: एक समद्विबाहु त्रिभुज PQR का परिमाप पता करो जिसमें PQ = PR = 10सेमी बराबर भुजाओं की लम्बाइयाँ हैं और आधार QR = 12सै.मी है।

हल : समद्विबाहु त्रिभुज की भुजाएँ = 10सेमी, 10सेमी, 12सेमी

$\therefore$ परिमाप = इसकी सभी भुजाओं की लंबाइयों का जोड़

= (10 + 10 + 12)सेमी = 32सेमी

उदाहरण 4: निम्नलिखित आयतों का परिमाप पता करो।

(i) लम्बाई 15मी. और चौड़ाई 12 मी.

(ii) लम्बाई 10.3 सेमी और चौड़ाई 14.8 सेमी

(iii) लम्बाई 128 सेमी और चौड़ाई 115 सेमी

हल : (i) आयत की लम्बाई = 15 मी., आयत की चौड़ाई = 12मी.

$\therefore$ आयत का परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 × (15 + 12) = 2 × 27 = 54मी.

(ii) आयत की लम्बाई = 10.3सेमी, आयत की चौड़ाई = 14.8सेमी

$\therefore$ आयत का परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

= $2 \times (10.3 + 14.8)$सेमी = 2×25.1सेमी

= 50.2सेमी

(iii) आयत की लम्बाई = 128सेमी, आयत की चौड़ाई = 115सेमी

∴ आयत का परिमाप = $2 \times$ (लम्बाई + चौड़ाई)

= $2 \times (128 + 115) = 2 \times 243$सेमी

= 486सेमी

उदाहरण 5: एक वर्ग का परिमाप पता करो जिसकी

(i) भुजा = 12मी. (ii) भुजा = 6.3सेमी (iii) भुजा = 85सेमी

हल : (i) वर्ग की भुजा = 12 मी.

∴ वर्ग का परिमाप = $4 \times$ भुजा

= $4 \times 12 = 48$मी.

(ii) वर्ग की भुजा = 6.3 सेमी

∴ वर्ग का परिमाप = $4 \times$ भुजा

= $4 \times 6.3 = 25.2$सेमी

(iii) वर्ग की भुजा = 85 सेमी

∴ वर्ग का परिमाप = $4 \times$ भुजा

= $4 \times 85 = 340$सेमी

उदाहरण 6: एक समषट्भुज का परिमाप पता करो जिसकी भुजा 15 सेमी. हो।

हल : समषट्भुज की भुजा = 15 सेमी

समषट्भुज का परिमाप = $6 \times$ भुजा

= $6 \times 15 = 90$सेमी

उदाहरण 7: एक त्रिभुज की भुजाएँ 12 सेमी और 15 सेमी हैं और त्रिभुज का परिमाप 40 सेमी है। तीसरी भुजा की लम्बाई कितनी होगी?

हल : त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाईयों का जोड़ = (12 + 15) सेमी

= 27 सेमी

परिमाप = 40 सेमी

तीसरी भुजा = त्रिभुज का परिमाप – त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाई का जोड़

∴ तीसरी भुजा = 40 सेमी – 27 सेमी = 13 सेमी

अन्य विधि:- मान लो भुजाएँ $a = 12$ सेमी, $b = 15$ सेमी, $c = ?$

त्रिभुज का परिमाप = सभी भुजाओं की लम्बाइयों का जोड़

तब

$40 = a + b + c$

$40 = 12 + 15 + c$

$40 = 27 + c$

$c = 40 - 27$

= 13सेमी

उदाहरण 8: यदि एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप 45 सेमी है तो त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई पता करो।

हल : दिया है, समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 45सेमी

एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 3 × (त्रिभुज की भुजा)

$\Rightarrow$ 45 = 3 × भुजा

$\Rightarrow$ $\frac{45}{3}$ = भुजा

$\Rightarrow$ भुजा = 15सेमी

उदाहरण 9: यदि एक वर्गाकार घास के मैदान का परिमाप 72 मीटर है तो वर्गाकार घास के मैदान की एक भुजा की लम्बाई पता करो।

हल : दिया गया है, वर्गाकार घास के मैदान का परिमाप = 72मीटर

$\therefore$ वर्ग का परिमाप = 4 × (भुजा)

$\Rightarrow$ 72(भुजा) = 4 × (भुजा)

$\Rightarrow$ भुजा = $\frac{72}{4}$ मी: = 18मी:

उदाहरण 10: एक आयत का परिमाप 80 सेमी है। यदि आयत की लम्बाई 25 सेमी हो तो आयत की चौड़ाई पता करो।

हल : दिया है, आयत का परिमाप = 80 सेमी और आयत की लम्बाई = 25सेमी

$\therefore$ आयत का परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

$\Rightarrow$ 80 = 2 × (25+चौड़ाई)

$\Rightarrow$ $\frac{80}{2}$ = 25 + चौड़ाई

$\Rightarrow$ चौड़ाई + 2 = 40 $\Rightarrow$ चौड़ाई = 40 – 25 = 15सेमी

दैनिक जीवन में परिमाप का प्रयोग:

उदाहरण 11: कँवर 135 मीटर भुजा वाले वर्गाकार पार्क के 5 चक्कर लगाता है। कँवर द्वारा तय की गई दूरी पता करो।

हल : वर्गाकार पार्क के एक चक्कर में तय की गई दूरी = वर्ग का परिमाप

वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा

= 4 × 135 = 540मी:

वर्गाकार पार्क के 5 चक्करों में तय की गई दूरी

= 5 × वर्ग का परिमाप

= 5 × 540

= 2700मी:

या $\frac{2700}{1000}$ कि.मी = 2.7कि.मी ($\because$ 1कि.मी = 1000मी:)

उदाहरण 12: एक माली अपने आयताकार बगीचे जिसकी लम्बाई 180मी: और चौड़ाई 150 मी. है को बाड़ लगाना चाहता है। यदि वह उस बगीचे की बाड़ के लिए तार की तीन तहों का उपयोग करना चाहता है तो उसे कितनी बाड़ चाहिए? लम्बाई पता करो।

हल : एक माली अपने आयताकार बगीचे को बाड़ लगाना चाहता है। इसलिए हमें बगीचे का परिमाप पता करना होगा।

आयताकार बगीचे की दी गई लम्बाई = 180मी:

आयताकार बगीचे की चौड़ाई = 150मी:

∴ आयताकार बगीचे का परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 × (180 + 150)

= 2 × 330 = 660मी:

∴ बाड़ की एक तह = बगीचे का परिमाप

बाड़ की तीन तहें = 3 × बगीचे का परिमाप

= 3 × 660 = 1980मी:

इसलिए उसे बगीचे की बाड़ के लिए 1980 मीटर तार की जरूरत है।

उदाहरण 13: एक 30मी. भुजा वाले वर्गाकार पार्क के इर्द गिर्द ₹ 500 प्रति मीटर की दर से दीवार बनाने का खर्च पता करो।

हल : वर्गाकार पार्क की दी गई भुजा = 30मी.

∴ वर्ग का परिमाप = 4 × वर्ग की भुजा

= 4 × 30 = 120मी.

1 मीटर दीवार बनाने का खर्च = ₹ 500

∴ 120 मीटर दीवार बनाने का खर्च = 120 × 500 = ₹ 60000

उदाहरण 14: यदि आयत की लम्बाई x इकाइयाँ और चौड़ाई 3 इकाइयाँ हो तो आयत का परिमाप पता करो।

हल : दिया है, आयत की लम्बाई = x इकाइयाँ

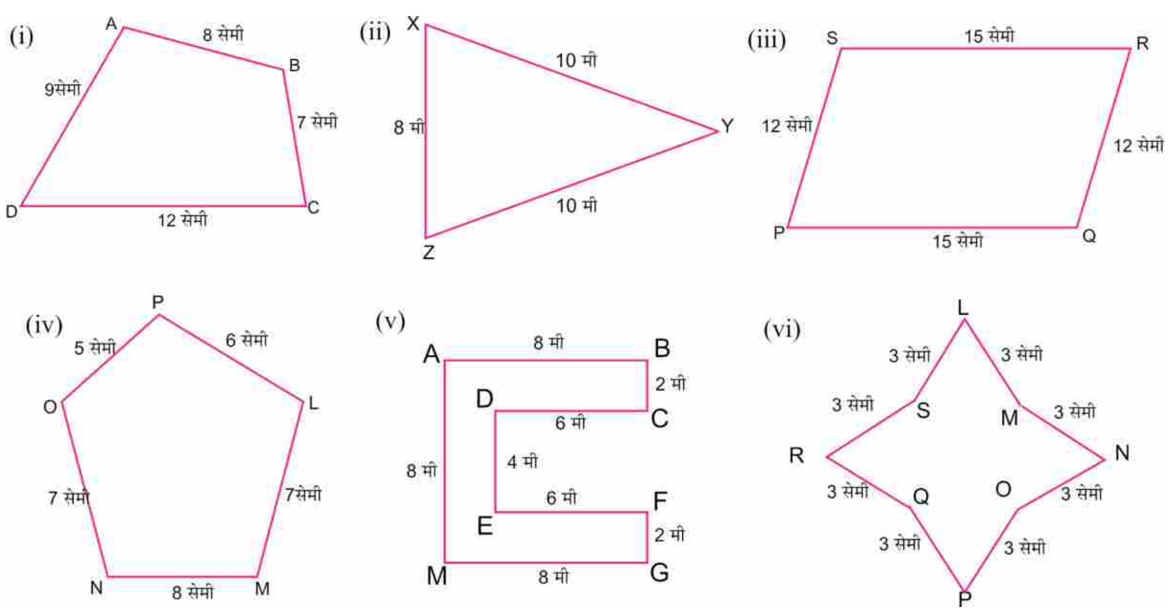
आयत की चौड़ाई = 3 इकाइयाँ

∴ आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई+चौड़ाई)

= 2 (x + 3) इकाइयाँ

प्रश्नावली 12.1

1. निम्नलिखित आकृतियों के परिमाप पता करो:-



2. त्रिभुज का परिमाप पता करो जिसकी भुजाएँ:-

(i) 5सेमी, 6सेमी और 7सेमी (ii) 10मी:, 12मी:, 18मी: (iii) 4.6सेमी, 3.2सेमी और 5.8सेमी

3. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप पता करो जिसकी बराबर भुजाओं की लम्बाई 15 सैं.मी और आधार 18सेमी हो।

4. वर्ग का परिमाप पता करो जिसकी भुजा

(i) 16सेमी (ii) 4.8मि.मी (iii) 125सेमी (iv) 45मी. (v) 39सेमी

5. आयत का परिमाप पता करो जिसकी

(i) लम्बाई 20 मी. और चौड़ाई 15मी.

(ii) लम्बाई 25मी. और चौड़ाई 35मी.

(iii) लम्बाई 40सेमी और चौड़ाई 28 सेमी

(iv) लम्बाई 18.3 सेमी और चौड़ाई 6.8सेमी

(v) लम्बाई 12.5सेमी और चौड़ाई 15 सेमी

6. समषट्भुज का परिमाप पता करो जिसकी भुजाएँ

(i) 5सेमी (ii) 12सेमी (iii) 7.2सेमी

7. समबाहु त्रिभुज का परिमाप पता करो जिसकी भुजाएँ

(i) 10सेमी (ii) 8मी. (iii) 24मी. (iv) 5.6मी. (v) 12.1सेमी

8. यदि एक त्रिभुज का परिमाप 48 सेमी हो और दो भुजाएँ 12 सेमी तथा 17 सेमी हो तो तीसरी भुजा पता करो।

9. एक समबाहु त्रिभुज की भुजा पता करो यदि परिमाप है:

(i) 45सेमी (ii) 69मि.मी (iii) 117सेमी

10. एक वर्ग की भुजा पता करो यदि परिमाप है:

(i) 52सेमी (ii) 60सेमी (iii)112सेमी

11. (i) एक आयताकार खेत का परिमाप 260मी. है। यदि इसकी लम्बाई 80मी. है तो इसकी चौड़ाई पता करो।

(ii) एक आयताकार बगीचे का परिमाप 140मी. है। यदि इसकी चौड़ाई 45मी. है तो इसकी लम्बाई पता करो।

(iii) एक आयत का परिमाप 114 सेमी है। यदि इसकी लम्बाई 32 सेमी है तो इसकी चौड़ाई पता करो।

12. एक त्रिभुजाकार खेत की भुजाएँ 15मीटर, 20 मीटर और 18 मीटर है। एक लड़के द्वारा इस खेत के दो चक्कर पूरा करने में तय की गई दूरी पता करो।

13. 26मी. भुजा वाले एक वर्गाकार खेत को ₹ 3 प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का खर्च पता करो।

14. मनी 75मी. भुजा वाले एक वर्गाकार पार्क के गिर्द दौड़ता है। कुश 60मी. लम्बाई और 45मी. चौड़ाई वाले आयताकार पार्क के गिर्द दौड़ता है। कौन कम दूरी तय करता है?

15. 240सेमी लम्बाई और 150 सेमी चौड़ाई वाले एक सफेद आयताकार बोर्ड को ₹ 6 प्रति सेमी की दर से फ्रेमिंग (फ्रेम लगाने) का खर्च पता करो।

16. यदि एक आयत की लम्बाई 'a' इकाइयाँ और चौड़ाई '5' इकाइयाँ हो तो आयत का परिमाप पता करो।

17. खाली स्थान भरो:

(i) एक बहुभुज की सारी भुजाओं की लम्बाइयों के जोड़ को .... कहते हैं।

(ii) वर्ग का परिमाप = ... × भुजा

(iii) आयत का परिमाप = 2 × (.................. + ...)

(iv) एक वर्ग की भुजा = (..................) ÷ 4

(v) एक समबाहु त्रिभज का परिमाप = ... × भुजा

12.3 क्षेत्रफल (Area)

हम पिछली कक्षाओं में सीख चुके हैं कि किसी क्षेत्रफल को किसी तल या चित्र द्वारा घेरे गए क्षेत्र के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। एक बहुभुज का क्षेत्रफल पता करने के लिए बहुभुज में घिरे बंद क्षेत्र पर विचार करते हैं।

आओ! इस विचार को स्पष्ट करने के लिए एक उदाहरण लें। प्रीतपाल ज़मीन का एक टुकड़ा खरीदता है जो 80 मीटर लंबा और 65 मीटर चौड़ा है और उसका दोस्त असलम 60 मीटर लंबा और 75 मीटर चौड़ा जमीन का टुकड़ा उसी दर से खरीदता है। कौन ज्यादा कीमत का भुगतान करेगा?

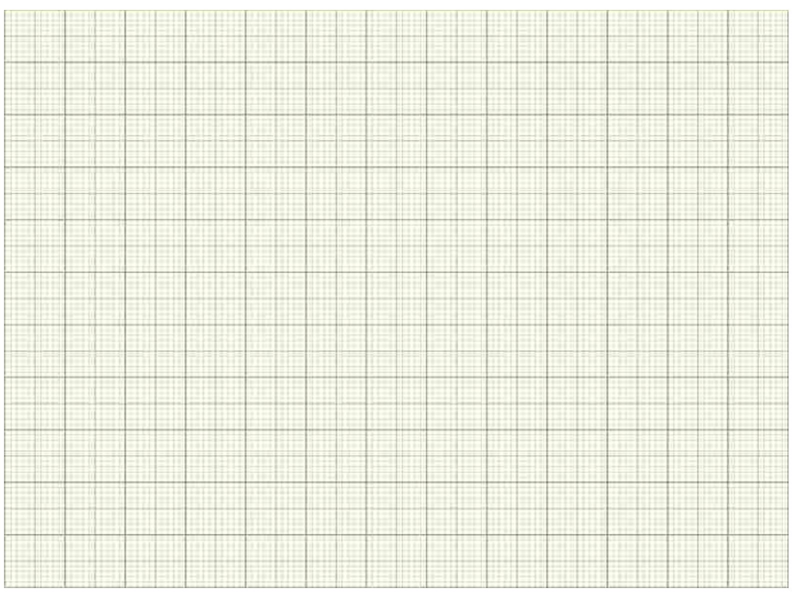
नि:संदेह, जिसके पास ज्यादा ज़मीन है वह ज्यादा कीमत का भुगतान करेगा। इस स्थिति में, हम यह जानने के लिए कि, किसके पास ज्यादा ज़मीन हैं दोनों ज़मीनों का क्षेत्रफल पता करेंगे।

एक बंद समतल आकृति द्वारा घेरे गए क्षेत्र को क्षेत्रफल कहते हैं।

क्षेत्रफल की इकाई (Unit of Area):- 1 इकाई भुजा वाला वर्ग लो। यह 1 वर्ग इकाई क्षेत्र को घेरेगा। इसलिए हम क्षेत्रफल को हमेशा वर्ग इकाइयों में दर्शाते हैं।

12.3.1 वर्गाकार पेपर (ग्राफ पेपर) के उपयोग से क्षेत्रफल पता करना (Finding Area by the use of squared paper) (Graph paper) :

वर्गाकार पेपर या ग्राफ पेपर किसी साधारण बंद वक्र या बंद क्षेत्र के अनुमानित क्षेत्रफल को पता करने के लिए सुविधाजनक विधि है।



- यदि बंद चित्र में पूर्ण वर्गों की गिनती है तब पूर्ण वर्गों की संख्या को गिनें।
- यदि चित्र में आधे या आधे से अधिक वर्ग शामिल हैं तो निम्नलिखित फार्मूले का प्रयोग करें।

