# गणित

सातवीं कक्षा के लिए

G2T9D7

ਸਮੱਗਰ ਸਿੱਖਿਆ ਅਭਿਆਨ

ਪੜ੍ਹੋ ਸਾਰੇ ਵਧੋ ਸਾਰੇ

ਸਿੱਖਿਆ ਅਤੇ ਭਲਾਈ ਵਿਭਾਗ, ਪੰਜਾਬ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਉਪਰਾਲਾ


## पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड

साहिबज़ादा अजीत सिंह नगर

© पंजाब सरकार

प्रथम संस्करण : 2021-22
संशोधित संस्करण : 2022-23 ........................ 8100 प्रतियाँ

All rights, including those of translation, reproduction and annotation etc., are reserved by the Punjab Government.

संयोजक : प्रितपाल सिंह कथूरिया
विषय विशेषज्ञ, पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड
कवर चित्र : मनजीत सिंह ढिल्लों
चित्रकार, पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड

## चेतावनी

1. कोई भी एजेंसी-होल्डर अधिक पैसे लेने के उद्देश्य से पाठ्य-पुस्तकों पर जिल्दबन्दी नहीं कर सकता। (एजेंसी)-होल्डरों के साथ हुए समझौते की धारा नं. 7 के अनुसार)
2. पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड द्वारा मुद्रित तथा प्रकाशित पाठ्य-पुस्तकों के जाली और नकली प्रकाशन (पाठ्य-पुस्तकों) की छपाई, प्रकाशन, स्टॉक करना, जमाखोरी या बिक्री आदि करना भारतीय दंड प्रणाली के अन्तर्गत गैरकानूनी जुर्म है।

   (पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड की पाठ्य-पुस्तकें बोर्ड के 'वाटर मारक' वाले कागज़ के ऊपर ही मुद्रित की जाती हैं।)

ਸਮੱਗਰ ਸਿੱਖਿਆ ਅਭਿਆਨ

ਪੜ੍ਹੋ ਸਾਰੇ ਵਧੋ ਸਾਰੇ

ਸਿੱਖਿਆ ਅਤੇ ਭਲਾਈ ਵਿਭਾਗ, ਪੰਜਾਬ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਉਪਰਾਲਾ

ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਵਿਕਰੀ ਲਈ ਨਹੀਂ ਹੈ।

सचिव, पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड, विद्या भवन फेज़-8 साहिबज़ादा अजीत सिंह नगर 160062 द्वारा प्रकाशित तथा मैस. नव दुर्गा ऑफसैट प्रिंटर्ज़, मेरठ द्वारा मुद्रित।

# प्राक्कथन

पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड अपनी स्थापना के समय से ही स्कूल स्तर के पाठ्यक्रम बनाने, राष्ट्रीय और राज्य स्तर पर बदलती शैक्षिक आवश्यकताओं के अनुसार पाठ्यक्रम व पाठ्य-पुस्तकें तैयार करने के लिए प्रयत्नशील रहा है।

यह पुस्तक विभिन्न कार्यशालाएं लगा कर क्षेत्रीय विशेषज्ञों द्वारा NCF-2005 और PCF 2013 के आधार पर तैयार की गई है। क्रियाओं और चित्रों द्वारा पुस्तक में रोचकता बढ़ाने के प्रयास किए गए हैं। यह पुस्तक बोर्ड, SCERT के विशेषज्ञों और क्षेत्रीय अनुभवी अध्यापकों/विशेषज्ञों के सहयोग से तैयार की गई है। बोर्ड इन सब का आभारी है।

लेखकों द्वारा यह प्रयत्न किया गया है कि पुस्तक की रूपरेखा सातवीं कक्षा के विद्यार्थियों के मानसिक स्तर के अनुसार हो। विषम-सामग्री एवं पुस्तक में दिये गये उदाहरण विद्यार्थी के आस-पास के वातावरण तथा उससे सम्बन्धित स्थितियों के अनुसार विकसित किए गए हैं। प्रत्येक पाठ में कई क्रियाएँ दी गई है जो विद्यार्थियों की जीवन शैली के अनुसार परिस्थितियों तथा उपलब्ध स्थानीय साधनों के अनुसार बदली भी जा सकती हैं।

आशा है कि गणित विषय की यह पुस्तक विद्यार्थियों और अध्यापकों के लिए लाभदायक सिद्ध होगी। पुस्तक में और सुधार के लिए क्षेत्र से आए सुझावों को बोर्ड द्वारा सादर स्वीकार किया जाएगा।

चेयरमैन
**पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड**

## पाठ्य-पुस्तक निर्माण समिति

**लेखक :**

- मुखतार सिंह, सरकारी कन्या सीनियर सेकंडरी स्कूल, महा सिंह गैट, अमृतसर।
- परमिन्दर सिंह, सरकारी कन्या सीनियर सेकंडरी स्कूल, वेरका, अमृतसर।
- सतवंत सिंह, सरकारी सीनियर सेकंडरी सकूल, फतेहगढ़ शुकरचक्क अमृतसर।

**संशोधक :**

- मनुदीप कौर, सरकारी हाई स्कूल, अदलीवाल, अमृतसर।
- सोनिया नाहर, सरकारी कन्या सीनियर सेकंडरी स्कूल, कोट बाबा दीप सिंह, अमृतसर।
- जिमी खजूरिया, मुख्य अध्यापक, सरकारी हाई स्कूल, रत्ता अब्दाल, गुरदासपुर।
- वरूण बांसल, सरकारी सीनियर सेकंडरी स्कूल, सिद्दूपुर कलां, फतेहगढ़ साहिब।
- कपिल देव सोनी, सरकारी मिडल स्कूल, रामगढ़ (नवां पिंड), खन्ना, लुधियाना।
- विकास जुल्का, सरकारी सीनियर सेकंडरी स्कूल, मरदांपुर, पटियाला।
- अरूण कुमार गर्ग, सरकारी सीनियर सेकंडरी स्कूल, बरेह, मानसा।

**अनुवादक :**

- सोनिया नाहर, सरकारी कन्या सीनियर सेकंडरी स्कूल, कोट बाबा दीप सिंह, अमृतसर।
- पूजा मेहरा, सरकारी हाई स्कूल, चीचा, अमृतसर।