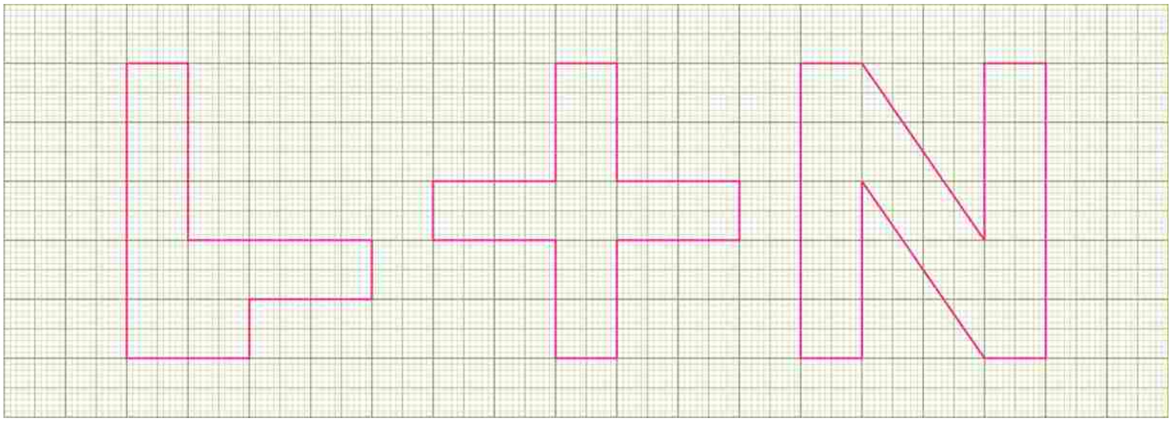
समतल चित्र का क्षेत्रफल= $\left(m + n + \frac{1}{2}p\right)$

जहाँ m = पूर्ण वर्गों की संख्या

n = आधे से अधिक बंद वर्गों की संख्या

p = बिल्कुल आधे वर्गों की संख्या

उदाहरण 15:- **पूर्ण वर्ग, आधे या आधे से अधिक वर्ग, आधे वर्गों की संख्या की गिनती करके निम्नलिखित प्रत्येक आकृतियों का अनुमानित क्षेत्रफल पता करो। (1 वर्ग का क्षेत्रफल = 1 वर्ग सेमी.)**



हल : (i) पूरे वर्गों की संख्या m = 9

यहाँ हमारे पास कोई आधा या आधे से अधिक वर्ग नहीं है

$\therefore$ n = 0, p = 0

$\therefore$ समतल चित्र का क्षेत्रफल= $m + n + \frac{1}{2}p$

= 9 + 0 + 0 = 9वर्ग सेमी

(ii) पूरे वर्गों की संख्या , m = 9

n = 0, p = 0

$\therefore$ समतल चित्र का क्षेत्रफल = 9वर्ग सेमी

(iii) पूरे वर्गों की संख्या m = 10

बिल्कुल आधे वर्गों की संख्या p = 0

आधे से अधिक वर्गों की संख्या (n) = 4

$\therefore$ समतल चित्र का क्षेत्रफल = $m + n + \frac{1}{2}p$

$= 10 + 4 + \frac{1}{2} \times (0)$

= 14 + 0

= 14 वर्ग सेमी

12.3.2 फार्मूले के उपयोग से क्षेत्रफल पता करो (Measurement of Area by Using Formula)

हमने पिछली कक्षा में एक आयत और एक वर्ग के क्षेत्रफल के बारे में सीखा है। इस कक्षा में हम इस बारे में विस्तार से विचार करेंगे।

- **आयत का क्षेत्रफल (Area of a Rectangle) :**

आओ 1 सेमी × 1 सेमी वर्ग वाले ग्राफ पेपर पर 4 सेमी लम्बाई और 3 सेमी चौड़ाई वाली आयत बनाएँ।

हम देखते हैं कि यह आयत 12 वर्गों को ढकता है।

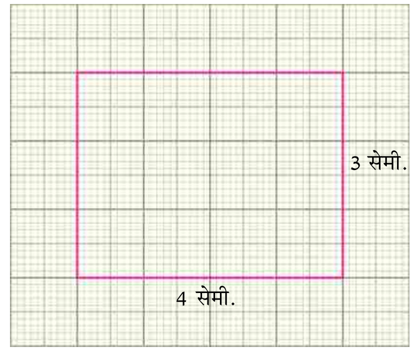
∴ आयत का क्षेत्रफल = 12 वर्ग सेमी

हम देखते हैं कि एक कतार में 4 वर्ग है और यहाँ 3 ऐसी कतारें हैं।

∴ वर्गों की कुल संख्या = 4 × 3 = लम्बाई × चौड़ाई

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

उपरोक्त फार्मूले से, हम प्राप्त कर सकते हैं–



$$\textbf{लम्बाई} = \frac{\textbf{क्षेत्रफल}}{\textbf{चौड़ाई}}, \quad \textbf{चौड़ाई} = \frac{\textbf{क्षेत्रफल}}{\textbf{लम्बाई}}$$

- **एक वर्ग का क्षेत्रफल (Area of a Squares)**

1 सेमी × 1 सेमी वर्ग वाले ग्राफ पेपर पर

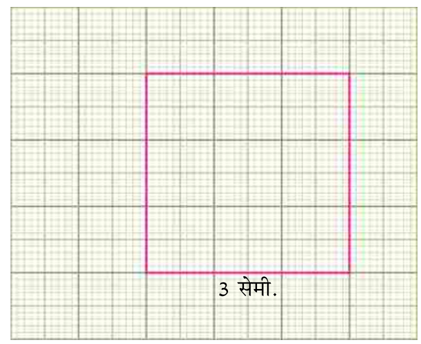
भुजा 3 सेमी. वाला एक वर्ग बनाओ।

हम देखने है कि यह 9 वर्गों को पूरी तरह ढकता है।

∴ वर्ग का क्षेत्रफल = 9 वर्ग सेमी

हम देखते हैं कि एक कतार में 3 वर्ग हैं और यहाँ 3 ऐसी कतारें हैं।

∴ वर्गों की संख्या = 3 × 3 = भुजा × भुजा



वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

नोटः-एक चित्र/आकृति का क्षेत्रफल पता करने के लिए सभी भुजाओं की इकाइयाँ समान होनी चाहिए।

उदाहरण 16: **एक आयत का क्षेत्रफल पता करो जिसकी**

(i) लम्बाई = 15 सेमी और चौड़ाई = 12 सेमी

(ii) लम्बाई = 18 मीटर और चौड़ाई = 24 मीटर

(iii) लम्बाई = 5 सेमी और चौड़ाई = 12 मि.मी

हल : (i) आयत की लम्बाई = 15 सैं.मी और आयत की चौड़ाई = 12सेमी

∴ आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 15सेमी × 12सेमी

= 180 वर्ग सेमी

(ii) आयत की लम्बाई = 18सैं.मी और आयत की चौड़ाई = 24मी.

∴ आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 18m × 24मी.

= 432 वर्ग सेमी

(iii) यहाँ लम्बाई और चौड़ाई की इकाइयाँ अलग-अलग है। पहले इन्हें समान इकाइयों में बदलो।

लम्बाई = 5सेमी = 5 × 10 मि.मी = 50मि.मी (∵ 1सेमी = 10मि.मी)

चौड़ाई = 12मि.मी

∴ आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 50मि.मी × 12मि.मी

= 600 वर्ग मि.मी

उदाहरण 17: **वर्ग का क्षेत्रफल पता करो जिसकी भुजा**

(i) 5सेमी (ii) 4.1मि.मी (iii) 18मी.

हल : (i) वर्ग की भुजा = 5सेमी

∴ वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

= 5सेमी × 5सेमी

= 25 वर्ग सेमी

(ii) वर्ग की भुजा = 4.1मि.मी

∴ वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

= 4.1मि.मी × 4.1मि.मी

= 16.81 वर्ग मि.मी

(iii) वर्ग की भुजा = 18मी.

∴ वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

= 18मी. × 18मी.

= 324 वर्ग मी.

उदाहरण 18: **एक आयताकार प्लॉट की लम्बाई 90 मी. तथा इसका क्षेत्रफल 1800 वर्ग मीटर है। प्लॉट की लम्बाई पता करो।**

हल : आयताकार प्लॉट की लम्बाई = 90मी.

आयताकार प्लॉट का क्षेत्रफल = 1800 वर्ग मी.

∴ आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

⇒ 1800 = 90 × चौड़ाई

⇒ $\frac{1800}{90}$ = **चौड़ाई ⇒ चौड़ाई = 20मीटर**

उदाहरण 19:- **ज़मीन के एक वर्गाकार प्लॉट की भुजा 35 मीटर है। प्लॉट को ₹ 4 प्रति वर्ग मीटर की दर से समतल करने का खर्च पता करो।**

हल : वर्गाकार प्लॉट की भुजा = 35m

वर्गाकार प्लॉट का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

= 35मी. × 35मी.

= 1225 वर्ग मी.

1 वर्ग मीटर को समतल करने का खर्च = ₹ 4

∴ 1225 वर्ग मीटर को समतल करने का खर्च = ₹ 4 × 1225

= ₹ 4900

उदाहरण 20: **एक आयत का क्षेत्रफल 380 वर्ग सेमी है और इसकी चौड़ाई 20 सेमी है। आयत का परिमाप पता करो।**

हल : दिया गया आयत का क्षेत्रफल = 380 वर्ग सेमी

आयत की चौड़ाई = 20सेमी

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

380 = लम्बाई × 20

⇒ आयत की लम्बाई $= \frac{380}{20} = 19$सेमी

अब, आयत का परिमाप = 2x (लम्बाई + चौड़ाई)

$= 2 \times (19 + 20)$

$= 2 \times 39 = 78$सैं.मी

उदाहरण 21:- 108सेमी ×105 सेमी माप वाली कागज़ की शीट में से कितने लिफाफे बनाये जा सकते हैं यदि प्रत्येक लिफाफे के लिए 9सेमी × 15 सेमी कागज़ की जरूरत है।

हल : दी गई कागज़ की शीट की लम्बाई = 108सेमी

कागज़ की शीट की चौड़ाई = 105सेमी

कागज़ की शीट का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$= (108 \times 105)$ वर्ग सेमी

एक लिफाफे के लिए वांछित कागज का क्षेत्रफल $= (9 \times 15)$ वर्ग सेमी

∴ लिफ़ाफ़ों की संख्या जो बनाई जा सकती है $= \frac{\text{कागज की शीट का क्षेत्रफल}}{\text{एक लिफ़ाफ़े का क्षेत्रफल}}$

$= \frac{108 \times 105}{9 \times 15} = 84$

84 लिफाफे बनाए जा सकते हैं।

उदाहरण 22: एक वर्ग का परिमाप 68 सेमी हैं। इसका क्षेत्रफल पता करो।

हल : वर्ग का परिमाप = 68सेमी

⇒ $4 \times$ वर्ग की भुजा = 68सेमी

⇒ वर्ग की भुजा $= \frac{68}{4} = 17$सेमी

∴ वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

$= 17$सेमी $\times$ 17सेमी

= 289 वर्ग सेमी

उदाहरण 23: एक संगमरमर की टाइल 25 सेमी × 20 सेमी माप की है। एक फर्श जिसका माप 4.5मी. × 3मी. है, को ढकने के लिए कितनी टाइलों की जरूरत होगी?

हल : फर्श का क्षेत्रफल $= 4.5 \times 3$ वर्ग मी.

= 13.5 वर्ग मी.

$= 13.5 \times 10000$

= 135000 वर्ग मी.

एक टाइल का क्षेत्रफल $= (25 \times 20)$ वर्ग सेमी

= 500 वर्ग सेमी

1मी.	= 100सेमी
1 वर्ग मी.	= 100सेमी × 100सेमी
	= 10000 वर्ग सेमी

∴ फर्श को ढकने के लिए वांछित टाइलों की संख्या $= \frac{\text{फर्श का क्षेत्रफल}}{\text{एक टाइल का क्षेत्रफल}}$

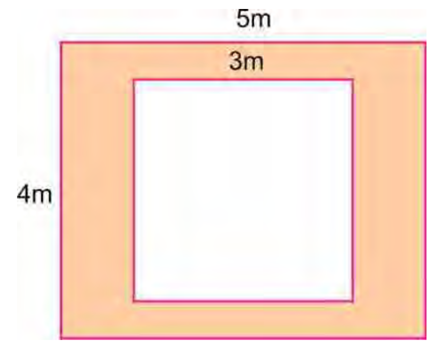
$$= \frac{135000}{500} = 270$$

इसलिए, फर्श को ढकने के लिए 270 टाइलों की जरूरत होगी।

उदाहरण 24:– **एक फर्श 5 मीटर लम्बा और 4 मीटर चौड़ा है। एक वर्गाकार गलीचा जिस की भुजा 3 मीटर है, इस फर्श पर बिछा हुआ है। फर्श के उस भाग का क्षेत्रफल पता करो जहाँ गलीचा नहीं है।**

हल : दी गई फर्श की लम्बाई = 5मी.

चौड़ाई = 4मी.



फर्श का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 5मी. × 4मी.

= 20 वर्ग मी.

वर्गाकार गलीचे का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

= 3मी. × 3मी. = 9 वर्ग मी.

∴ क्षेत्रफल जहाँ गलीचा नहीं है = फर्श का क्षेत्रफल – गलीचे का क्षेत्रफल

= (20 – 9) वर्ग मी. = 11 वर्ग मी.

उदाहरण 25: **(i) यदि एक वर्ग की भुजा दुगुनी कर दी जाए तो उसका क्षेत्रफल कितने गुणा हो जाएगा?**

(ii) यदि एक आयत की लम्बाई को दो गुणा और चौड़ाई को तीन गुणा कर दिया जाए तो उसका क्षेत्रफल कितने गुणा हो जाएगा?

हल : (i) मान लो वर्ग की भुजा = x सेमी

∴ वर्ग का क्षेत्रफल = (x × x) वर्ग सेमी

अब यदि भुजा दो गुणी कर दी जाए, तब

नए वर्ग की भुजा = 2xसेमी

∴ नए वर्ग का क्षेत्रफल = [(2x) × (2x)] वर्ग सेमी

= (2 × 2 × x × x) वर्ग सेमी

= (4 × x × x) वर्ग सेमी

= 4 (x × x) वर्ग सेमी

= 4 × (वास्तविक वर्ग का क्षेत्रफल)

∴ यदि भुजा दो गुणी की जाती है तो वर्ग का क्षेत्रफल 4 गुणा हो जाएगा।

(ii) मान लो, ℓ और b क्रमशः आयत की लम्बाई और चौड़ाई है।

∴ आयत का क्षेत्रफल = $\ell \times b$

अब, यदि लम्बाई दो गुणी कर दी जाए और चौड़ाई तीन गुणी कर दी जाए

तब, नई लम्बाई = 2ℓ

नई चौड़ाई = $3b$

इस प्रकार, नयी आयत का क्षेत्रफल= नयी लम्बाई × नयी चौड़ाई

= $2\ell \times 3b$

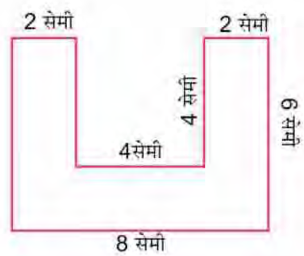
$= 6 \times (\ell \times b)$

$= 6 \times$ (वास्तविक आयत का क्षेत्रफल)

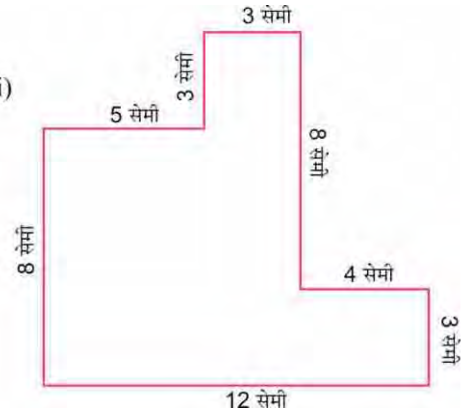
इसलिए, आयत का क्षेत्रफल, वास्तविक क्षेत्रफल का 6 गुणा हो जाता है।

उदाहरण 26: निम्न चित्रों को आयत और वर्गों में बाँट कर क्षेत्रफल पता करो।

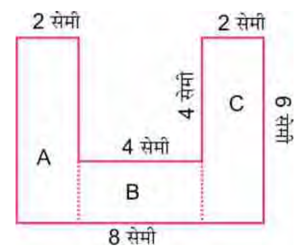
(i)



(ii)



हल : (i) दिए चित्र को तीन भागों में बाँटा जा सकता है।



- आकार 2सेमी × 6सेमी की आयत A
- आकार 4सेमी × 2सेमी की आयत B
- आकार 2सेमी × 6सेमी की आयत C

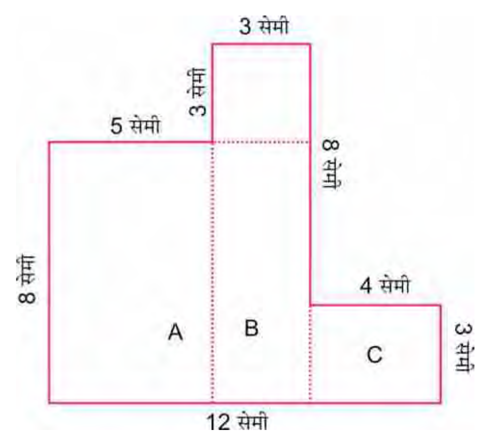
∴ आयत A का क्षेत्रफल = 2सेमी × 6सेमी = 12 वर्ग सेमी

आयत B का क्षेत्रफल = 4सेमी × 2सेमी = 8 वर्ग सेमी

आयत C का क्षेत्रफल = 2सेमी × 6सेमी = 12 वर्ग सेमी

⇒ कुल चित्र का क्षेत्रफल = 12 + 8 + 12 = 32 वर्ग सेमी

(ii) चित्र को 3 भागों में बाँटा जा सकता है।



- आकार 5 सेमी × 8 सेमी की आयत A
- आकार 3 सेमी × 11 सेमी की आयत B
- आकार 4 सेमी × 3 सेमी की आयत C

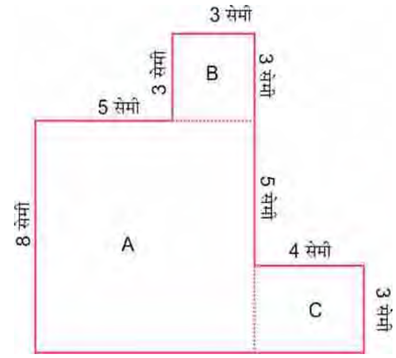
∴ आयत A का क्षेत्रफल = 5सेमी × 8सेमी = 40 वर्ग सेमी

आयत B का क्षेत्रफल = 3सेमी × 11सेमी = 33 वर्ग सेमी

आयत C का क्षेत्रफल = 4सेमी × 3सेमी = 12 वर्ग सेमी

∴ कुल चित्र का क्षेत्रफल = 40 + 33 + 12 = 85 वर्ग सेमी

अन्य विधि:- चित्र को तीन भागों में बाँटा जा सकता है।



- आकार 8सेमी × 8सेमी का वर्ग A
- आकार 3सेमी × 3सेमी का वर्ग B
- आकार 4सेमी × 3सेमी का वर्ग C

∴ वर्ग A का क्षेत्रफल = 8सेमी × 8सेमी = 64 वर्ग सेमी

वर्ग B का क्षेत्रफल = 3सें.मी × 3सें.मी = 9 वर्ग सेमी

वर्ग C का क्षेत्रफल = 4सेमी × 3सेमी = 12 वर्ग सेमी

⇒ कुल चित्र का क्षेत्रफल = 64 + 9 + 12 = 85 वर्ग सेमी

उदाहरण 27: यदि आयत की लम्बाई x इकाइयाँ और आयत की चौड़ाई 5 इकाइयाँ हैं, तो आयत का क्षेत्रफल पता करो।

हल : आयत की लम्बाई = x इकाइयाँ

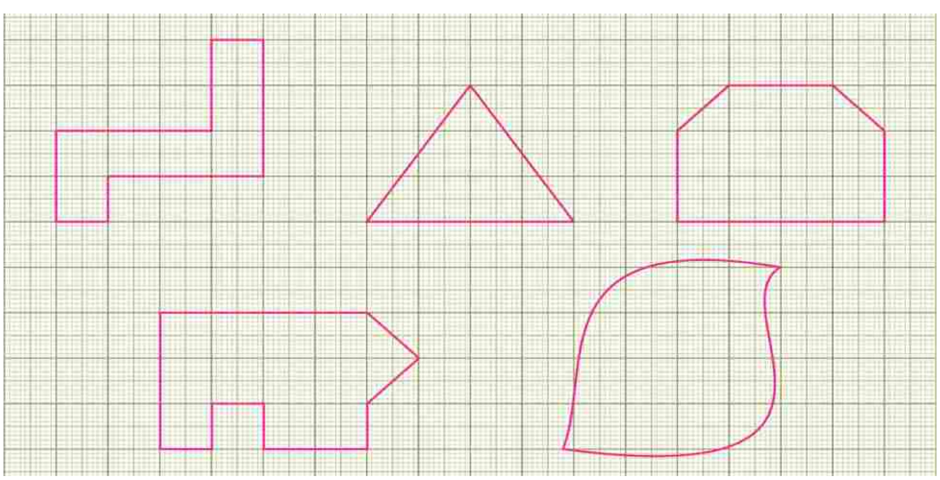
आयत की चौड़ाई = 5 इकाइयाँ

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= x × 5 = 5x वर्ग इकाइयाँ

प्रश्नावली 12.2

1. पूर्ण वर्ग, आधे या आधे से अधिक और आधे वर्गों की संख्या गिनकर नीचे दिए प्रत्येक आकृति का अनुमानित क्षेत्रफल पता करो।



2. एक आयत का क्षेत्रफल पता करो जिसकी
   (i) लम्बाई = 12सेमी, चौड़ाई = 16सेमी (ii) लम्बाई = 25मी., चौड़ाई = 18मी.
   (iii) लम्बाई = 2.7मी, चौड़ाई= 45सेमी (iv) लम्बाई = 4.2सेमी, चौड़ाई = 1.5सेमी

(v) लम्बाई = 3.8मि.मी, चौड़ाई = 4मि.मी

3. वर्ग का क्षेत्रफल पता करो जिसकी भुजा

(i) 19सेमी (ii) 24मि.मी (iii) 3.5सेमी (iv) 2.6सेमी (v) 8.2सेमी

4. एक आयत का क्षेत्रफल 216 वर्ग सेमी है और इसकी लम्बाई 12 सैं.मी है। चौड़ाई पता करो।

5. एक आयत का क्षेत्रफल 225 वर्ग मीटर है और इसकी चौड़ाई 9 मीटर है। लम्बाई पता करो.

6. एक मैदान की लम्बाई और चौड़ाई क्रमश: 32 मीटर और 24 मीटर है। इस मैदान को ₹ 3 प्रति वर्ग मीटर की दर से समतल करने का खर्च पता करो।

7. एक आयत का परिमाप पता करें जिसका क्षेत्रफल 324 वर्ग सेमी और एक भुजा 36सेमी हैं।

8. एक वर्गाकार मैदान का परिमाप 100 मीटर है। इसका क्षेत्रफल पता करो।

9. एक आयत जिसकी लम्बाई 20 सेमी है, का क्षेत्रफल 340 वर्ग सेमी है। इसका परिमाप पता करो।

10. एक पत्थर की टाइल का माप 15सेमी ×20 सैं.मी है। माप 4मी.× 6मी. की एक दीवार को ढकने के लिए कितनी टाइलों की ज़रूरत है?

11. भुजा 72 मीटर वाले एक वर्गाकार खेत को समतल करने के लिए 5 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से कीमत पता करो।

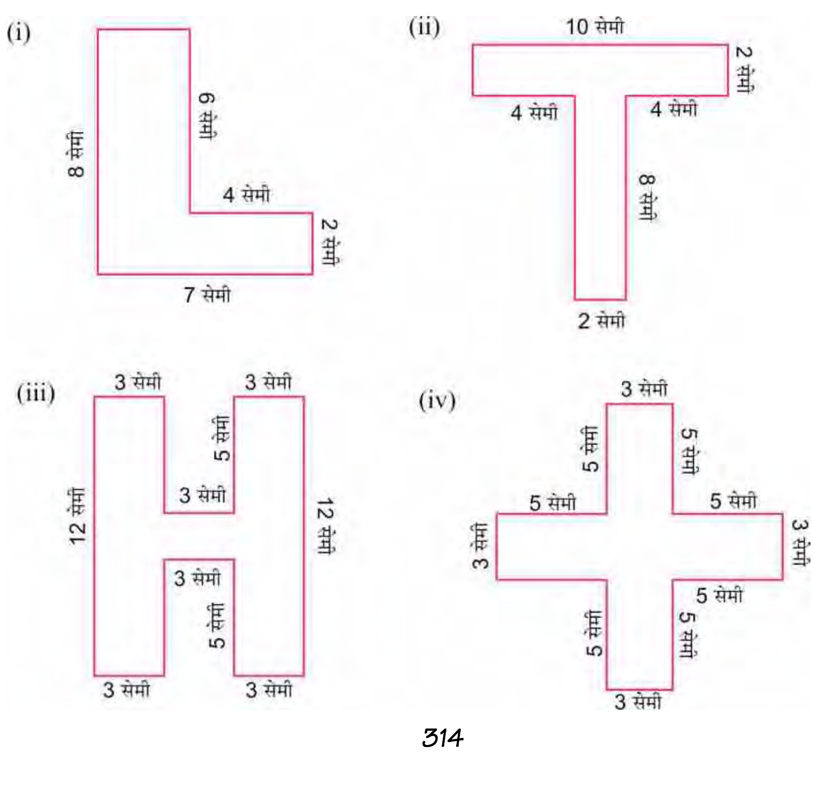
12. माप 2 सेमी × 1.5 सेमी की कितनी टिकटें, कागज़ की शीट जिसका माप 6सेमी×12 सेमी है, पर चिपकाई जा सकती हैं।

13. (i) यदि एक वर्ग की भुजा तीन गुनी कर दी जाए तो उसका क्षेत्रफल कितने गुणा हो जाएगा?

(ii) यदि एक आयत की लम्बाई को आधा और चौड़ाई को दुगुना कर दिया जाए तो उसका क्षेत्रफल कितने गुणा हो जाएगा?

(iii) यदि एक वर्ग की भुजा आधी कर दी जाए तो उसका क्षेत्रफल कितने गुणा हो जाएगा?

14. नीचे दिए चित्रों को वर्गों और आयतों में बाँटकर क्षेत्रफल पता करो:



15. **खाली स्थान भरो:-**

(i) 1 वर्गमीटर =............. वर्ग सेमी

(ii) 1 वर्ग सेमी =............. वर्ग मि.मी

(iii) आयत का क्षेत्रफल = ... × ....

(iv) लम्बाई = ... ÷ चौड़ाई

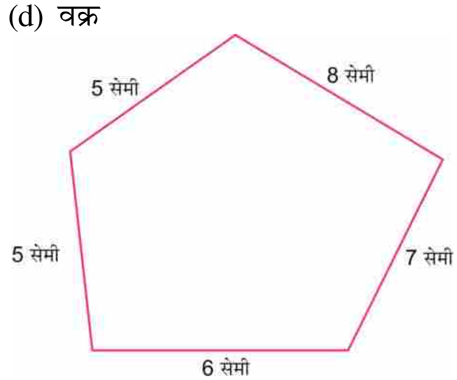
(v) वर्ग का क्षेत्रफल = ... × ....

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. एक बंद चित्र की बाह्य सीमा को .... कहते हैं।

(a) परिमाप (b) क्षेत्र (c) क्षेत्रफल (d) वक्र

2. दिए गए चित्र का परिमाप पता करो।



(a) 30सेमी

(b) 31सेमी

(c) 32सेमी

(d) 33सेमी

3. एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप = ...

(a) 3 + भुजा (b) भुजा × भुजा (c) भुजा + भुजा (d) 3 × भुजा

4. आयत का परिमाप = ...

(a) $2l + b$ (b) $2(l + b)$ (c) $l + 2b$ (d) $l \times b$

5. यदि एक समबाहु त्रिभुज की भुजा 4 सेमी है तो परिमाप =...............

(a) 8सेमी (b) 7सेमी (c) 12सेमी (d) 16सेमी

6. यदि एक आयत की लम्बाई 2.4 सेमी और चौड़ाई 1.9 सेमी है तो इसका परिमाप .... है।

(a) 4.3सेमी (b) 8.2सेमी (c) 4.2सेमी (d) 8.6सेमी

7. एक वर्ग का परिमाप 16 सेमी है तो इसकी भुजा .... होगी।

(a) 4सेमी (b) 64सेमी (c) 24सेमी (d) 32सेमी

8. एक आयत का परिमाप 50 सेमी है और इसकी लम्बाई 12 सेमी है तो इसकी चौड़ाई .... होगी।

(a) 38सेमी (b) 13सेमी (c) 62सेमी (d) 18सेमी

9. एक त्रिभुज की दो भुजाएं 4.8 सेमी और 3.9 सेमी है और परिमाप 12 सेमी है तो तीसरी भुजा .... होगी।

(a) 3.3सेमी (b) 4.3सेमी (c) 20.7सेमी (d) 3.7सेमी

10. सुमनदीप ने भुजा 125मीटर के वर्गाकार पार्क के तीन चक्कर लगाए। उस द्वारा तय की गई दूरी पता करो।

(a) 1.5कि.मी (b) 1500कि.मी (c) 500मी. (d) 375मी.

11. एक बंद समतल चित्र के बंद क्षेत्र के माप को इसका .... कहते हैं।

(a) क्षेत्र (b) वक्र (c) परिमाप (d) क्षेत्रफल

12. यदि एक आयत की लम्बाई x इकाइयाँ हैं तथा चौड़ाई 5 इकाइयाँ है तो इसका परिमाप .... है।

(a) 5x (b) 2 (x + 5) (c) 10x (d) 10 + x

13. एक दी गई आयत का क्षेत्रफल पता करो जिसकी लंबाई 16मी. और चौड़ाई 8मी. हो।

(a) 42 वर्ग मी. (b) 128 वर्ग मी. (c) 72 वर्ग मी. (d) 21 वर्ग मी.

14. एक आयत का क्षेत्रफल 144 वर्ग मी. है। यदि इसकी चौड़ाई 9मी. है तो इसकी लम्बाई पता करो।

(a) 16मी.^{2} (b) 12मी. (c) 16मी. (d) 18मी.

15. 1वर्ग मी. = ... वर्ग सेमी

(a) 100 (b) 10000 (c) 1000 (d) 1

16. एक वर्ग का क्षेत्रफल पता करो जिसकी भुजा 3.6 सेमी है।

(a) 14.4सेमी (b) 12.96सेमी (c) 1.29 वर्ग सेमी (d) 12.96 वर्ग सेमी.

17. एक वर्ग का परिमाप 68 मीटर है। इसका क्षेत्रफल पता करो।

(a) 289वर्ग मी. (b) 329वर्ग मी. (c) 279वर्ग मी. (d) 249वर्ग मी.

18. एक संगमरमर की टाइल का माप 25 सेमी × 25 सेमी है, एक फर्श जिसका माप 4मी.×3मी. है, को ढकने के लिए कितनी टाइलों की ज़रूरत होगी।

(a) 216 (b) 192 (c) 188 (d) 196

19. एक वर्ग का क्षेत्रफल कितना होगा यदि इसकी भुजा को दो गुनी कर दिया जाये।

(a) दुगुना (b) आधा (c) चार गुणा (d) कोई परिवर्तन नहीं आएगा

20. एक आयत का परिमाप पता करो जिसका क्षेत्रफल 234 वर्ग मी. और एक भुजा 13 सेमी है।

(a) 31सेमी (b) 62सेमी (c) 18सेमी (d) 24सेमी

सीखने के परिणाम

इस अध्याय के पूरा होने के बाद विद्यार्थी :

- परिमाप के संकल्प को जानने के योग्य हैं।
- अपने आस-पास के परिमाप को ढूँढने और इसकी व्यावहारिक जीवन में उपयोग करने के योग्य हैं।
- क्षेत्रफल के संकल्प को जानने में योग्य हैं।
- क्षेत्रफल के संकल्प की दैनिक जीवन में उपयोग करने के योग्य हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 12.1

1. (i) 36सेमी (ii) 28मी. (iii) 54सेमी (iv) 33सेमी (v) 44मी. (vi) 24सेमी
2. (i) 18सेमी (ii) 40मी. (iii) 13.6सेमी
3. 48सेमी 4. (i) 64सेमी (ii) 19.2मि.मी (iii) 500सेमी (iv) 180मी. (v) 156सेमी
5. (i) 70मी. (ii) 120m (iii) 136सेमी (iv) 50.2सेमी (v) 55सेमी
6. (i) 30सेमी (ii) 72सेमी (iii) 43.2सेमी

7. (i) 30सेमी (ii) 24मी. (iii) 72मी. (iv) 16.8मी. (v) 36.3सेमी

8. 19सेमी

9. (i) 15सेमी (ii) 23मि.मी (iii) 39सेमी

10. (i) 13सेमी (ii) 15सेमी (iii) 28सेमी

11. (i) 50मी. (ii) 25मी. (iii) 25सेमी

12. 106मी. **13.** ₹ 312 **14.** सिमर कम दूरी तय करेगा।

15. ₹ 4680 **16.** 2 (a + 5)

17. (i) परिमाप (ii) 4 (iii) लम्बाई, चौड़ाई (iv) परिमाप (v) 3

प्रश्नावली12.1

1. (i) 7 इकाइयाँ (ii) 6 इकाइयाँ (iii) 11 इकाइयाँ (iv) 12 इकाइयाँ (v) 13 इकाइयाँ

2. (i) 192 वर्ग सेमी (ii) 450 वर्ग सेमी (iii) 12150 वर्ग सेमी (iv) 6.3वर्ग सेमी (v) 15.2वर्ग सेमी

3. (i) 361 वर्ग सेमी (ii) 576 वर्ग सेमी (iii) 12.25 वर्ग सेमी
(iv) 6.76 वर्ग सेमी (v) 67.24 वर्ग सेमी