# विषा-सूची


| क्रमांक | अध्याय | पेज नं. |
|---|---|---|
| 1. | पूर्णांक | 1-18 |
| 2. | भिन्न एवं दशमलव | 19-49 |
| 3. | आँकड़ों का प्रबंधन | 50-65 |
| 4. | सरल समीकरण | 66-77 |
| 5. | रेखाएँ एवं कोण | 78-97 |
| 6. | त्रिभुज | 98-122 |
| 7. | त्रिभुजों की सर्वांगसमता | 123-143 |
| 8. | राशियों की तुलना | 144-165 |
| 9. | परिमेय संख्याएँ | 166-181 |
| 10. | प्रायोगिक ज्यामिति | 182-193 |
| 11. | परिमाप और क्षेत्रफल | 194-220 |
| 12. | बीजीय व्यंजक | 221-238 |
| 13. | घातांक और घात | 239-252 |
| 14. | सममिति | 253-272 |
| 15. | ठोस आकारों का चित्रण | 273-296 |

अध्याय 1

# पूर्णांक

**उद्देश्य :-**

**इस अध्याय में आप सीखेगें-**

1. पूर्णांक को परिभाषित करना।
2. पूर्णांक का योग, व्यवकलन, गणन और विभाजन करना।
3. पूर्णांक पर होने वाली भिन्न-भिन्न क्रियाओं के साथ सम्बंधित विशेषताओं को समझना और उनकी जाँच करना।
4. दैनिक जीवन में पूर्णांक के महत्त्व और प्रयोग को समझना।
5. पूर्णांक को संख्या रेखा पर निरूपित करना।

## हमारे देश का गौरव (Our Nation's Pride) :-

**ब्रह्मगुप्त :** ब्रह्मगुप्त भारत के प्रसिद्ध गणितज्ञ थे जिन्होंने शून्य को परिभाषित किया और उसकी गणना के लिए नियम निर्धारित किए, जिस के फलस्वरूप गणित से सम्बंधित मुश्किलें आसानी से हल होने के योग्य हो गयीं। केवल यही नहीं, बल्कि गणित की दुनिया में ऐसे बहुत सारे क्षेत्र हैं जहाँ भारतीय गणितज्ञों ने बहुत योगदान दिये हैं। इसमें शून्य की खोज, ऋणात्मक संख्याओं के प्रयोग के नियम और सब से महत्त्वपूर्ण, केवल दस चिह्नों का प्रयोग करके सम्पूर्ण संख्याओं को दर्शाना, शामिल है।

## भूमिका

जैसा कि हम जानते हैं कि पूर्णांक वे संख्याएँ होती हैं जो आगे की गिनती और पीछे की गिनती के लिए प्रयोग की जाती हैं। हमारे वास्तविक जीवन में पूर्णांकों का प्रयोग उन्हें गणित में भी महत्त्वपूर्ण बनाता है। ये भिन्न-भिन्न स्थानों पर कार्य कुशलता की स्थिति के आधार पर गणना करने में प्रयत्नशील होते हैं, और यह गणना करते हैं कि बढ़िया परिणाम प्राप्त करने के लिए कितने अधिक या कितने कम मापदंडों का प्रयोग किया जाना है ?

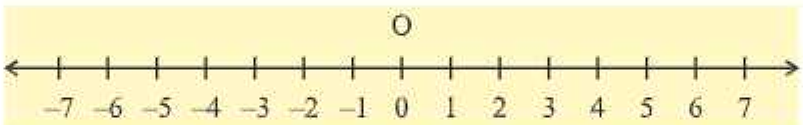
हम प्राकृतिक संख्याओं (N = 1, 2, 3, 4.........) का अध्ययन कर चुके हैं जिनका उपयोग हम गिनती करने के लिए करते हैं। सारी प्राकृतिक संख्याओं में '0' शामिल करने से यह पूर्ण संख्याएँ (W = 0, 1, 2, 3, 4..........) कहलाती हैं। परन्तु इन संख्याओं के साथ हम दैनिक जीवन में आने वाली सभी मुश्किलों को हल नहीं कर सकते। इसलिए, अब हम, पूर्ण संख्याओं और प्राकृतिक संख्याओं के ऋणात्मक रूप के समूह जिसे हम पूर्णांक कहते हैं, के बारे में अध्ययन करेंगे।

............ –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4.............

- 1, 2, 3, 4............. धनात्मक पूर्णांक है।
- –1, –2, –3, –4........... ऋणात्मक पूर्णांक है।
- 0 (शून्य) एक ऐसा पूर्णांक है जो ना धनात्मक है और ना ही ऋणात्मक।

## पूर्णांक को संख्या रेखा पर निरूपित करना (Representation of Integers on a number line)

एक रेखा खींचो। रेखा पर एक बिंदु 'O' अंकित करो। 'O' पर 0 को दर्शाओ। O के दोनों तरफ समान दूरी पर कुछ और बिंदु अंकित करो। O के दाईं ओर वाले बिंदुओ पर 1, 2, 3, 4 ........... और बाईं ओर बिंदुओ पर (0 से बाईं तरफ बढ़ते हुए) –1, –2, –3, –4.............. लिखो, जैसे कि नीचे दिखाया गया है।




संख्या रेखा के दोनों ओर लगे तीर के चिह्न पूर्णांक संख्याओं की संख्या रेखा के दोनों ओर अनंत रूप में निरंतरता को दर्शाते हैं।

## पूर्णांक का निरपेक्ष मूल्य (Absolute Value of an Integer)

किसी पूर्णांक '$a$' का निरपेक्ष मूल्य उस संख्या '$a$' के चिह्न के बिना उसके आंकिक मान के बराबर होता है। इसे $|a|$ द्वारा दर्शाया जाता है।

उदाहरण के लिए : (*i*) $|5| = 5$ और $|-5| = 5$ (*ii*) $|-3| = 3$ और $|3| = 3$

**उदाहरण-1 : (*i*) –5 और 5 (*ii*) –20 और –13 के बीच आने वाले सभी पूर्णांक लिखो।**

हल : (*i*) –5 और 5 के मध्य आने वाली पूर्णांक हैं :
–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4

(*ii*) –20 और –13 के मध्य आने वाले पूर्णांक हैं :
–19, –18, –17, –16, –15, –14

**उदाहरण-2 : निम्नलिखित पूर्णांक की तुलना कीजिए।**

**(*i*) –7 और 0 (*ii*) –5 और –13 (*iii*) –193 और –128 (*iv*) –26 और 23**

हल : (*i*) हम जानते हैं कि सभी ऋणात्मक पूर्णांक 0 से छोटे होते हैं।
$\therefore \quad -7 < 0$

(*ii*) संख्या रेखा पर –5, –13 के दाईं ओर होता है।
$\therefore \quad -5 > -13$

(*iii*) संख्या रेखा पर –193, –128 के बाईं ओर होता है।
$\therefore \quad -193 < -128$

(*iv*) हम जानते हैं कि सभी ऋणात्मक पूर्णांक, धनात्मक पूर्णांक से छोटे होते हैं।
$\therefore \quad -26 < 23$