4. 18सेमी **5.** 25मी. **6.** ₹ 2304 **7.** 90सेमी

8. 625 वर्ग सेमी **9.** 74सेमी **10.** 800 **11.** ₹ 28125

12. 24 **13.** (i) 9 गुणा (ii) कोई प्रभाव नहीं (iii) एक चौथाई

14. (i) 32 वर्ग सेमी (ii) 36 वर्ग सेमी (iii) 78 वर्ग सेमी. (iv) 69 वर्ग इकाइयाँ

15. (i) 10000 (ii) 100 (iii) लम्बाई, चौड़ाई (iv) क्षेत्रफल (v) भुजा, भुजा

बहुवैकल्पिक प्रश्न

(1) a **(2)** b **(3)** d **(4)** b **(5)** c **(6)** d **(7)** a **(8)** b **(9)** a **(10)** a
(11) d **(12)** b **(13)** b **(14)** c **(15)** b **(16)** d **(17)** a **(18)** b **(19)** c **(20)** b

13

सममिति

(SYMMETRY)

उद्देश्य

इस अध्याय में आप सीखेंगे

(i) सममिति आक्रितियों के बारे में।

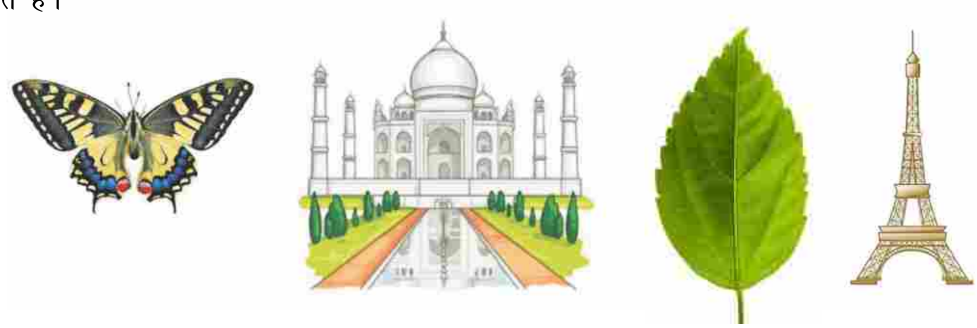
(ii) सममित रेखाओं के बारे में।

(iii) दैनिक जीवन में सममित आकृतियों की पहचान करनी।

(iv) विभिन्न वस्तुओं के प्रतिबिम्ब के बारे में।

13.1 भूमिका (Introduction)

सममिति, ज्यामिति की एक महत्वपूर्ण संकल्पना है जो प्रकृति में हर जगह देखने को मिलती है। इसकी प्रयोग इंजीनियरिंग, वास्तु कला मिट्टी के बर्तन और कई क्षेत्रों में किया जाता है। हम सममिति को फूलों, पत्तों, कीड़ों आदि में बहुत आसानी से देख सकते हैं। हम सममिति को चादर, शाल, स्मारकों जैसे ताजमहल, एफिलटावर आदि में भी देख सकते हैं।



जब किसी चित्र को अर्ध में से मोड़ा जाता है और दोनों अर्ध एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिंब होते हैं तो उसे चित्र के दोनों आधे भाग एक दूसरे से पूर्णत: मिलते हैं को सममिति में कहा जाता है।
यह प्रक्रिया सममिति कहलाती है।

13.2 सममित आकृति बनाना (Making Symmetric Figures)

13.2.1 इंक-ब्लॉट डेविल्स (Ink Blot Devils):-

कागज़ का एक टुकड़ा लीजिए। इसे आधे भाग से मोड़िए, स्याही की कुछ

बूँदों को आधे भाग पर डालिए। अब दोनों आधे भागों को दबाइए और उसे दुबारा खोलने के बाद बनी हुई आकृति को देखिए। क्या यह सममिति में है? अगर हां, तो इसकी सममिति रेखा पता कीजिए।

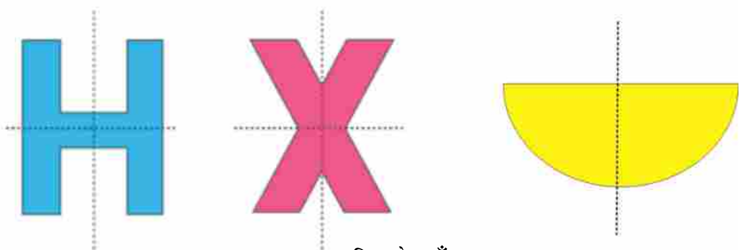
क्या कोई अन्य रेखा भी है, जो इसे दो बराबर भागों में बांटती है? ऐसे ही कुछ और प्रतिरूपों का प्रयास कीजिए।

13.2.2 स्याही धागा प्रतिरूप (Inked String Patterns)

एक कागज़ को आधे भाग से मोड़िए। इनमें से एक अर्ध भाग पर, एक स्याही या पेंट में भीगे हुए धागे को रखो, अब दोनों आधे भागों को इकट्ठे दबाइए। प्राप्त आकृति का अध्ययन कीजिए। क्या यह एक सममिति आकृति है ?

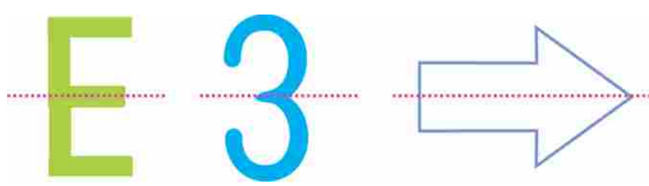
13.3 सममिति रेखाएँ (Lines of Symmetry)

अगर आप सममिति आकृतियों का अध्ययन करोगे तो आपको कुछ ऐसी रेखाएँ मिलेंगी जो इन आकृतियों को दो दर्पण प्रतिबिंब आकृतियों बाँट देती हैं। इन रेखाओं को सममिति रेखाएँ या सममित अक्ष कहते हैं।



सममित रेखाएँ

आकृति में चित्रों को ध्यान से देखिए इन चित्रों में सममिति रेखाएँ क्षैतिज (Horizontal) रूप में हैं। इस तरह की सममिति को क्षैतिज सममिति (horizontal Symmetry) कहते हैं।



क्षैतिज सममिति

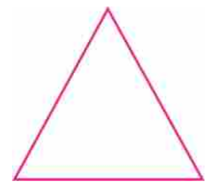
आकृति में चित्रों को ध्यान से देखिए, इन चित्रों में सममिति रेखाएँ ऊर्ध्वाधार (Vertical) रूप में है। इस तरह की सममिति को ऊर्ध्वाधर सममिति (Vertical Symmetry) या दर्पण प्रतिबिंब (Mirror Image) कहते हैं।

ऊर्ध्वाधर सममिति

भिन्न-भिन्न आकृतियों की कागज़ मोड़ने की विधि द्वारा सममिति रेखाओं की संख्या पता करना।

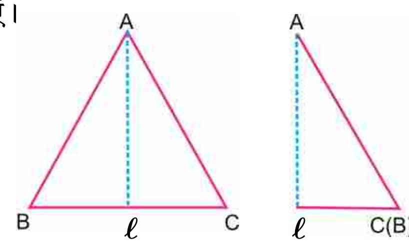
आवश्यक सामग्री : चार्ट या कागज या गत्ता आदि।

विधि : 1. समबाहु त्रिभुज



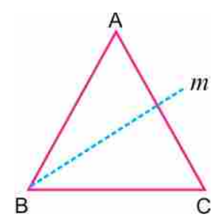
स्थिति I :

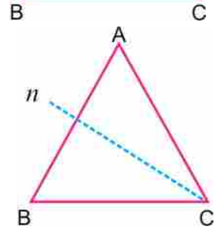
- चार्ट पेपर या कागज़ में से एक समबाहु त्रिभुज ΔABC काटो।
- अब त्रिभुज को इस तरह मोड़ें कि बिन्दु B और C संपाती हो जाएं।
- त्रिभुज को खोलने पर आप देखोगे कि त्रिभुज को मोड़ने से बनी सिलवट (रेखा) बिंदु A से गुज़रती है।
- यह सिलवट (रेखा) त्रिभुज को दो समान भागों में बाँटती है।
- इसलिए यहां A से गुज़रती हुई एक सममिति रेखा है।



स्थिति II

- अब त्रिभुज इस प्रकार मोड़ें कि बिंदु A और बिंदु C संपाती हो जाएं।
- कागज़ को खोलने पर आप देखोगें कि कागज़ को मोड़ने से बनी सिलवट (रेखा) बिंदु B से गुज़रती है।
- यह सिलवट (रेखा) त्रिभुज को दो समान भागों में बाँटती है।
- इस तरह यह, बिंदु B से गुज़रती हुई एक और सममिति रेखा है।

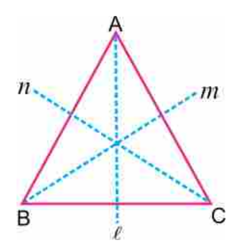




स्थिति III

- अब त्रिभुज इस प्रकार मोड़ों कि बिंदु A और B संपाती हो जाएं।
- कागज़ को खोलने पर आप देखोगें कि कागज़ को मोड़ने से बनी सिलवट (रेखा) बिंदु C से गुज़रती है।
- यह सिलवट (रेखा) त्रिभुज को दो समान भागों में बाँटती है।
- इस तरह यह, बिंदु C से गुज़रती हुई एक और सममिति रेखा है।

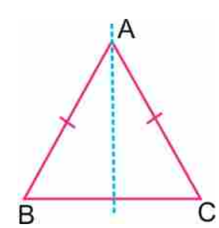
इस प्रकार एक समबाहु त्रिभुज में 3 सममिति रेखाएँ होती हैं।



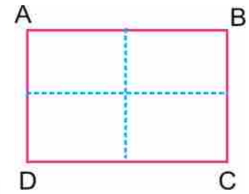
(2) समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle):-

उपरोक्त बताई गई प्रक्रिया दोहराने पर आप पाओगे कि समद्विबाहु त्रिभुज में सिर्फ एक सममिति रेखा होती है।

(जो बराबर भुजाओं के सार्व शिखर के बीच होती है)

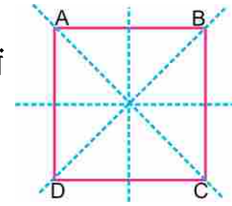


(3) आयत (Rectangle):-



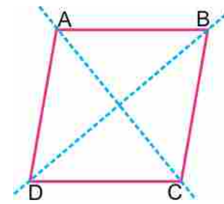
उपरोक्त बताई गई प्रक्रिया दोहराने पर आप पाओगे कि आयत में 2 सममित रेखाएँ होती हैं।

(4) वर्ग (Square):-



उपरोक्त बताई गई प्रक्रिया दोहराने पर आप पाओगे कि वर्ग में 4 सममित रेखाएँ होती हैं।

(5) समचतुर्भुज (Rhombus):-



उपरोक्त बताई गई प्रक्रिया दोहराने पर आप पाओगे कि समचतुर्भुज में 2 सममित रेखाएँ होती है।

*** समबहुभुजों के लिए सममित रेखाएँ (Lines of symmetry for regular polygons)**

एक बहुभुज रेखा खण्डों से बनी बंद आकृति होती है। त्रिभुज सबसे कम भुजाओं वाला बहुभुज है। (3 भुजाएँ)। एक समबहुभुज की सभी भुजाएँ और कोण बराबर होते है।

उदाहरण के लिए : (1) एक समबाहु त्रिभुज में 3 सममित रेखाएँ होती है।

(2) एक वर्ग में 4 सममित रेखाएँ होती है।

(3) एक समपंचभुज में 5 सममित रेखाएँ होती है।

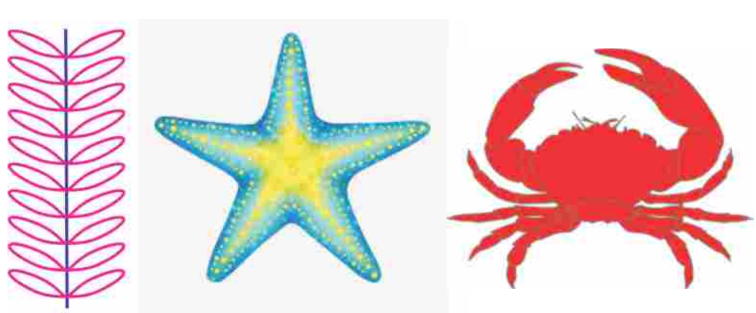
हम कह सकते हैं कि सभी समबहुभुज सममित आकृतियाँ हैं जिनकी सममित रेखाओं की गिनती उनकी भुजाओं की गिनती या शिखरों की गिनती के बराबर होती है।

सममिति- हर तरफ सममिति (Symmetry, symmetry everywhere!)

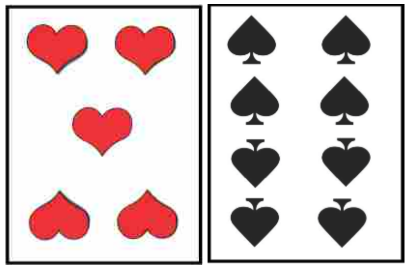
- आप प्रतिदिन बहुत से सड़क चिन्ह (Road Sign) देखते है। जिनमें सममिति रेखाएं होती है। यहां पर कुछ चिह्न दिए हुए हैं।

कुछ और सममित चिह्नों की पहचान करो और उन्हें बनाओ। उनकी सममित रेखाएँ भी खींचें।

- प्रकृति में ऐसी बहुत सी वस्तुएँ है जिनकी आकृति सममित है। इन्हें ध्यान से देखें।

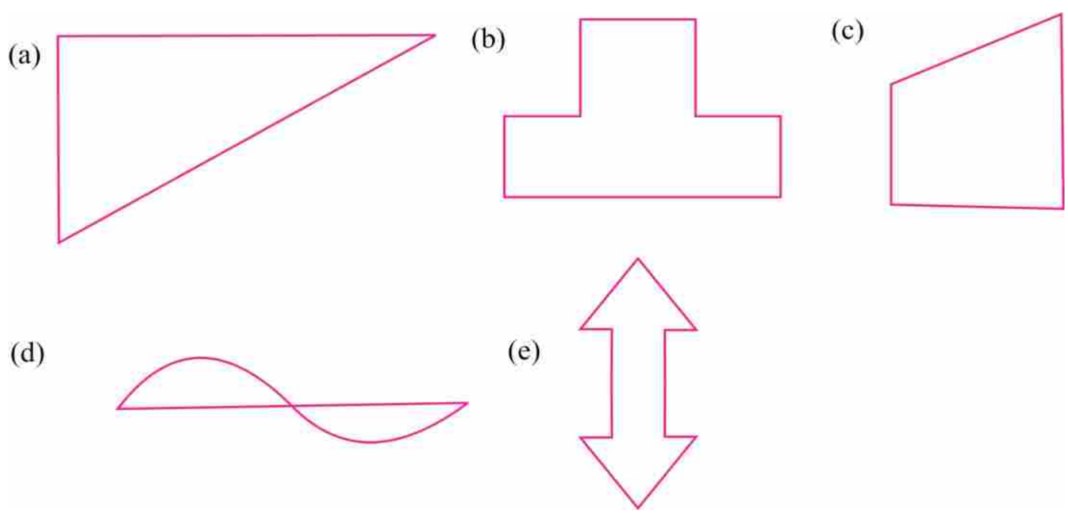


- ताश के पत्तों में दिए गए डिज़ाइन में भी सममित रेखाएँ होती है। नीचे दिए पत्तों में सममित रेखाएँ ढूँढ़ो।



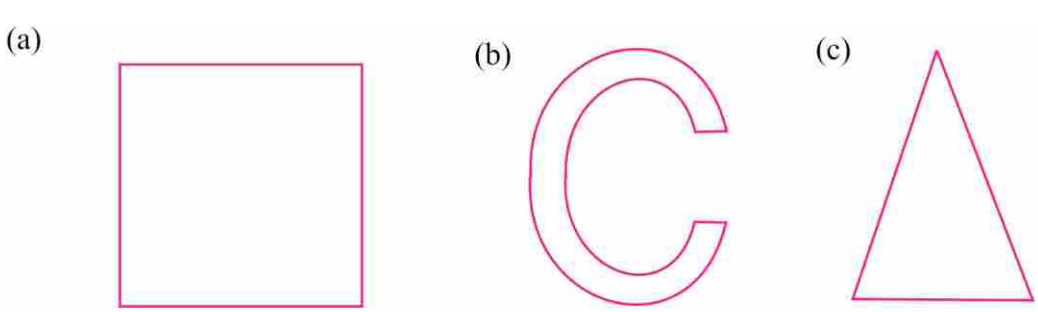
- एक कैंची का चित्र दिया हुआ है।
  इसकी कितनी सममित रेखाएँ हैं?