**उदाहरण-3 : ज्ञात कीजिए! (*i*) $17 - |-12|$ (*ii*) $|-21| - |9|$ (*iii*) $|27-18| + |-9|$**

**हल : दिया है :**

(*i*) $17 - |-12| = 17 - 12 = 5$ $[\because |-12| = 12]$

(*ii*) $|-21| - |9| = 21 - 9 = 12$ $[\because |-21| = 21$ और $|9| = 9]$

(*iii*) $|27 - 18| + |-9| = 9 + 9 = 18$ $[\because |27-18| = |9| = 9$ और $|-9| = 9]$

**उदाहरण-4 : निम्नलिखित पूर्णांक सख्याओं को आरोही क्रम में लिखें :-**

**135, –87, –9, 87, –23, 263, –172, 18**

**हल :** दी गई धनात्मक पूर्णांक संख्याएँ हैं- 135, 87, 263, 18

आरोही क्रम $18 < 87 < 135 < 263$

दी गई ऋणात्मक पूर्णांक संख्याएँ हैं- –87, –9, –23, –172

आरोही क्रम अनुसार $-172 < -87 < -23 < -9$

इसलिए सभी आरोही क्रम अनुसार सभी पूर्णांक संख्याएँ हैं-

$-172 < -87 < -23 < -9 < 18 < 87 < 135 < 263$

या –172, –87, –23, –9, 18, 87, 135, 263

## प्रश्नावली - 1.1

**1. ( रिक्त ) खाली स्थान में उपयुक्त चिह्न >, < , = लगाएं-**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (i) | –3 | | –5 | (ii) | –2 | | 5–4 |
| (iii) | 8–4 | | –3 | (iv) | –6 | | 5–0 |
| (v) | 5 | | 8–3 | (vi) | 0 | | –3 |

**2. निम्नलिखित पूर्णांक सख्याओं को आरोही क्रम अनुसार लिखें :-**

(i) –2, 12, –43, 31, 7, –35, –10

(ii) –20, 13, 4, 0, –5, 5

**3. निम्नलिखित पूर्णांक संख्याओं को अवरोही क्रम अनुसार लिखें :-**

(i) 0, –7, 19, –23, –3, 8, 46

(ii) 30, –2, 0, –6, –20, 8

**4. मूल्यांकन करें :-**

(i) $30-|-21|$ (ii) $|-25|-|-18|$ (iii) $6-|-4|$ (iv) $|-125|+|110|$

**5. रिक्त स्थान भरें :-**

(i) 0 प्रत्येक ................ पूर्णांक संख्या से बड़ा होता है।

(ii) एक ऋणात्मक पूर्णांक संख्या का निरपेक्ष मूल्य हमेशा ................ होता है।

(iii) छोटी से छोटी धनात्मक पूर्णांक संख्या ................ है।

(iv) बड़ी से बड़ी ऋणात्मक पूर्णांक संख्या ................ है।

(v) प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक संख्या प्रत्येक ................ पूर्णांक संख्या से कम होती है।

## चार मौलिक क्रियाएँ :- (Four Fundamental Operations)

पूर्णांक संख्याओं का योग

समान चिह्नों वाली दो पूर्णांक संख्याओं का जोड़

असमान चिह्नों वाली दो पूर्णांक संख्याओं का जोड़

(*i*) **पूर्णांक संख्याओं का योग**

**1. एक समान चिह्नों वाले पूर्णांक का योग :**

**पग 1 :** दिये गए चिह्नों के बिना मूल्यों का योग करें।

**पग 2 :** प्राप्त योग के साथ दोनों पूर्णांकों का चिह्न लगाएं।

**उदाहरण 1. 10 + 23 सरल करें।**

**हल :**
$10 + 23$
$= 33$

**उदाहरण 2. 70 + 18 सरल करें।**

**हल :**
$70 + 18$
$= 88$

समान चिह्नों वाली दोनों संख्याएँ (+, +)

**उदाहरण 3. (–50) + (–32) सरल करें।**

**हल :**
$(-50) + (-32)$
$= -82$

**उदाहरण 4. (–42) + (–60) सरल करें।**

**हल :**
$(-42) + (-60)$
$= -102$

समान चिह्नों वाली दोनों संख्याएँ (–, –)

**2. असमान चिह्नों वाले पूर्णांकों का योग :**

**पग 1 :** दिये गए चिह्नों के बिना मूल्यों का अंतर ज्ञात करें।

**पग 2 :** प्राप्त अंतर के साथ बड़ी संख्या वाली पूर्णांक संख्या का चिह्न लगाएं।

**उदाहरण 5. (–17) + 35 सरल करें।**

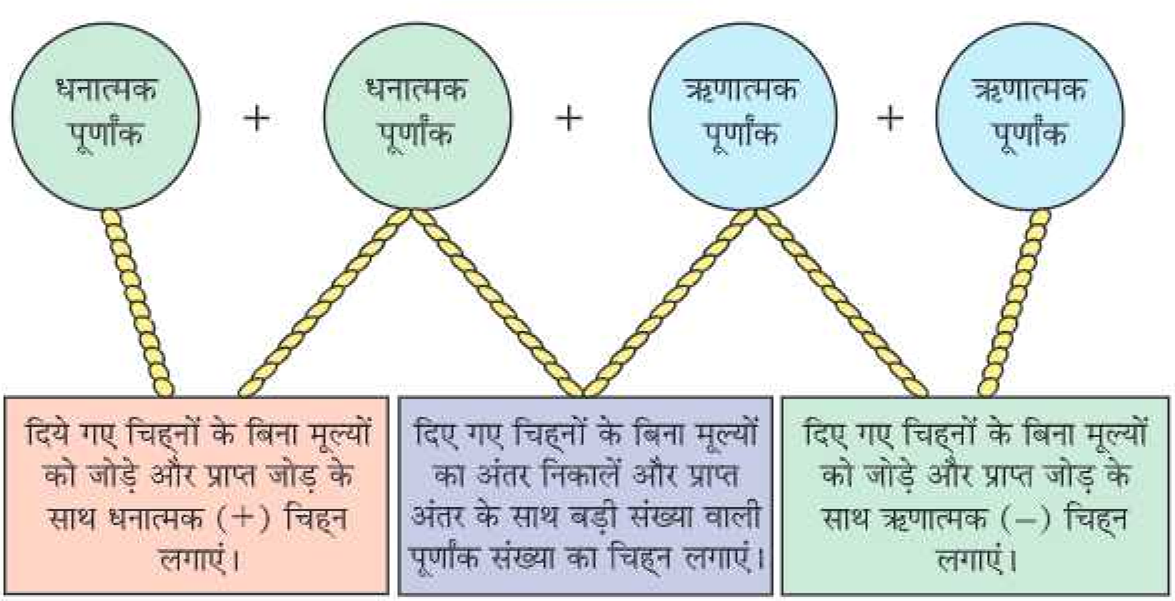
**हल :**
$(-17) + 35$
$= 18$

**उदाहरण 6. (–63) + 27 सरल करें।**

**हल :**
$(-63) + 27$
$= -36$

विपरीत चिह्नों वाली दोनों संख्याएँ (+, –) या (–, +)

**पूर्णांक का योग**



## पूर्णांकों के योग के गुण (Proporties of Addition of Integers)

1. **संवृत गुण (Closure) :** दो पूर्णांकों का योग पुन: एक पूर्णांक ही होती है। यदि $a$ और $b$ भी पूर्णांक हैं तो $a + b$ भी पूर्णांक ही होगा।

   उदाहरण के लिए $2 + (-4) = -2, (-3) + (7) = 4, 8 + 5 = 13$

2. **क्रमविनिमय गुण (Commutative) :** सभी पूर्णांक $a$ और $b$ के लिए

   $$a + b = b + a$$

   उदाहरण के लिए $5 + 8 = 8 + 5 = 13$

3. **साहचर्य गुण (Associative) :** सभी पूर्णांक संख्या $a, b$ और $c$ के लिए

   $$a + (b + c) = (a + b) + c$$

   उदाहरण के लिए

   | | |
   |---|---|
   | $(-2) + (5 + 9)$ | $[(-2) + 5] + 9$ |
   | $= (-2) + (14)$ | $= (3) + 9$ |
   | $= 12$ | $= 12$ |

   $\therefore \quad (-2) + (5 + 9) = [(-2) + 5] + 9$

4. **योज्य तत्समक (Additive identity) :** यदि किसी भी पूर्णांक में 0 जोड़ें तो वही संख्या प्राप्त होती है।

   $a + 0 = 0 + a = a$

   0 को पूर्णांक के लिए योज्य तत्समक कहते हैं।

5. **योज्य प्रतिलोम (Additive Inverse) :** किसी पूर्णांक $a$ के लिए, $(-a) + a = 0 = a + (-a)$

   किसी पूर्णांक $a$ का ऋणात्मक $(-a)$ होता है और एक पूर्णांक और उसके ऋणात्मक का योगफल '0' होता है।

   $\therefore$ $a$ का योज्य प्रतिलोम $(-a)$ और

   इसी प्रकार $(-a)$ का योज्य प्रतिलोम $-(-a) = a$ होता है।

**उदाहरण-7 : किसी प्रश्नोत्तरी के तीन उत्तरोत्तर चक्करों में मनजीत सिंह द्वारा प्राप्त अंक 65, -30, 25 थे। जबकि रमनदीप द्वारा प्राप्त किए अंक -30, 65, 25 थे। किस टीम ने अधिक अंक प्राप्त किए ? इस प्रश्न में आप क्या निष्कर्ष निकालते हो ?**

हल : मनजीत सिंह द्वारा प्राप्त अंक $= [(65 + (-30)] + 25$
$= 35 + 25$
$= 60$

रमनदीप द्वारा प्राप्त अंक $= (-30) + (65 + 25)$
$= -30 + 90$
$= 60$

हम देखते हैं कि मनजीत और रमनदीप दोनों ने बराबर अंक प्राप्त किए। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि पूर्णांकों का योग सहचार्य है।

**पूर्णांकों का व्यवकलन :** किसी एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक में से घटाने का अर्थ है, पहले पूर्णांक में से दूसरे पूर्णांक का योज्य प्रतिलोम जोड़ना। दूसरे शब्दों में, यदि $a$ और $b$ दो पूर्णांक हैं तो $a - b = a + (-b)$ होगा।

**उदाहरण-8 : 15 – (–8) हल करें।**

हल : दिया है $15 - (-8) = 15 + 8$
$= 23$

$\therefore \quad 15 - (-8) = 23$

**उदाहरण-9 : (–3) – (+ 21) हल करें।**

हल : दिया है $(-3) - (+21) = (-3) + (-21)$
$= -24$

## पूर्णांकों के व्यवकलन के गुण (Properties of Subtraction of Integers)

1. **संवृत गुण :-** दो पूर्णांकों का अंतर पुनः एक पूर्णांक ही होता है। जैसे $a$ और $b$ यदि दो पूर्णांक हैं तो $(a - b)$ भी हमेशा ही एक पूर्णांक ही होगा।

   उदाहरण के लिए : $-3 - 2 = -5$, $7 - (-4) = 11$

2. **पूर्णांकों का व्यवकलन सहचारी नहीं होता :-**

   उदाहरण के लिए : $(5 - 8) = -3$ | $(8 - 5) = 3$

   $\therefore \; 5 - 8 \neq 8 - 5$

3. **पूर्णांको का व्यवकलन क्रम विनिमेय नहीं होता :-**

   उदाहरण के लिए : $[7 - (-2)] - 1 = [7 + 2] - 1 = 9 - 1 = 8$ | $7 - [(-2) - 1] = 7 - [-3] = 7 + 3 = 10$

   $\therefore \; [7 - (-2)] - 1 \neq 7 - [(-2) - 1]$

4. **प्रत्येक पूर्ण संख्या $a$, $(a \neq 0)$ के लिए, $a - 0 = a \neq 0 - a$ होता है।**

**उदाहरण-10 : $(-7) + (8) - (3)$ हल करें।**

हल : $(-7) + (8) - (3)$

$$= (-7) + (8) - (3)$$
$$= (-7) + 8 + (-3)$$
$$= -10 + 8$$
$$= -2$$

> सभी धनात्मक संख्याओं को इकट्ठा करके जोड़ें और सभी ऋणात्मक संख्याओं को अलग से इकट्ठा करके जोड़ें। $[(-7) + (-3) = -10]$

**उदाहरण-11 : $15 - (-5) + 12 + (-8) - (-3)$ हल करें।**

हल : $15 - (-5) + 12 + (-8) - (-3)$

$$= 15 + (+5) + 12 + (-8) + (+3)$$
$$= 15 + 5 + 12 + 3 + (-8)$$
$$= 35 - 8$$
$$= 27$$

> सभी धनात्मक संख्याओं को इकट्ठा करके जोड़ें और सभी ऋणात्मक संख्याओं को अलग से इकट्ठा करके जोड़ें। $[15+5+12+3=35]$

**उदाहरण-12 : दो पूर्णांकों के बीच का अंतर – 7 है। यदि दूसरा पूर्णांक 23 है, तो पहला पूर्णांक पता करें।**

हल :