उदाहरण 1: **सममित आकृतियों की पहचान करोः-**

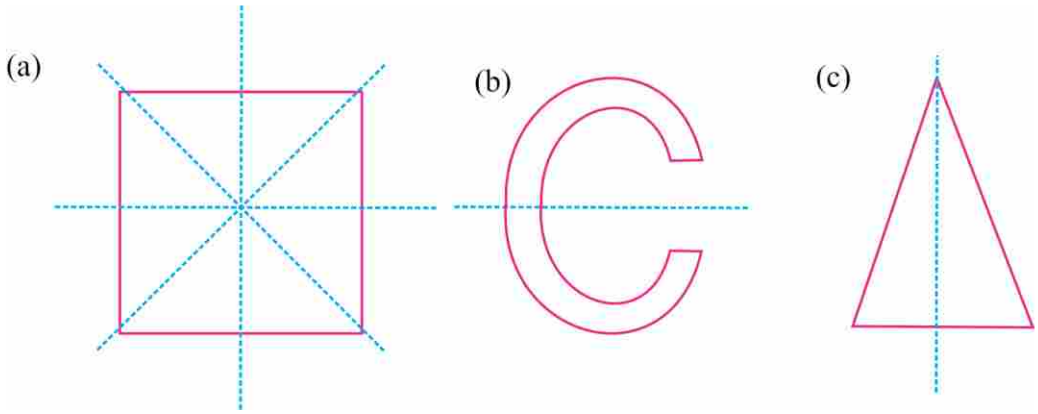


हल : आकृति (b) और (e) सममित हैं।

उदाहरण 2: **दी गई आकृतियों में सममित रेखाएँ खींचों।**

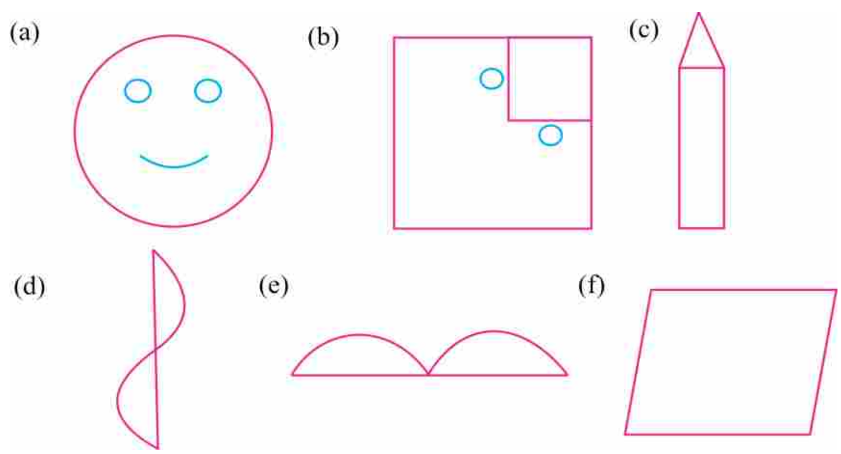


हल :



प्रश्नावली 13.1

1. सममित और असममित आकृतियों की पहचान कीजिए। सममित आकृतियों की सममित रेखाएँ भी खींचो।



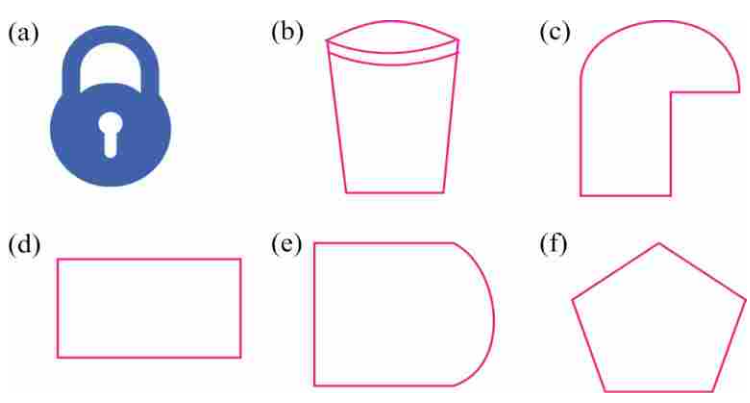
2. अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों में से किनमें:-

(i) कोई सममित रेखा नहीं है।

(ii) 1 सममित रेखा है।

(iii) 2 सममित रेखाएँ हैं।

3. नीचे दी गई आकृतियों में सममित रेखाओं की गिनती पता कीजिए।

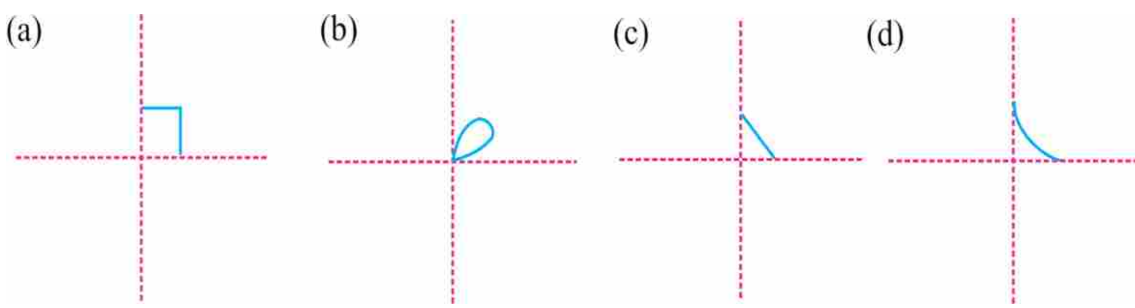


4. नीचे दी गई आकृतियों में सममित रेखाएँ खींचें।

(a) समचतुर्भुज (b) विषमबाहु त्रिभुज (c) समांतर चतुर्भुज

(d) आयत (e) वर्ग (f) समपंचभुज

5. नीचे दी गई आकृतियों को दो सममित रेखाओं द्वारा पूरा कीजिए।



6. एक त्रिभुज बनाइए जिसमें:–

(i) कोई सममित रेखा न हो।

(ii) एक सममित रेखा हो।

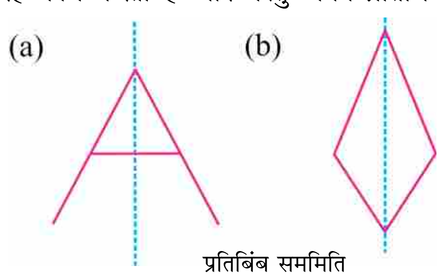
(iii) तीन सममित रेखाएँ हों।

7. अपने रोज़ाना जीवन में से किन्हीं तीन सममित वस्तुओं के नाम लिखें।

13.4 प्रतिबिंब सममिति (Reflection Symmetry):-

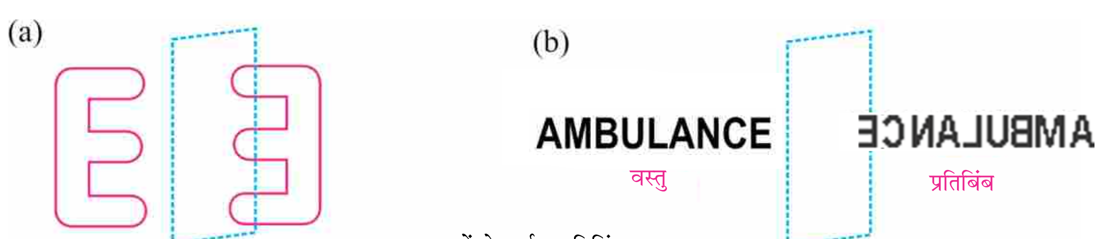
सममित रेखाओं वाली आकृतियों में दोनों समान भाग एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिंब होते हैं। अगर दर्पण को सममित रेखा पर रखा जाए तो आकृति का एक भाग का प्रतिबिंब पूरी तरह से दूसरे भाग पर पड़ेगा। तब यह रेखा दर्पण रेखा बन जाएगी।

अगली आकृतियों को देखें। हम बिंदुकित रेखा को दर्पण मान लेते हैं और प्रत्येक भाग दूसरे का दर्पण प्रतिबिंब हैं। यहं बिंदु रेखा, सममित रेखा की तरह काम करती है और वस्तु अपने प्रतिबिम्ब के साथ सममित आकृति बनाती है।



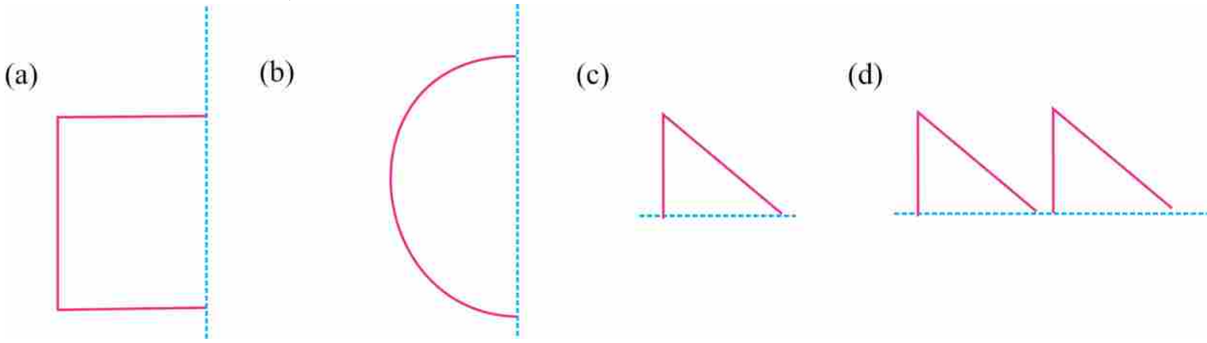
प्रतिबिंब सममिति

प्रतिबिंब सममिति में एक भाग वस्तु और दूसरा भाग उसका प्रतिबिंब है और वे दर्पण रेखा (सममित रेखा) से समान दूरी पर स्थित है।

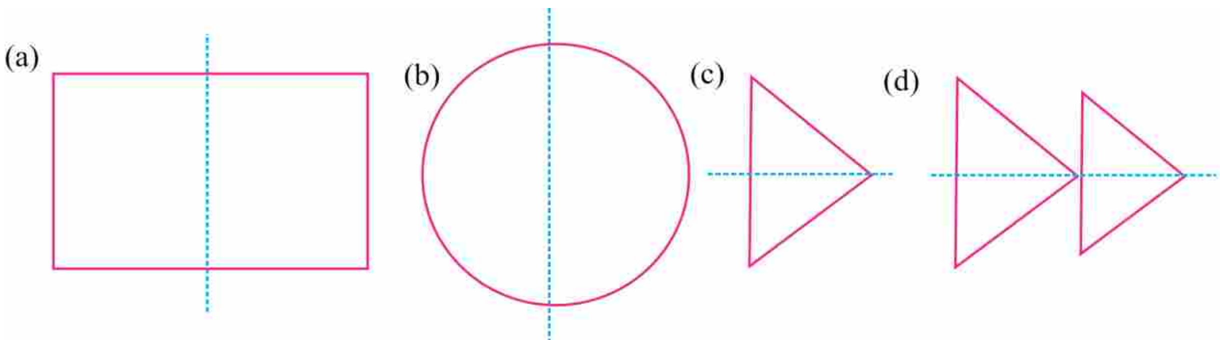


कुछ वस्तुओं के दर्पण प्रतिबिंब

उदाहरण 3: **दी गई आकृतियों को बिंदुकित रेखा (दर्पण रेखा) के साथ प्रतिबिंब दिखाते हुए पूरा कीजिए।**



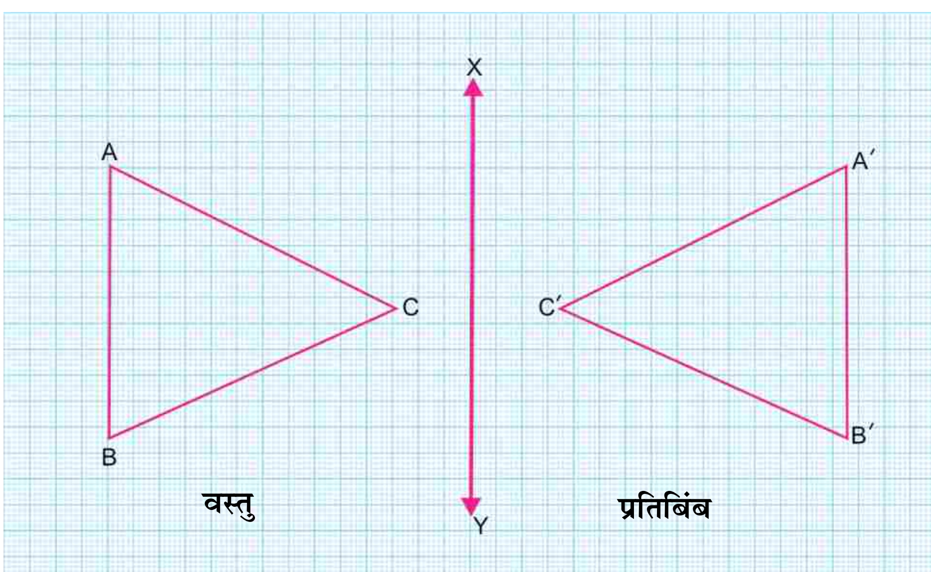
हल : दी गई आकृतियों के प्रतिबिंब नीचे दिए गए हैं।



* **वर्गांकित पेपर का प्रयोग करते हुए प्रतिबिंब बनाना।**

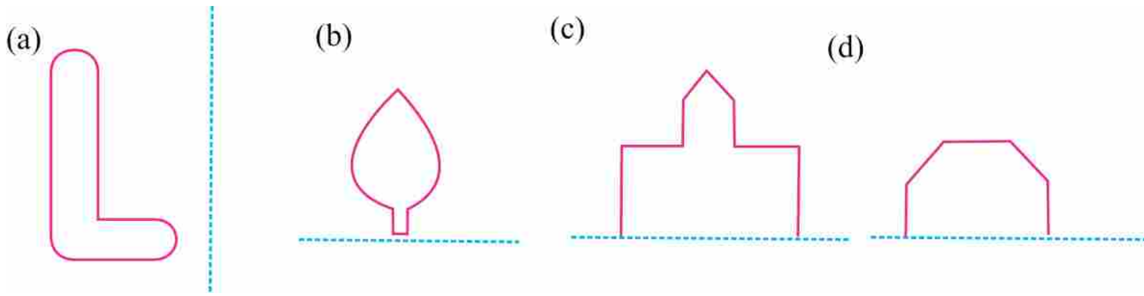
हम वर्गांकित पेपर का प्रयोग करक एक आकृति का प्रतिबिंब बना सकते हैं।

एक वर्गांकित पेपर लो। एक त्रिभुज ΔABC बनाओ। अब ΔABC का प्रतिबिंब $\Delta A'B'C'$ बनाओ जहां A और A', B और B', C और C' सममित रेखा से समान दूरी पर हैं।

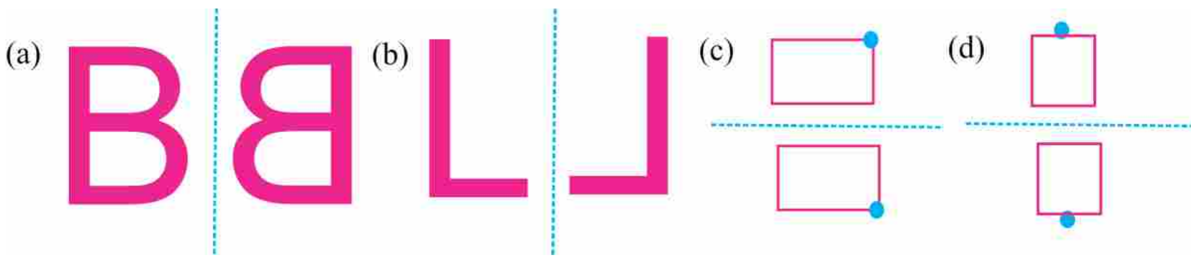


प्रश्नावली 13.2

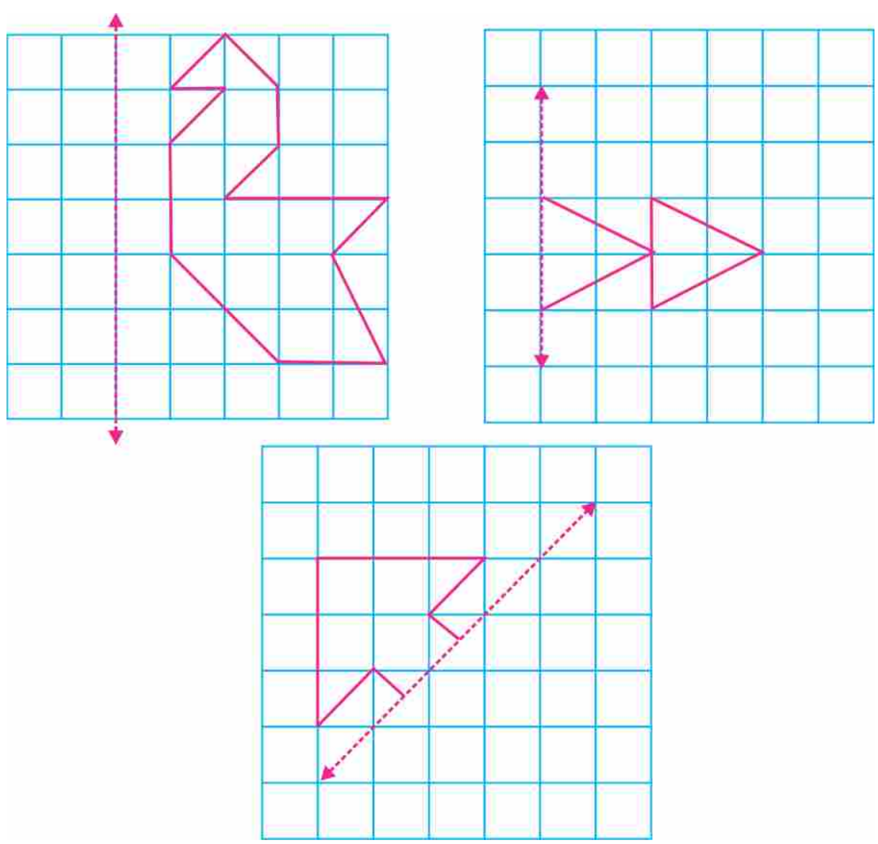
1. नीचे दी गई आकृतियों के बिंदुकित रेखा अनुसार प्रतिबिंब बनाओ।