अंतर $= -7$

दूसरा पूर्णांक $= 23$

पहला पूर्णांक = अंतर + दूसरा पूर्णांक

$= -7 + 23 = 16$

## प्रश्नावली - 1.2

**1.** **मूल्य ज्ञात करें :-**

(*a*) $32 + 15$ (*b*) $17 + (-18)$
(*c*) $(-25) + (21)$ (*d*) $(-8) + (-11)$
(*e*) $(-13) + (21)$ (*f*) $(-19) + (0)$
(*g*) $(-85) - (-10)$ (*h*) $(15) - (6)$
(*i*) $(45) - (-27)$ (*j*) $(-62) - (52)$

**2.** **निम्नलिखित को हल करें :-**

(*a*) $(-3) + 7 + (-8)$ (*b*) $(-2) - (-1) - (4)$
(*c*) $8 + (-7) - (-6)$ (*d*) $(-12) - (-17) + (-25)$

**3.** **मान ज्ञात करें :-**

(*a*) $15 - (-5) + 12 + (-8) + (-3)$ (*b*) $(-32) - (-11) + (-25) + 27 - 13 + (-7)$
(*c*) $160 + (-150) + (-130) - (-100)$ (*d*) $25 - (-15) + (-12) + 21 - 65 - (-38)$

**4.** **पूर्णांकों के योग और व्यवकलन के गुणों का प्रयोग करते हुए रिक्त स्थान भरें :-**

(*i*) $10 + [(-5) + (-7)] = [(10 + (-5)] + \square$

(*ii*) $25 - 10 = -10 + \square$

(*iii*) $20 + \square = 15 + \square$

(*iv*) $(-12) + 37 = 37 + \square$

(*v*) $13 + [\square + (-2)] = [13 + (-7)] + \square$

(*vi*) $-17 + \square = -17$

**5.** दो पूर्णांकों के बीच का अंतर −10 है। यदि पहला पूर्णांक 17 है तो दूसरा पूर्णांक ज्ञात करें।

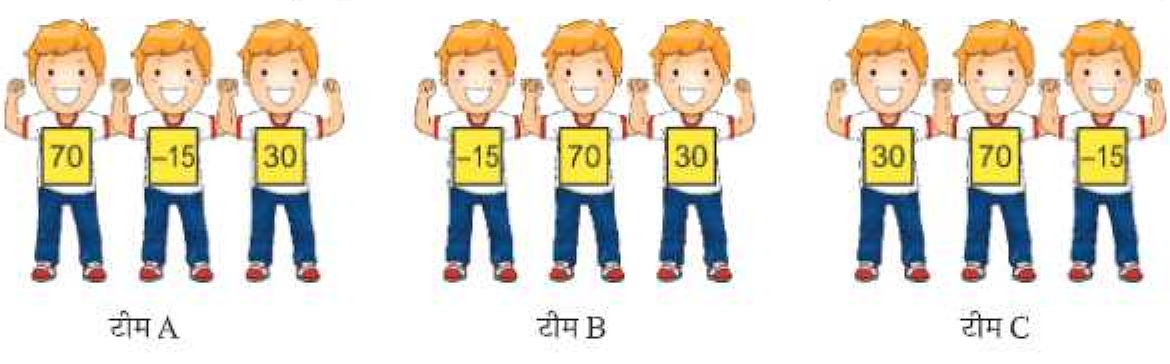
**6.** −93 से परवर्ती लगातार तीन विषम पूर्णांक लिखिए।

**7.** सूर्योदय पर, बाहरी तापमान शून्य से 0 डिं 7° कम था. दोपहर में तापमान 13° बढ़ गया और फिर रात को 8° गिर गया। दिन के अंत में तापमान कितना था ?

**8.** महीने के आरंभ में मनजीत सिंह के बैंक खाते की राशि (bank balance) ₹ (–430) थी। ₹ 250 खाते में जमा करवाने के पश्चात उसकी बैंक खाते की राशि ज्ञात कीजिए।

**9.** माऊंट ऐवरेस्ट, जिसकी एशिया में उच्चतम ऊँचाई है, समुद्र तल से 29028 फुट ऊपर है। मृत सागर समुद्र तल से 1312 फुट नीचे है। इन दोनों ऊँचाइयों के बीच का अंतर क्या है ?

**10.** एक प्रश्नोत्तरी में, टीम A में 70, – 15, 30 अंक प्राप्त किए। टीम B के प्राप्त किए अंक –15, 70, 30 थे और टीम C के प्राप्त अंक 30,70, –15 थे। किस टीम ने अधिक अंक प्राप्त किए ? आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?




टीम A टीम B टीम C

**11.** एक प्रतियोगिता में 5 टीमें और तीन उत्तरोतर (rounds) चक्कर हैं। सभी टीमों द्वारा प्राप्त अंक नीचे सारणी में दिए गए हैं। सारणी को पूरा करें और टीमों के पहले, दूसरे और तीसरे स्थानों की स्थिति बताएं।

| राउंड \ टीमें | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| उत्तरोतर चक्कर 1 | 7 | –9 | 8 | 7 | –6 |
| उत्तरोतर चक्कर 2 | –3 | 5 | –2 | 0 | 7 |
| दोनों चक्करों के बाद प्राप्त कुल अंक | | | | | |
| उत्तरोतर चक्कर 3 | –2 | –5 | –3 | –5 | 4 |
| उत्तरोतर चक्कर 4 | 6 | 7 | 4 | 3 | –2 |
| अंतिम स्कोर | | | | | |

**12.** **बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(i) $(-5) + (5) =$

(a) $-10$ (b) $5$

(c) $10$ (d) $0$

(*ii*) $(-10) + (-12) =$

(a) $-2$ (b) $22$

(c) $-22$ (d) $2$

(*iii*) $(-1) - (-1) =$

(a) $-2$ (b) $-1$

(c) $2$ (d) इनमें से कोई नहीं

(*iv*) निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन गलत हैं ?

(a) दो पूर्णांकों का योग हमेशा पूर्णांक ही होता है।

(b) प्रत्येक पूर्णांकों $a$ और $b$ के लिए, $a + b = b + a$ है।

(c) दो पूर्णांकों का अंतर भी पूर्णांक ही होता है।

(d) पूर्णांकों के व्यवकलन के लिए क्रम विनिमेय गुण सत्य है।

(*v*) निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही है ?