2. सही प्रतिबिंब के लिए हाँ और गलत प्रतिबिंब के लिए नहीं लिखें।



3. दी गई आकृतियों का अनुरेखण (Trace) वर्गांकित पेपर पर कीजिए और बिंदुकित रेखा अनुसार इनका प्रतिबिंब पूरा कीजिए।



* प्रमुख तथ्य

- एक सममित रेखा आकृति को दो समान भागों में बाँटती है।
- अगर किसी वस्तु या आकृति के दोनों भाग एक समान है तो इसे सममित कहा जाता है।
- एक सममित आकृति की एक से अधिक सममित रेखाएँ हो सकती हैं।
- एक समबहुभुज की इसकी भुजाओं या शिखरों की संख्या के बराबर सममित रेखाएँ होती हैं।
- एक सममित रेखा और प्रतिबिंब सममिति आपस में जुड़े होते हैं।

बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. एक समबाहु त्रिभुज में .... सममित रेखाएँ होती हैं।

(a) 1 (b) 3 (c) 2 (d) 4

2. एक आयत में ....सममित रेखाएँ होती हैं।

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 1

3. एक वर्ग में .... सममित रेखाएँ होती हैं।

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

4. एक समद्धिबाहु त्रिभुज में .... सममित रेखा/रेखाएँ होती हैं।

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

5. एक वृत्त में .... सममित रेखाएँ होती हैं।

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) असंख्य

6. एक समचतुर्भुज में .... सममित रेखाएँ होती हैं।

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

7. एक समषटभुज में .... सममित रेखाएँ होती हैं।

(a) 3 (b) 2 (c) 6 (d) 5

8. ARUN नाम का दर्पण प्रतिबिंब हैं:-

(a) NUSA (b) ИUЯA (c) NURA (d) ARUN

सीखने के परिणाम

इस अध्याय के पूरा होने के बाद विद्यार्थीः

- सममित आकृतियों की पहचान करने के योग्य है।
- विभिन्न आकृतियों की सममिति रेखाएँ खींचने के योग्य है।
- दैनिक जीवन में सममित डिज़ाइन को पहचानने के योग्य है।
- दर्पण के प्रतिबिंब के बारे में जानने के योग्य है।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 13.1

1. (a) सममित (b) सममित (c) असममित

(d) असममित (e) सममित (f) असममित

2. (i) F, G, J, L, N, P, Q, R, S, Z

(ii) A, B, C, D, E, K, M, T, U, V, W, Y

(iii) O, X, H, I

3. (a) 1 (b) 1 (c) 0 (d) 2 (e) 1

(f) 1

प्रश्नावली 13.2

2. (a) हाँ (b) हाँ (c) नहीं (d) हाँ

बहुवैकल्पिक प्रश्न

(1) b **(2)** a **(3)** d **(4)** a **(5)** d **(6)** b **(7)** c **(8)** b

Y9P2Y1

14

आँकड़ों का प्रबंधन

(DATA HANDLING)

उद्देश्य

इस अध्याय में आप सीखेंगे

(i) आँकड़ों का संग्रह करना तथा व्यवस्थित करना।

(ii) आँकड़ों को चित्रालेख (Pictograph) के द्वारा दर्शाना।

(iii) चित्रालेख और दंड आलेख (Bar Graph) की व्याख्या करना।

(iv) दैनिक जीवन की परिस्थितियों में आलेखों का प्रयोग करना।

14.1 भूमिका (Introduction)

अपने जीवन में हम अनेक बार ऐसी परिस्थितियों से गुज़रते हैं जब हमें आँकड़ों के आधार पर निर्णय लेने पड़ते हैं। हमारे निर्णय इकट्ठे किए गए तथ्यों के संग्रह, संगठन, विश्लेषण और व्याख्या पर आधारित होते हैं।

आपने अकसर अपने अध्यापक को प्रतिदिन कक्षा में उपस्थित विद्यार्थियों की हाज़िरी (उपस्थिति)का अभिलेखन करते या हर टेस्ट या परीक्षा के बाद आपके द्वारा प्राप्त अंकों का अभिलेखन करते देखा होगा।

14.2 आँकड़ों का संग्रह (Collection of Data)

किसी भी जांच का प्रारंभिक चरण आँकड़ों का संग्रह करना है। यह संख्याओं, राशियों तथा या चिह्नों का संग्रह हो सकता है। इस प्रकार संख्यात्मक मूल्यों के रूप में इकट्ठे किए गए तथ्यों के संग्रह को आँकड़े (Data) कहा जाता है जो अर्थपूर्ण सूचना देते हैं। आँकड़े दो प्रकार के होते हैं:-

प्राथमिक आँकड़े (Primary Data) : जो आँकड़े स्त्रोत से प्रत्यक्ष रूप से संग्रहित किए जाएं उन्हें प्राथमिक आँकड़े कहते हैं। उदाहरण के लिए आपके अध्यापक द्वारा आपकी उपस्थिति का अभिलेखन प्राथमिक आँकड़े है।

सहायक आँकड़ें (Secndary Data): जब आँकड़ों का किसी बाहरी स्त्रोत से संग्रहण किया जाए तो उन्हें सहायक आँकड़े कहते हैं। उदाहरण के लिए अखबारों, पत्रिकाओं और इंटरनेट आदि से एकत्रित किए गए आँकड़े।

एक उदाहरण लेते हैं।

एक अध्यापक छठी कक्षा के 25 विद्यार्थियों की मनपसंद मिठाइयों के आँकड़े एकत्रित करता है जो इस प्रकार है:

लड्डू, बर्फी, लड्डू, जलेबी, रसगुल्ला, लड्डू, जलेबी, जलेबी, लड्डू, बर्फी, रसगुल्ला, रसगुल्ला, बर्फी, जलेबी, लड्डू, लड्डू, बर्फी, बर्फी, जलेबी, रसगुल्ला, रसगुल्ला, बर्फी, लड्डू , जलेबी, जलेबी।

अध्यापक विभिन्न मिठाइयां पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या जानना चाहता है। वह एक-एक करके गिनना शुरू करेगा। इस प्रक्रिया में बहुत समय लगेगा और उसे हर बार हर मिठाई के लिए यह प्रक्रिया दोहरानी होगी,

अगर यहाँ 100 विद्यार्थी हो तो यह प्रक्रिया मुश्किल हो जाती है। इस प्रक्रिया को आसान बनाने के लिए हम आँकड़ों को विभिन्न प्रकार से संगठित करते है।

14.3 आँकड़ों का संगठन (Organisation of Data)

आँकड़ों का संगठन आँकड़ों में से अर्थपूर्ण निष्कर्ष प्राप्त करने में सहायक होता है। उपरोक्त आँकड़ों को अर्थपूर्ण बनाने के लिए हमें इन्हें सारणी रूप (Tabular Form) में क्रमबद्ध करना होगा।

जब प्रेक्षणों की गिनती अधिक हो तो न्यूनतम गलतियों के लिए और सारणी को आसान बनाने के लिए हम मिलान चिह्नों का प्रयोग कर सकते है:

मिलान चिह्न हमेशा पाँच पाँच के समूह में अभिलिखित होते हैं। पाँचवाँ मिलान चिह्न पहले चार मिलान चिह्नों के ऊपर एक विकर्ण के रूप में खींचा जाता है जिससे पाँच मिलान चिह्नों का समूह बनता है। उदाहरण के लिए :- 1 = |, 2 = ||, 3 = |||, 4 = ||||, 5 = 𝍸, 6 = 𝍸 |

मिठाई का नाम	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
लड्डू	𝍸 ||	7
बर्फी	𝍸 |	6
जलेबी	𝍸 ||	7
रसगुल्ला	𝍸	5

यह आँकड़ों के समझने और उनका विश्लेषण करना का बेहतर तरीका है।

आओ! कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1. **एक गणित की परीक्षा में 40 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक नीचे दिए गए हैं। इन अंकों को मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए सारणी में दर्शाओ।**

8	1	3	7	6	5	5	4	4	2
4	9	5	3	7	1	6	5	2	7
7	3	8	4	2	8	9	5	8	6
7	4	5	6	9	6	4	4	6	6

(i) पता करो कितने विद्यार्थियों ने 7 या उससे अधिक अंक प्राप्त किए हैं?

(ii) कितने विद्यार्थियों ने 4 से कम अंक प्राप्त किए हैं?

हल :

अंक	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
1	||	2
2	|||	3
3	|||	3
4	𝍸 ||	7
5	𝍸 |	6
6	𝍸 ||	7
7	𝍸	5
8	||||	4
9	|||	3

(i) 7 या उससे अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 7 = 5 + 4 + 3 = 12

(ii) 4 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 4 = 2 + 3 + 3 = 8

प्रश्नावली 14.1

1. छठी कक्षा के विद्यार्थियों की ऊँचाई (सेमी में) नीचे दशाई गई है। मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए आँकड़ों को सारणी रूप में व्यवस्थित कीजिए।
116, 117, 125, 116, 118, 120, 125, 121, 124, 117, 116, 115, 119, 121, 124, 117, 116, 119, 123, 120, 116, 121, 119, 116, 118, 125, 116, 119, 123, 122, 121, 120

2. 25 विद्यार्थियों का भार (कि.ग्रा में) नीचे दिया गया है।
25, 34, 32, 28, 25, 28, 34, 32, 32, 34, 32, 25, 28, 34, 34, 28, 28, 25, 32, 33, 32, 34, 33, 32, 25
मिलान चिह्नों का प्रयोग करके आँकड़ों को सारणी रूप में कीजिए।

3. एकता से उसकी छठी कक्षा के विद्यार्थियों के जूतों के माप के आँकड़े एकत्रित करने के लिए कहा गया। उसका परिणाम इस प्रकार नीचे दिया गया है।

5	4	7	5	6	7	6	5	6	6	5
4	5	6	8	7	4	6	5	6	4	6
5	7	6	7	5	7	6	4	8	7	

मिलान चिह्नों का प्रयोग करके आँकड़ों को सारणी रूप में व्यवस्थित कीजिए।

4. श्वेता ने एक पासा 40 बार फेंका और हर बार प्राप्त संख्या का नोट किया जो कि नीचे दिखाई दी गई है।

1	3	5	6	6	3	5	4	1	6
2	5	3	4	6	1	5	5	6	1
1	2	2	3	5	2	4	5	5	6
5	1	6	2	3	5	2	4	1	5

मिलान चिह्नों का प्रयोग करके आँकड़ों को दर्ज करते हुए सारणी बनाओ। वह संख्या पता करें जो प्राप्त हुई:
(i) सबसे कम बार
(ii) सबसे ज्यादा बार

5. छठी कक्षा के विद्यार्थियों ने गणित की परीक्षा दी और 10 में से अंक प्राप्त किए जो कि नीचे दिए गए है:

3	7	6	2	5	9	10	8	7	1
8	4	3	5	6	7	8	7	6	5
3	6	9	8	7	5	9	6	7	8

(i) मिलान चिह्नों का प्रयोग करके आँकड़े संगठित कीजिए।
(ii) कितने विद्यार्थियों के 6 या उससे कम अंक है?
(iii) कितने विद्यार्थियों के 7 से ज़्यादा अंक है?

14.4 आंकड़ों का निरूपण (Representation of Data)

आँकड़ों का निरूपित करने के बहुत से तरीके हैं जैसे चित्रालेख, दंड आलेख आदि। यह आलेख हमें आँकड़ों के उपयुक्त निरूपण में सहायता करते हैं।

14.4.1 चित्रालेख (Pictograph)

चित्रालेख विभिन्न सूचनाओं और घटनाओं का मिलान चित्रों और प्रतीकों का प्रयोग करके आँकड़ों का निरूपण करने की एक विधि है। चित्रों को देखने पर आँकड़ों को समझने और उनका विश्लेषण करने में मदद मिलती है।

उदाहरण 2: **अप्रैल 2018 के पहले हफ्ते में 21 विद्यार्थियों की कक्षा के अनुपस्थित विद्यार्थियों का चित्रालेख दिया गया है।**

दिन	अनुपस्थित विद्यार्थियों की संख्या = 1 अनुपस्थित
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	
वीरवार	
शुक्रवार	
शनिवार	

(i) किस दिन अधिकतम संख्या में विद्यार्थी अनुपस्थित थे?

(ii) हफ्ते में कुल कितने विद्यार्थी अनुपस्थित थे?

(iii) किस दिन न्यूनतम संख्या में विद्यार्थी अनुपस्थित थे?

हल : (i) बुधवार के आगे 6 चित्र हैं। इसलिए अधिकतम संख्या में विद्यार्थी बुधवार को अनुपस्थित थे।

(ii) कुल 21 चित्र दिए गए हैं। इसलिए हफ्ते में अनुपस्थित विद्यार्थियों की संख्या 21 थी।

(iii) वीरवार के सामने 1 चित्र हैं। इसलिए न्यूनतम संख्या में विद्यार्थी वीरवार को अनुपस्थित थे।

उदाहरण 3. **पाँच गाँवों में कुत्तों की संख्या नीचे दी गई है।**

गाँव A : 30   **गाँव D = 40**

गाँव B : 20   **गाँव E = 60**

गाँव C : 50

इन कुत्तों का (= 10 कुत्ते) प्रतीक प्रयोग करते हुए एक चित्रालेख तैयार करो और इन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रश्नः

(i) गाँव E के कुत्तों को दर्शाने के लिए कितने प्रतीकों का प्रयोग किया गया है?

(ii) किस गाँव में सबसे अधिक कुत्ते हैं?

हल : (लिए गए) पैमाने की मदद से हम नीचे दिखाया चित्रालेख खींच सकते हैं।

(i) गाँव E के कुत्तों के लिए 6 प्रतीक है।

(ii) गाँव E में सबसे ज्यादा कुत्ते हैं?

उदाहरण 4. **एक साल के पहले पाँच महीनों में एक स्कूल के लिए खरीदे गए बिजली के बल्बों की संख्या इस प्रकार है।**

जनवरी - 30, फरवरी - 25 मार्च - 40

अप्रैल - 15 मई - 35

उपरोक्त सूचना को चित्रालेख के द्वारा दर्शाएं।

हल : = 10 बल्ब का पैमाना लेने पर हम नीचे दिया चित्रालेख बना सकते है।

प्रश्नावली 14.2

1. एक इलाके में रहने वाले लोगों द्वारा फ्रिजों के रंगों की पसंद चित्रालेख द्वारा दिखाई गई है।

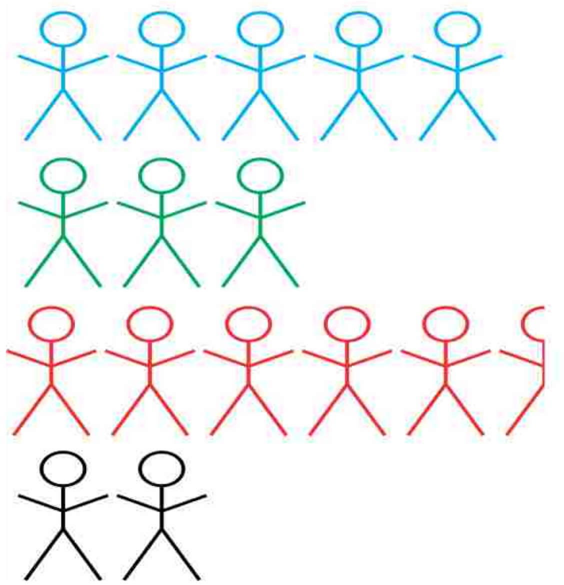
रंग — **लोगों की संख्या** (= 10 लोग)

नीला

हरा

लाल

सफेद



(i) नीला रंग पसंद करने वाले लोगों की संख्या कितनी है?

(ii) कितने लोगों ने लाल रंग पसंद किया?