(a) $(-7) - (3) = 3 - (-7)$

(b) $(-7) + 3 = 3 + (-7)$

(c) $(-1) + [(5) + (-3)] = [(-1) + (5)] - (-3)$

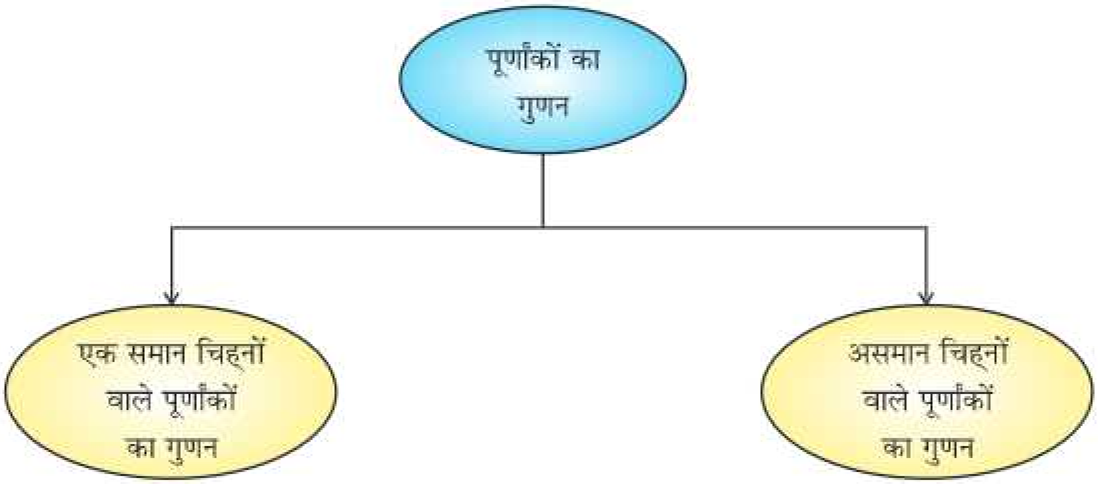
(d) इनमें से कोई नहीं

## पूर्णांकों का गुणन (Multiplication of Integers)

**गुणन बार-बार योग के रूप में :** मान लीजिए $a$ और $b$ दो धनात्मक पूर्णांक संख्याएँ हैं तो $a \times b$ के बारे में हम कह सकते हैं कि $a$ का $b$ बार, योग है या $b$ का $a$ बार योग है।

उदाहरण के लिए :- $4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12$ या $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$

**दो पूर्णांकों का गुणन :-**




### 1. एक समान चिह्नों वाले पूर्णांकों का गुणन :-

**पग 1 :** चिह्नों का ध्यान किए बिना संख्याओं को गुणा करें।

**पग 2 :** प्राप्त किए गए गुणनफल के साथ धनात्मक चिह्न लगाएं।

**उदाहरण-1 : 18 और 12 का गुणनफल पता कीजिए।**

**हल :** 18 और 12 को गुणा करो।

$$18 \times 12 = 216$$

**उदाहरण-2 : (–50) और (–8) को गुणनफल पता करो।**

**हल :** –50 और –8 को गुणा करो।

$$-50 \times -8 = 400$$

### 2. असमान चिह्नों वाले पूर्णांकों का गुणन :-

**पग 1 :** चिह्नों का ध्यान किए बिना संख्याओं को गुणा करें।

**पग 2 :** प्राप्त किए गए गुणनफल के साथ (ऋण) (negative) चिह्न लगाएं।

**उदाहरण-3 : 15 और -12 का गुणनफल ज्ञात कीजिए।**

**हल :** दिए गए पूर्णांकों 15 और −12 को गुणा करने पर

$$\begin{aligned} 15 \times -12 &= -(15 \times 12) \\ &= -180 \end{aligned}$$

## तीन या तीन से अधिक ऋणात्मक संख्याओं का गुणनफल (Product of three or more Negative Integers)

तीन या तीन से अधिक पूर्णांकों के गुणनफल के लिए हम साधारणत: एक बार में दो पूर्णांक ले सकते हैं और उन पूर्णांकों पर गुणन के नियमों का अनुसरण कर सकते हैं।

$$\begin{aligned} (-a) \times (-b) \times (-c) &= [(-a) \times (-b)] \times (-c) \\ &= (a \times b) \times (-c) \\ &= -(a \times b \times c) \end{aligned}$$

**उदाहरण-4 : $(-5) \times (-4) \times (-3)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।**

हल : $(-5) \times (-4) \times (-3)$

$$= (-5 \times -4) \times (-3)$$
$$= (20) \times (-3)$$
$$= -(20 \times 3)$$
$$= -60$$

## पूर्णांकों के गुणन के गुण :- (Properties of Multiplication of Integers)

**1. संवृत गुण :** यदि $a$ और $b$ दो पूर्णांक हैं तो $a \times b$ की एक पूर्णांक ही होगा।
उदाहरण के लिए : $-5$ और $8$ पूर्णांक हैं तो $-5 \times 8 = -40$ भी एक पूर्ण संख्या ही है।

**2. क्रम विनिमेय गुण :** यदि $a$ और $b$ दो पूर्णांक हैं तो $a \times b$ का मूल्य $b \times a$ के बराबर ही होगा।
भाव, $a \times b = b \times a$
उदाहरण के लिए : $2 \times 4 = 4 \times 2 = 8$

**3. गुणन का साहचर्य गुण :** यदि $a, b$ और $c$ तीन पूर्णांक हैं तो
$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \quad \text{या} \quad (a \times b) \times c = (a \times c) \times b$$
उदाहरण के लिए : $7 \times (6 \times 8) = (7 \times 6) \times 8 = 336$

**4. वितरण ( बंटन ) गुण :- (Distributive Property) :**

(a) **योग के अंतर्गत गुणन के लिए वितरणता :-** (Distributive property of multiplication over addition) यदि $a, b$ और $c$ तीन पूर्णांक हैं तो
$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$
उदाहरण के लिए : $10 \times (5 + 2) = (10 \times 5) + (10 \times 2)$
$$= 50 + 20$$
$$= 70$$

(b) **व्यवकलन के अंतर्गत गुणन के लिए वितरणता :-** (Distributive property of multiplication over subtraction) यदि $a, b$ और $c$ तीन पूर्णांक हैं तो
$$a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$$
उदाहरण के लिए : $6 \times (7 - 4) = (6 \times 7) - (6 \times 4)$
$$= 42 - 24$$
$$= 18$$

**5. शून्य से गुणन :-**
किसी भी पूर्णांक $a$ के लिए
$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$
उदाहरण के लिए $7 \times 0 = 0 \times 7 = 0$

**6. गुणनात्मक तत्समक :-**
किसी भी पूर्णांक $a$ के लिए
$$a \times 1 = 1 \times a = a$$
उदाहरण के लिए : $8 \times 1 = 1 \times 8 = 8$

सरल गुणन के लिए हम पूर्णांकों के क्रम विनिमेय गुण, साहचर्य गुण और वितरण (बंटन) गुणों का प्रयोग कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए : $50 \times 8 + 50 \times -2 = 50 \times (8 - 2)$
$$= 50 \times 6$$
$$= 300$$