2. एक स्कूल में छठी कक्षा के 30 विद्यार्थियों पर एक सर्वेक्षण किया गया। उनके द्वारा स्कूल जाने के लिए प्रयोग किए जाने वाले यातायात के साधनों के आँकड़े चित्रालेख द्वारा दर्शाए गए हैं।

सफर के साधन — **विद्यार्थियों की संख्या** (=10 विद्यार्थी)

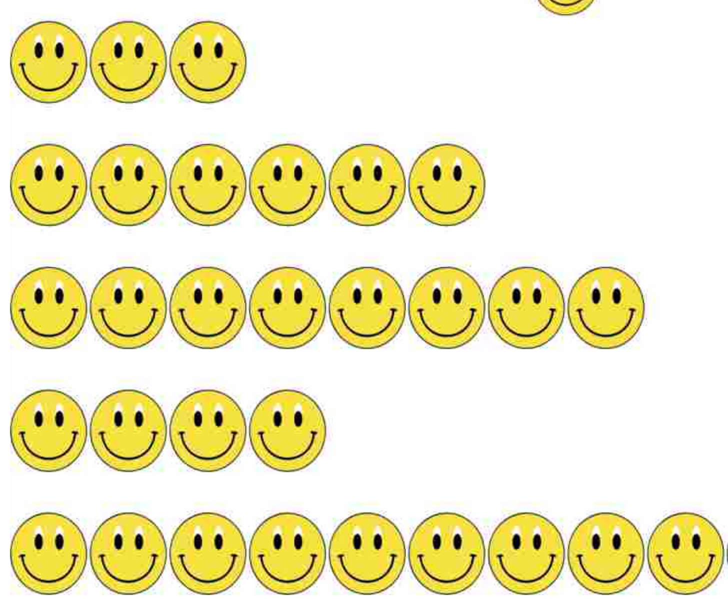
कार

सरकारी बस

स्कूल बस

साइकिल

पैदल

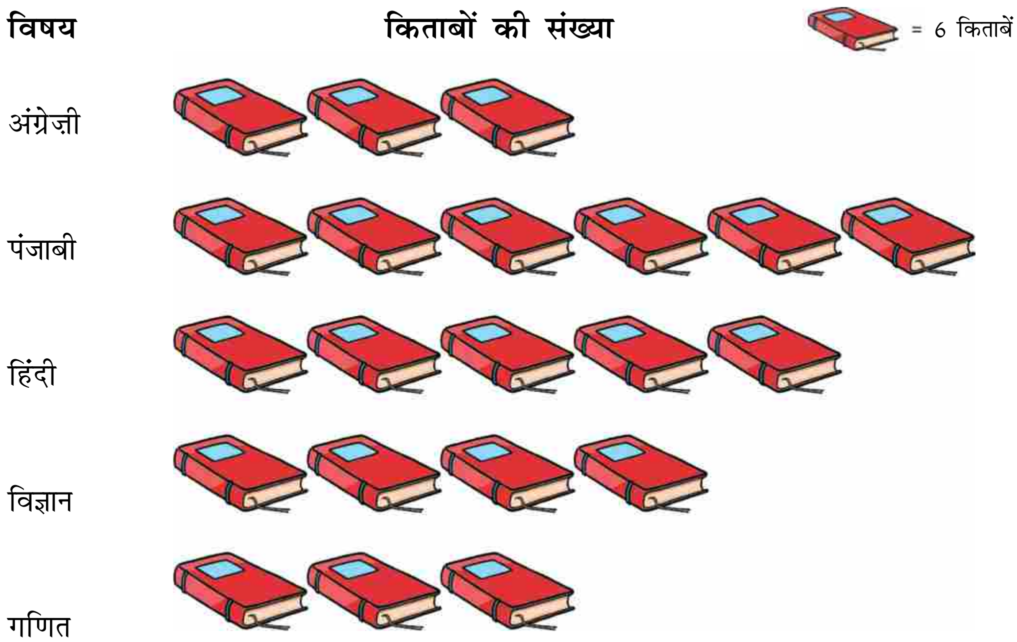


इस चित्रालेख को देखो और इन प्रश्नों के उत्तर दो–

(i) कितने विद्यार्थी पैदल स्कूल आते हैं?

(ii) यातायात के किस साधन से सबसे कम विद्यार्थी स्कूल आते हैं?

3. एक स्कूल की लाइब्रेरी में विभिन्न विषयों की रखी गई किताबों को दर्शाने का चित्रालेख दिया गया है।



(i) लाइब्रेरी में गणित की कितनी किताबें हैं?

(ii) कौन सी किताबों की संख्या सबसे कम है?

(iii) कौन सी किताबों की संख्या सबसे अधिक है?

4. कक्षा VI से X तक डैस्कों की संख्या नीचे दी गई है।

कक्षा	VI	VII	VIII	IX	X
डैस्कों की संख्या	30	50	40	35	45

चित्रालेख बनाइए।

5. अर्ध–वार्षिक परीक्षा में एक विद्यार्थी द्वारा प्रत्येक विषय में 100 में से प्राप्त अंक नीचे दिए गए हैं।

विषय	अंग्रेज़ी	हिंदी	गणित	विज्ञान	सामाजिक विज्ञान
प्राप्त अंक	70	85	80	65	75

एक चित्र=10 अंक का पैमाना लेकर एक चित्रालेख बनाएं और इन प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

(i) किस विषय में अधिकतम अंक प्राप्त किए गए हैं?

(ii) किस विषय में अधिक मेहनत करने की आवश्यकता है?

(iii) अधिकतम और न्यूनतम अंकों का अंतर कितना है?

नीचे दी गई सूचना को पढ़िए और दिए गए प्रश्नों के सही उत्तर चुनिए।

6. हरजीत द्वारा विभिन्न विषयों में प्राप्त अंक इस प्रकार है:

विषय	पंजाबी	अंग्रेज़ी	हिंदी	गणित	विज्ञान
अंक	43	40	45	48	37

(i) किस विषय में हरजीत ने अधिकतम अंक प्राप्त किए?
(a) विज्ञान (b) हिंदी (c) गणित (d) पंजाबी

(ii) किस विषय में हरजीत ने न्यूनतम अंक प्राप्त किए?
(a) विज्ञान (b) हिंदी (c) गणित (d) पंजाबी

(iii) गणित में कितने अंक प्राप्त किए?
(a) 40 (b) 45 (c) 48 (d) 48

(iv) अंग्रेज़ी में कितने अंक प्राप्त किए?
(a) 40 (b) 45 (c) 48 (d) 43

(v) कितने विषयों में उसने 45 से अधिक अंक प्राप्त किए?
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 1

7. एक दुकानदार द्वारा अलग-अलग दिनों में बेची गई किताबों की संख्या नीचे दर्शायी गई है:

दिन	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	वीरवार	शुक्रवार	शनिवार
बिकी हुई किताबों की संख्या	250	280	190	175	220	300

(i) किस दिन बिक्री अधिकतम हुई?
(a) शनिवार (b) शुक्रवार (c) वीरवार (d) बुधवार

(ii) किस दिन बिक्री न्यूनतम हुई?
(a) शनिवार (b) शुक्रवार (c) वीरवार (d) बुधवार

(iii) शुक्रवार को कितनी किताबें बिकी?
(a) 280 (b) 220 (c) 175 (d) 300

(iv) मंगलवार को कितनी किताबें बिकीं?
(a) 220 (b) 175 (c) 280 (d) 300

(v) शनिवार को कितनी किताबें मिली?
(a) 220 (b) 175 (c) 280 (d) 300

14.4.1 दंड आलेख (Bar Graph)

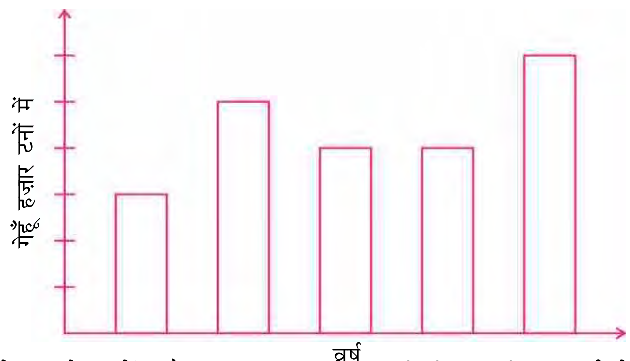
हमने यह देखा है कि चित्रालेख बनाने में बहुत समय लगता है। जब आँकड़ों को अर्धचित्र या एक चौथाई चित्र के द्वारा दर्शाया जाता है जहां आँकड़े 4,51,87 आदि कोई भी संख्या हो तो प्रत्येक व्यक्ति द्वारा चित्रालेख का विश्लेषण अलग-अलग होता है। इस प्रकार के आँकड़ों का चित्रालेख बहुत मुश्किल होता है।

इसलिए हम आँकड़ों का निरूपण साधारण रूप में दर्शाने के लिए एक अन्य तरीके का प्रयोग करते हैं। जिसे दंड आलेख कहते है। दंड आलेख द्वारा सही जानकारी दी जाती है। आपने अखबार, मैगज़ीन आदि में दंड आलेख का प्रयोग अकसर देखा है।

दंड आलेख बराबर चौड़ाई वाली दंडों के चार्ट के रूप में होता है जहां दंड की लम्बाई दिए गए मूल्यों के अनुसार का अनुपात में होती हैं।

दंड क्षैतिज़ या ऊर्ध्वाधर रूप में हो सकती हैं और इनके बीच में समान दूरी होती हैं।

उदाहरण 5: **नीचे दिए दंड आलेख में सरकार द्वारा 2013-17 वर्ष के दौरान खरीदे गए गेहूँ की मात्रा दिखाई गई है?**



दंड आलेख को पढों और अपना अवलोकन लिखिए। किस वर्ष में:-

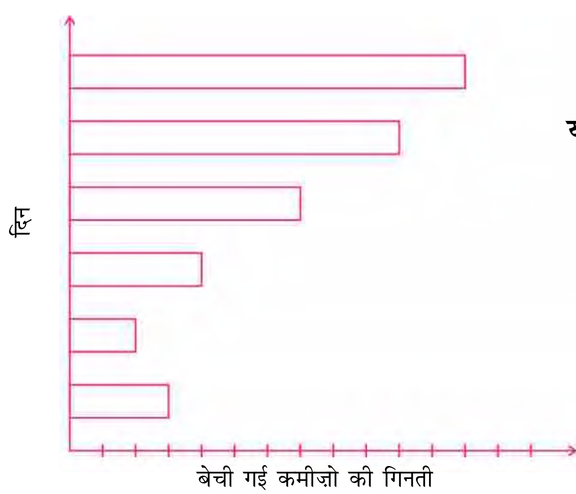
(i) गेहूँ का सबसे ज़्यादा उत्पादन हुआ?

(ii) गेहूँ का सबसे कम उत्पादन हुआ?

हल : (i) यह देखा गया है कि वर्ष 2017 में गेहूँ का अधिकतम उत्पादन हुआ।

(ii) यह देखा गया है कि वर्ष 2013 में गेहूँ का न्यूनतम उत्पादन हुआ।

उदाहरण 6: **एक रेडीमेड कपड़ों की दुकान में कमीज़ों की सोमवार से शनिवार तक की बिक्री को दंड आलेख द्वारा दर्शाया गया है।**



1 इकाई

यूनिट लम्बाई = 5 कमीजे

नीचे दिए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(i) उपरोक्त दंड आलेख क्या सूचना दे रहा है?

(ii) कमीज़ों की संख्या को दर्शाती क्षैतिज रेखा का क्या पैमाना लिया गया है?

(iii) किस दिन कमीज़ों की अधिकतम बिक्री हुई? उस दिन कितने कमीज़ें बेची गईं?

(iv) किस दिन कमीज़ों की न्यूनतम बिक्री हुई?

(v) वीरवार को कितनी कमीज़ें बेची गईं?

हल : (i) उपरोक्त दंड आलेख अलग–अलग दिनों में कमीज़ों की बिक्री को दर्शा रहा है।

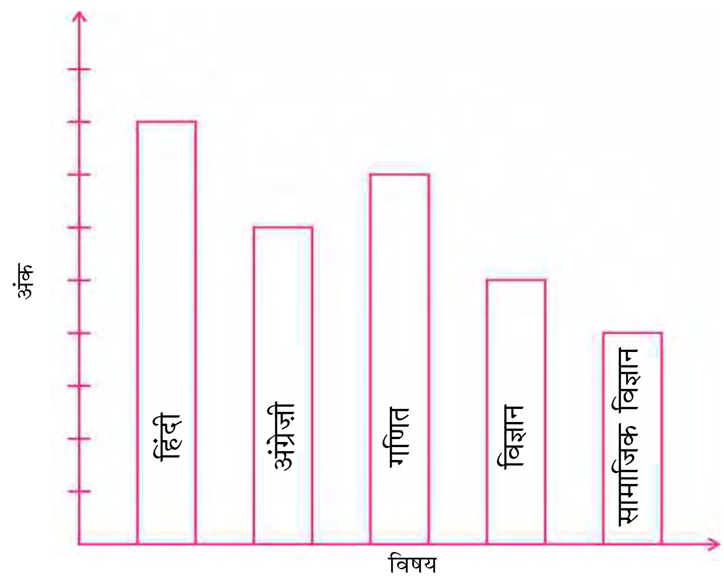
(ii) 1 इकाई लम्बाई = 5 कमीज़ें

(iii) शनिवार को कमीज़ों की अधिकतम बिक्री हुई। शनिवार को $60 \times 5 = 300$ कमीज़ें बेची गई।

(iv) मंगलवार को न्यूनतम संख्या में कमीज़ें बेची गईं।

(v) वीरवार को $30 \times 5 = 150$ कमीज़ें बेची गईं।

उदाहरण 7: **अनीज़ा द्वारा अर्धवार्षिक में विभिन्न विषयों में प्राप्त अंकों के दंड आलेख को देखो।**



दिए गए प्रश्नों के उत्तर दो:-

(i) दंड आलेख क्या सूचना देता है?

(ii) प्रत्येक विषय का नाम और उसमे प्राप्त अंक लिखो।

(iii) किस विषय में अनीज़ा ने अधिकतम अंक प्राप्त किए?

(iv) किस विषय में अनीज़ा ने न्यूनतम अंक प्राप्त किए?

हल : (i) दंड आलेख अनीज़ा द्वारा विभिन्न विषयों में प्राप्त अंकों की सूचना देता है।

(ii) हिंदी = 80, अंग्रेज़ी = 60, गणित = 70, विज्ञान = 50, सामाजिक विज्ञान = 40

(iii) उसने अधिकतम अंक हिंदी में प्राप्त किए।

(iv) उसने न्यूनतम अंक सामाजिक विज्ञान में प्राप्त किए।

दंड आलेख की रचना (Construction of a Bar Graph)

दंड आलेख बनाने के लिए हम वर्गांकित कागज़ पर एक दूसरे पर लम्ब दो रेखाएं खींचते हैं। क्षैतिज रेखाओं को x-अक्ष और ऊर्ध्वाधर रेखा को y-अक्ष कहा जाता है। अगर आयताकार दंडों को क्षैतिज रेखा (x–अक्ष) पर बनाया

जाता है तो पैमाने की दंडों की ऊँचाई को y-अक्ष के साथ दर्शाया जाता है। इसी प्रकार विपरीत रूप से भी यही विधि अपनायी जाती है।

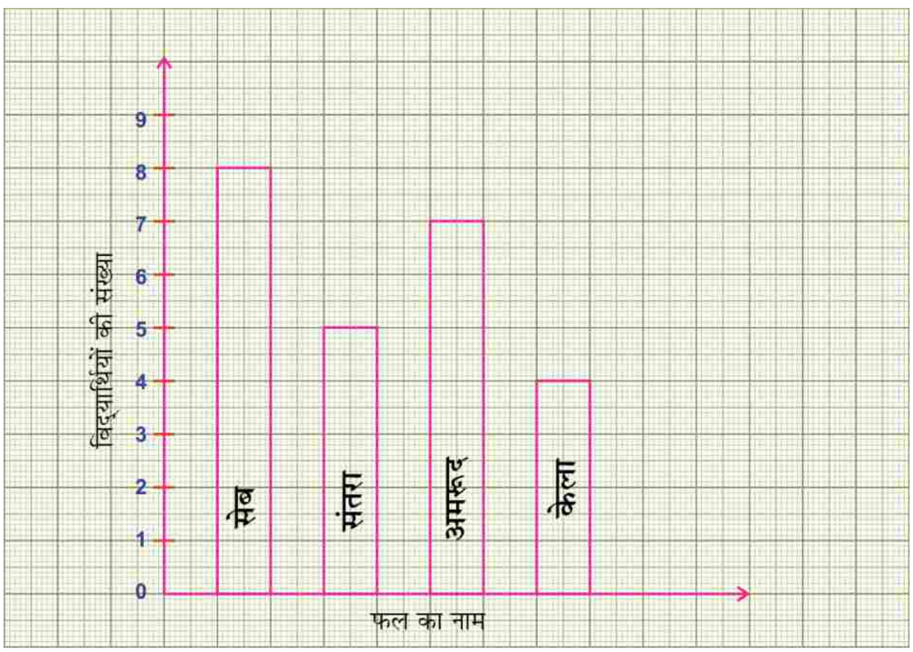
दंड आलेख बनाते हुए इन बातों का ध्यान रखना चाहिए।

- दंडं की चौड़ाई पूर्णरूप से एक समान होनी चाहिए।
- दंडों के बीच की दूरी पूर्णरूप से एक समान होनी चाहिए।
- दंड क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर हो सकते हैं।
- दंडों की ऊँचाई के लिए उपयुक्त पैमाने का प्रयोग करना चाहिए।

उदाहरण 8: **नीचे दी सारणी में छठी कक्षा के विद्यार्थियों के पसंद के फलों की सूचना दी गई है। इन आँकड़ों के लिए दंड आलेख बनाइए।**

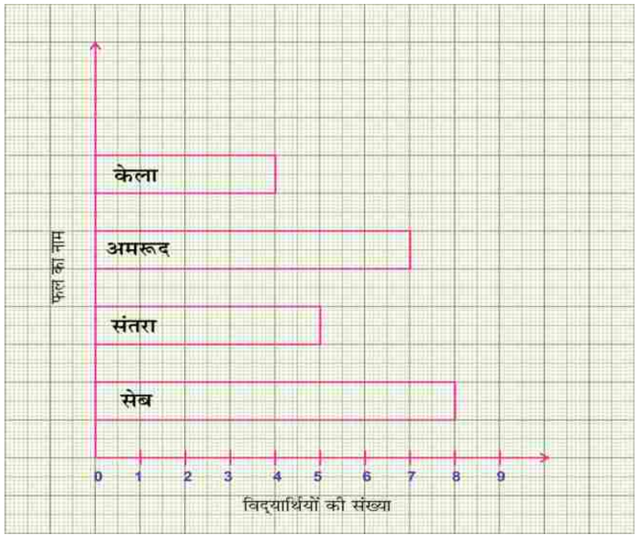
हल :