**उदाहरण-1 : निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए।**

(*i*) $(-15) \times (-2) \times (-5) \times (6)$

(*ii*) $(-8) \times (-5) \times (-6) \times (-1)$

हल : (*i*)

$$\begin{aligned}(-15) \times (-2) \times (-5) \times (6) &= [(-15) \times (-2)] \times [(-5) \times (6)] \\ &= 30 \times (-30) \\ &= -900\end{aligned}$$

(*ii*)

$$\begin{aligned}(-8) \times (-5) \times (-6) \times (-1) &= [(-8) \times (-5)] \times [(-6) \times (-1)] \\ &= 40 \times 6 \\ &= 240\end{aligned}$$

**उदाहरण-2 : जाँच करें कि $(-20) \times [15 + (-5)] = [(-20) \times 15] + [(-20) \times (-5)]$**

हल :

$$\begin{aligned}\text{बायाँ पक्ष} &= (-20) \times [15 + (-5)] \\ &= -20 \times (15 - 5) \\ &= -20 \times 10 \\ &= -200\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{दायाँ पक्ष} &= [(-20) \times 15] + [(-20) \times (-5)] \\ &= (-300) + (100) \\ &= -300 + 100 \\ &= -200\end{aligned}$$

$$\text{बायाँ पक्ष} = \text{दायाँ पक्ष}$$

$$\therefore \quad (-20) \times [15 + (-5)] = [(-20) \times 15] + [(-20) \times (-5)]$$

**उदाहरण-3 : एक कक्षा के 10 प्रश्नों के टेस्ट में, प्रत्येक सही उत्तर के लिए 4 अंक दिये जाने हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए -2 अंक दिये जाने हैं। और यदि किसी प्रश्न का प्रयास नहीं किया गया तो उसके लिए 0 अंक दिया जाना है।**

(*i*) **समीप ने 8 उत्तर सही और 2 उत्तर ग़लत दिये हैं। बताइए कि उसकी क्या स्कोर होगी ?**

(*ii*) **हरमनजीत ने 9 प्रश्नों के उत्तर दिये जिनमें से 3 सही और 6 गलत हैं। उसका स्कोर क्या होगा ?**

हल : (*i*)

1 सही उत्तर के लिए दिया गया अंक = 4

8 सही उत्तरों के लिए दिये गये अंक = $4 \times 8$

= 32

1 गलत उत्तरों के लिए दिये गये अंक = $-2$

2 गलत उत्तरों के लिए दिये गये अंक = $-2 \times 2$

= $-4$

टेस्ट में समीप द्वारा प्राप्त किए कुल अंक = $32 + (-4)$

= $32 - 4$

= 28

(*ii*)

1 सही उत्तर के लिए दिया गया अंक = 4

3 सही उत्तरों के लिए दिया गया अंक = $4 \times 3$

= 12

1 ग़लत उत्तर के लिए दिया गया अंक $= -2$

6 ग़लत उत्तरों के लिए दिये गये अंक $= -2 \times 6$

$= -12$

प्रश्न को हल करने का प्रयत्न न करने पर दिए अंक $= 0$

रमनजीत द्वारा टेस्ट में प्राप्त कुल अंक $= 12 + (-12) + 0$

$= 12 - 12 + 0$

$= 0$

## प्रश्नावली - 1.3

**1. गुणनफल ज्ञात कीजिए।**

(*i*) $(-15) \times 0$ (*ii*) $(-35) \times 1$

(*iii*) $(-13) \times (-12)$ (*iv*) $(-20) \times 16$

(*v*) $(-15) \times (-4) \times (-5)$ (*vi*) $(-8) \times (-5) \times 9$

(*vii*) $(-2) \times (-5) \times (-4) \times (-10)$ (*viii*) $(-8) \times 0 + [(-5) \times (-4)]$

**2.** (*i*) जाँच कीजिए : $15 \times [9 + (-6)] = (15 \times 9) + (15 \times (-6)]$

(*ii*) जाँच कीजिए : $18 \times [(-5) + (-4)] = [(18 \times (-5)] + [18 \times (-4)]$

**3. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें :-**

(*i*) $15 \times \square = 0$

(*ii*) $-25 \times \square = 25$

(*iii*) $(-15) \times 18 = \square \times (-15)$

(*iv*) $(-10) \times [(-15) + (-5)] = (-10) \times \square + (-10) \times (-5)$

(*v*) $(-6) \times [(-5) \times (-18)] = [(-6) \times \square] \times (-18)$

**4. गुणों (properties) का प्रयोग करते हुए गुणनफल ज्ञात कीजिए।**

(*i*) $15 \times (-20) + (-20) \times (-5)$ (*ii*) $(15 \times 8) \times 50$

(*iii*) $8 \times (40 - 5)$ (*iv*) $510 \times (-45) + (-510) \times 55$

**5.** एक कक्षा में 15 प्रश्नों के एक टेस्ट में, प्रत्येक सही उत्तर के लिए 2 अंक दिये जाने हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (–1) अंक दिये जाने हैं। और यदि किसी प्रश्न का प्रयास नहीं किया गया है तो उसके लिए ‘0’ अंक दिया जाना है।

(*i*) कृतिका ने 5 सही और 10 गलत उत्तर दिये। उसका स्कोर क्या होगा ?

(*ii*) रोहन ने 14 प्रश्नों का प्रयास किया जिनमें से 7 सही और 7 उत्तर ग़लत दिए। उसकी स्कोर ज्ञात कीजिए।

**6. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) $(-19) - (13)$ बराबर है :

(a) $-32$ (b) 6

(c) $-6$ (d) इनमें से कोई नहीं

(*ii*) $(-6) \times (-5) \times 0$ बराबर है :

(a) 0 (*b*) –6

(*c*) –5 (*d*) 30

(*iii*) $0 \div (-10)$ बराबर है :

(*a*) 0 (*b*) –1

(*c*) –10 (*d*) इनमें से कोई नहीं

(*iv*) $(-33) \times 102 + (-33) \times (-2)$ बराबर है :