फल	सेब	संतरा	अमरूद	केला
विद्यार्थियों की संख्या	8	5	7	4



नोटः- विद्यार्थी अपनी ईच्छा अनुसार उपरोक्त में से कोई भी एक प्रकार का दंड आलेख बना सकते हैं।

यह देखा गया है कि उपरोक्त सूचना ऊर्ध्वाधर दंड आलेख (आलेख 1) द्वारा दर्शायी गई है। इसे क्षैतिज दंड आलेख (आलेख 2) द्वारा भी दर्शाया जा सकता है। आमतौर पर हम ऊर्ध्वाधर दंड आलेख का प्रयोग करते हैं।

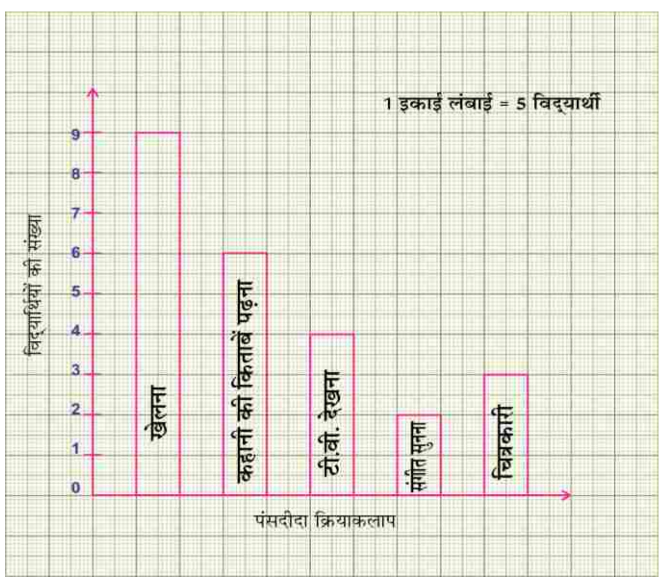


उदाहरण 5: 120 स्कूली विद्यार्थियों पर एक सर्वेक्षण यह पता करने के लिए किया गया कि वे अपने खाली समय में कौन-सी क्रियाकलाप (activity) करना पसंद करते हैं।

पसंद की क्रियाकलाप	विद्यार्थियों की संख्या
खेलना	45
कहानी की किताबें पढ़ना	30
टी.वी. देखना	20
संगीत सुनना	10
चित्रकारी	15

उपरोक्त आँकड़ों को दर्शाने के लिए 1 इकाई लम्बाई = 5 विद्यार्थी लेते हुए एक दंड आलेख खींचो। खेलने के अतिरिक्त विद्यार्थियों द्वारा सबसे अधिक कौन-सा क्रियाकलाप पंसद किया गया है।

हल :

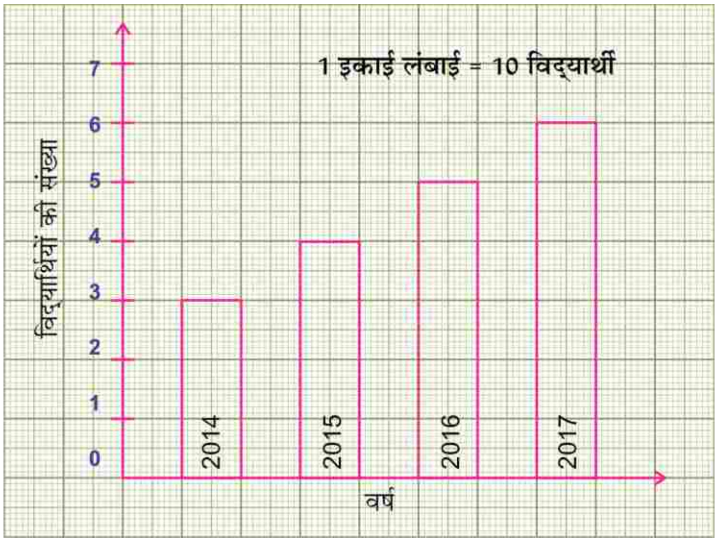


- खेलने के अतिरि्क विद्यार्थियों द्वारा कहानी की किताब पढ़ना सबसे अधिक पसंद किया गया है।

प्रश्नावली 14.3

1. एक कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या दर्शाते हुए दंड आलेख को देखें

1 इकाई लम्बाई = 10विद्यार्थी



नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दो।

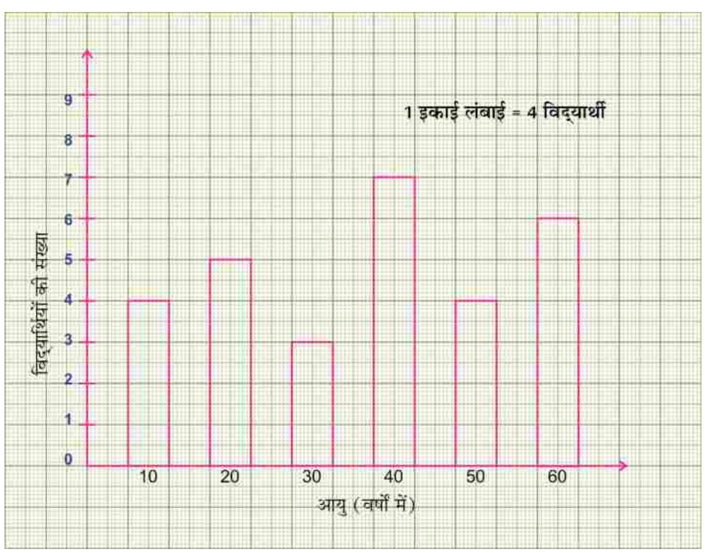
1. आलेख का पैमाना क्या है?
2. 2016 में कितने विद्यार्थी है।
3. क्या 2017 में विद्यार्थी 2014 में विद्यार्थियों की संख्या का दोगुना है?

2. दंड आलेख पढ़ो और नीचे दिए प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) दंड आलेख में कौन-सी सूचना दी गई है?

(ii) इस दंड आलेख में कौन-सी सूचना दी गई है।

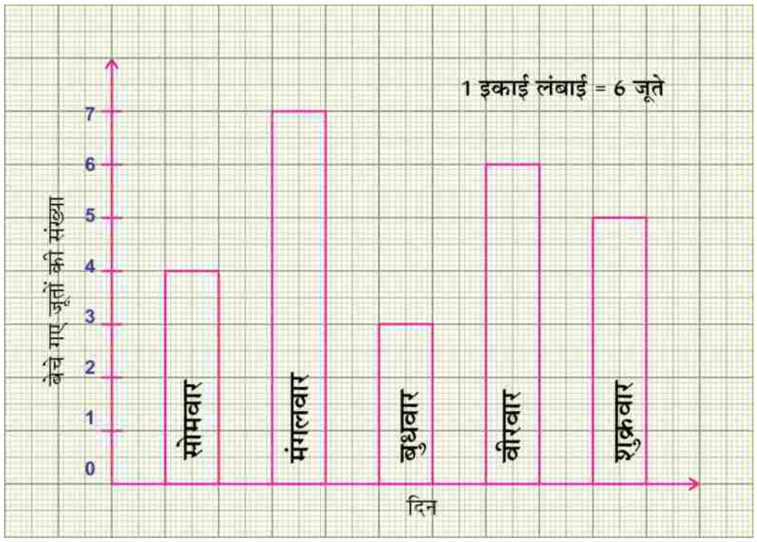
(iii) अधिकतम आयु कितनी है? कितने विद्यार्थियों की अधिकतम आयु है?



(iv) कितने विद्यार्थियों न्यूनतम आयु के हैं?

(v) कितने विद्यार्थी 13 वर्ष के हैं?

3. दिए गए दंड आलेख को पढ़ो और प्रश्नों के उत्तर दो:-



(i) दंड आलेख कौन-सी सूचना देता है?

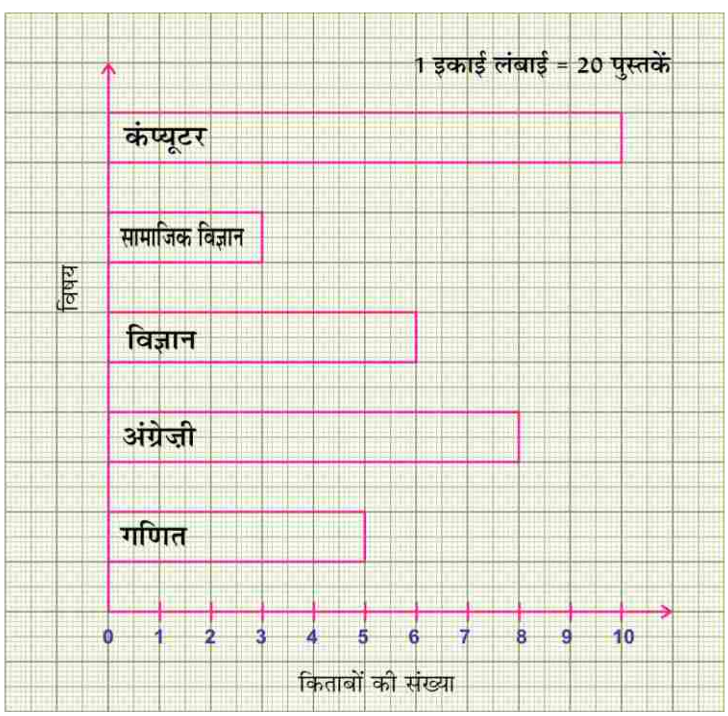
(ii) इस दंड आलेख के लिए कौन-सा पैमाना चुना गया है।

(iii) किस दिन अधिकतम संख्या में जूते बेचे गए और कितने?

(iv) किस दिन न्यूनतम संख्या में जूते बेचे गए और कितने?

(v) वीरवार को कितने जूते बेचे गए।

4. दंड आलेख पढ़ों जिससे एक लाइब्रेरी में विभिन्न विषयों की पुस्तकों की संख्या दर्शायी गई है।



नीचे दिए प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) दंड आलेख क्या सूचना देता है?

(ii) आलेख के लिए कौन-सा पैमाना चुना गया है?

(iii) किस विषय की अधिकतम पुस्तकें हैं और कितनी?

(iv) किस विषय की न्यूनतम पुस्तके हैं और कितनी?

5. एक दुकानदार द्वारा विभिन्नों दिनों में बेची गई गणित की पुस्तकों की संख्या नीचे दर्शायी गई है।

दिन	रविवार	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	वीरवार	शुक्रवार
बेची गई पुस्तकों की संख्या	65	40	30	50	20	70

अपनी पसंद का पैमाना चुनते हुए उपरोक्त सूचना के लिए एक दंड आलेख खींचिए।

1. अगर ☆ = 10 फूलों को दर्शाता है तो ☆☆☆☆☆ कितने फूलों को दर्शाते हैं।

(a) 30 (b) 40 (c) 50 (d) 5

2. अगर ☺ = 7 बच्चे हो तो ☺☺☺ कितने बच्चे दर्शाते हैं।

(a) 1 (b) 14 (c) 21 (d) 28

3. 卌 || का क्या मूल्य है

(a) 6 (b) 17 (c) 5 (d) 18

4. अगर ☐☐☐☐ = 400 के बराबर है तो ☐☐ किसके बराबर होगा?

(a) 200 (b) 2000 (c) 20 (d) 2

5. .... वस्तुओं के चित्रों द्वारा आँकड़े निरूपित करता है।

(a) दंड आलेख (b) आयत चित्र

(c) चित्रालेख (d) इनमें से कोई नहीं।

6. 14 को दर्शाने के लिए मिलान चिह्न बताओ।

(a) 卌 |||| (b) 卌 卌 ||||

(c) 卌 卌 |||| (d) |||| |||| |||| ||

7. अगर ☆ = 4 गेंदे निरूपित करें तो 40 गेंदों को निरूपित करने के लिए कितने ☆ की आवश्यकता होगी।

(a) 5 (b) 10

(c) 12 (d) 160

8. आँकड़ों को समान चौड़ाई और समान दूरी वाले क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर बक्सों द्वारा दर्शाने का तरीका .... है।

(a) आयत चित्र (b) दंड आलेख

(c) चित्रालेख (d) मिलान चिह्न

9. सूचना प्रदान करने के लिए इकट्ठे किए गए संख्याओं के संग्रह को .... कहते हैं।

(a) बांरबारता (b) आँकड़े

(c) मिलान चिह्न (d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि एक पैमाने पर 1 इकाई = 200 हो तो 5 इकाइयाँ कितनी संख्या को निरूपित करेंगी।

(a) 100 (b) 1000

(c) 300 (d) 600

सीखने के परिणाम

इस अध्याय के पूरा होने के बाद विद्यार्थी :

(i) विभिन्न प्रकार के आँकड़ों को इकट्ठा और क्रमबद्ध करने के योग्य हैं।

(ii) आँकड़ों को चित्रालेख और दंड आलेख में निरूपति करने के योग्य हैं।

(iii) चित्रालेख और दंड आलेख की व्याख्या करने के योग्य हैं।

(iv) दैनिक जीवन में आलेख का उपयोग करने के योग्य हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 14.1

1.

ऊँचाई (सेमी में)	मिलान चिह्न	बारंबारता
115	I	1
116	~~IIII~~ II	7
117	III	3
118	II	2
119	IIII	4
120	III	3
121	IIII	4
122	I	1
123	II	2
124	II	2
125	III	3

2.

भार (कि.ग्रा. में)	मिलान चिह्न	बारंबारता
25	卌	5
28	卌	5
32	卌 II	7
33	II	2
34	卌 I	6

3.

जूतों का माप	मिलान चिह्न	बारंबारता
4	卌	5
5	卌 III	8
6	卌 卌	10
7	卌 II	7
8	II	2

4.

पासो की संख्या	मिलान चिह्न	बारंबारता
1	卌 II	7
2	卌 I	6
3	卌	5
4	IIII	4
5	卌 卌 I	11
6	卌 II	7

5. (i)

अंक	मिलान चिह्न	बारंबारता
1	I	1
2	I	1
3	III	3
4	II	1
5	IIII	4
6	卌	5
7	卌 I	6
8	卌	5
9	III	3
10	I	1

(ii) 15 (iii) 9

प्रश्नावली 14.2

1. (i) 50 (ii) 55

2. (i) 50 (ii) निजी गाड़ी

3. (i) 18 (ii) गणित और अंग्रेज़ी (iii) पंजाबी

5. (i) हिंदी (ii) विज्ञान (iii) 20

6. (i) c (ii) a (iii) c (iv) a (v) d

7. (i) a (ii) c (iii) b (iv) c (v) d

प्रश्नावली 14.3

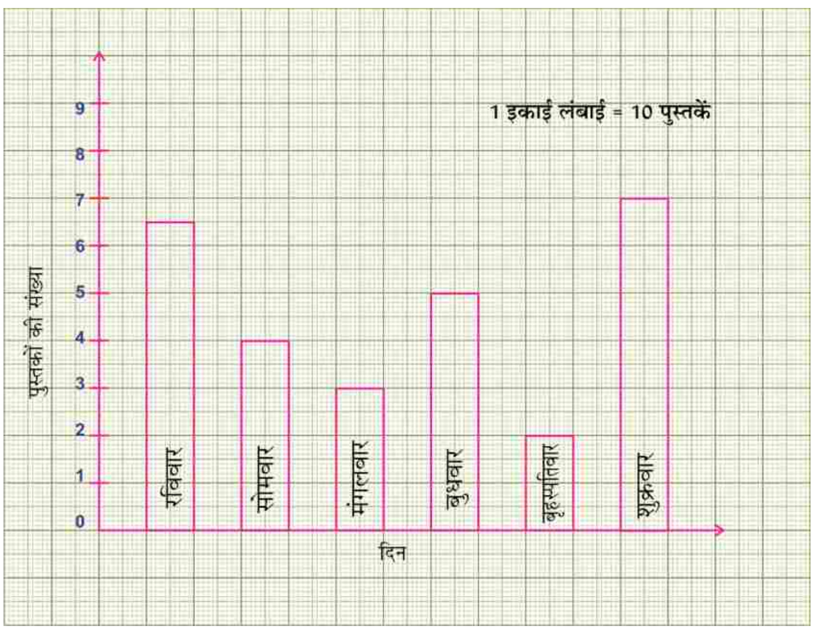
1. (i) 1 इकाई = 10 विद्यार्थी (ii) 50 (iii) हाँ

2. (i) विभिन्न विद्यार्थियों की आयु (ii) 1 इकाई = 4 विद्यार्थी
   (iii) 15, 24 विद्यार्थी (iv) 16 (v) 28

3. (i) अलग-अलग दिनों में बेचे गए जूतों की संख्या
   (ii) 1 इकाई = 6 जूते बेचे (iii) मंगलवार 210 जूते
   (iv) बुधवार = 90 जूते (v) 180 जूते

4. (i) लाइब्रेरी में विभिन्न विषयों की पुस्तकों की संख्या
   (ii) 1 इकाई - 20 पुस्तकें (iii) कंप्यूटर, 200 पुस्तकें
   (iv) सामाजिक विज्ञान , 60 पुस्तकें

5.



बहुवैकल्पिक प्रश्न

1. c 2. c 3. b 4. a 5. c
6. b 7. b 8. b 9. b 10. b