(*a*) 3300 (*b*) –3300

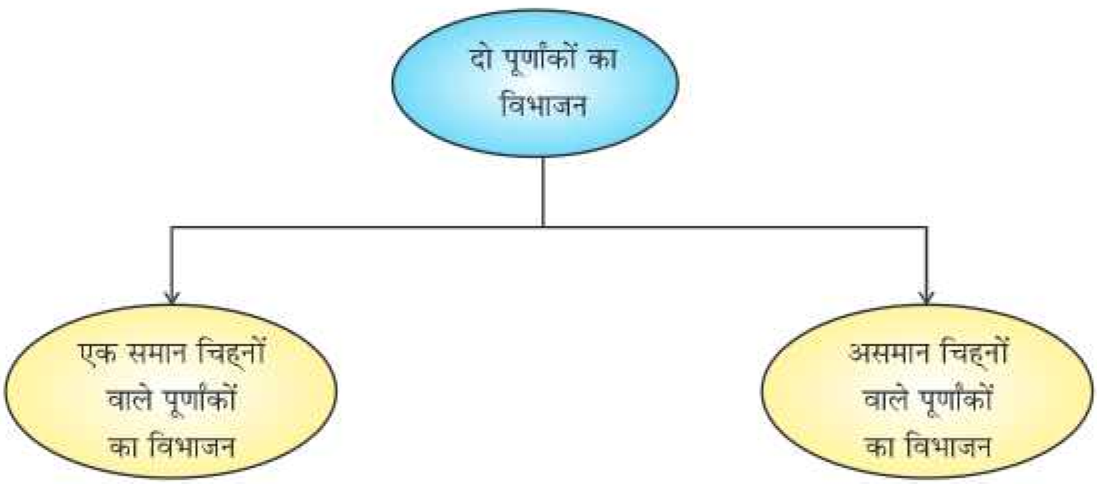
(*c*) 3432 (*d*) –3432

(*v*) $101 \times (-1) + 0 \times (-1)$ बराबर है :

(*a*) –101 (*b*) 101

(*c*) –102 (*d*) 102

## दो पूर्णांकों का विभाजन (Division of Two Integers)




### 1. समान चिह्नों वाले पूर्णांकों का विभाजन :-

**पग 1 :** चिह्नों का ध्यान किए बिना संख्याओं को भाग देना।

**पग 2 :** भागफल के साथ धनात्मक चिह्न लगाना।

उदाहरण 1 : (*i*) $(20) \div (5) = 4$

```
5 ) 20 ( 4
    20
    ──
     ×
    ──
```

(*ii*) $(-15) \div (-3) = 5$

```
3 ) 15 ( 5
    15
    ──
     ×
    ──
```

## 2. असमान चिह्नों वाले पूर्णांकों का विभाजन

**पग 1 :** चिह्नों का ध्यान किए बिना संख्याओं को भाग देना।

**पग 2 :** प्राप्त किए भागफल के साथ ऋणात्मक चिह्न लगाना।

उदाहरण 2 : (*i*) $(-36) \div (12) = -3$

$$12\overline{)36}(3$$
$$\underline{36}$$
$$\times$$

(*ii*) $(25) \div (-5) = -5$

$$5\overline{)25}(5$$
$$\underline{25}$$
$$\times$$

## पूर्णांकों के विभाजन के गुण :– (Properties of Division of Integers)

(1) जब एक पूर्णांक को किसी दूसरे पूर्णांक के साथ भाग दिया जाता है तो पूर्णांक का आना आवश्यक नहीं होता।

उदाहरण के लिए : (*i*) 5 और 6 दो पूर्णांक हैं, परंतु $5 \div 6$ पूर्णांक नहीं है। अर्थात $\frac{5}{6}$ पूर्णांक नहीं है।

(*ii*) –3 और 7 पूर्णांक हैं। परंतु $(-3) \div 7$ पूर्णांक नहीं है। अर्थात $\frac{-3}{7}$ पूर्णांक नहीं है।

(2) प्रत्येक शून्येतर पूर्णांक $a$ के लिए, $a \div a = 1$ होता है।

उदाहरण के लिए : (*i*) $(+7) \div (+7) = 1$

(*ii*) $(-5) \div (-5) = 1$

(3) प्रत्येक शून्येतर पूर्णांक $a$ के लिए, $(a \neq 0)$ $0 \div a = 0$ होता है।

उदाहरण के लिए : (*i*) $0 \div (+5) = 0$

(*ii*) $0 \div (-2) = 0$

(4) शून्येतर पूर्णांकों $a$ और $b$ के लिए, जहाँ $a \neq 0, b \neq 0$ और $a \neq b$,

$a \div b \neq b \div a$ (अर्थात क्रमविनिमेय गुण लागू नहीं होगा।)

उदाहरण के लिए : $15 \div 5 = 3$ परन्तु $5 \div 15 = \frac{1}{3}$

(5) शून्येतर पूर्णांकों $a, b,$ और $c$ के लिए, जहाँ $a \neq 0. b \neq 0. c \neq 0$ है, वहाँ $a \neq b \neq c$

$(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$ होगा। (अर्थात सहचारिता का गुण लागू नहीं होगा।)

## सम और विषम पूर्णांक (Even and Odd Integers)

**सम पूर्णांक :** सभी पूर्णांक जो 2 से पूर्णतया विभाजित हो जाते हैं, उन्हें सम पूर्णांक कहा जाता है।

......... –6, –4, –2, 0, 2, 4, 6, ............ आदि सम पूर्णांकों के उदाहरण है।

**विषम पूर्णांक :** सभी पूर्णांक जो 2 से पूर्णतया विभाजित नहीं होते, उन्हें विषम पूर्णांक कहा जाता है।

–5, –3, –1, 1, 3, 5, ........... आदि विषम पूर्णांकों के उदाहरण हैं।

**उदाहरण-1 : सरल कीजिए। (*i*) 63 ÷ (–7) (*ii*) (–80) ÷ 16 (*iii*) (72) ÷ (–9)**

हल : हमें हल दिया है :

(*i*) 63 ÷ (–7) = –9

7 ) 63 ( 9
63
×

(*ii*) (–80) ÷ 16 = –5

16 ) 80 ( 5
80
×

(*iii*) (–72) ÷ (–9) = 8

9 ) 72 ( 8
72
×

**उदाहरण-2 : –20 और –10 के बीच में आने वाली सभी सम संख्याएँ लिखो।**

हल : –20 और –10 के बीच में आने वाली सम संख्याएँ : –18, –16, –14, –12 हैं।

**उदाहरण-3 : –6 और 12 के बीच आने वाली सभी विषम संख्याएँ लिखो।**

हल : –6 और 12 के बीच आने वाली विषम संख्याएँ : –5. –3, –1, 1, 3, 5, 7, 9. 11 हैं।

## प्रश्नावली - 1.4

1. **निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :**
   (*i*) 76 ÷ 19
   (*ii*) (–156) ÷ (–12)
   (*iii*) (–125) ÷ (–1)
   (*iv*) (125) ÷ (–25)
   (*v*) 0 ÷ (–5)
   (*vi*) (–15) ÷ (15)
2. –18 और 0 के बीच आने वाली सभी सम संख्याएँ लिखो।
3. –9 और 9 के बीच आने वाली सभी विषम संख्याएँ लिखो।
4. –240 को किस पूर्णांक से भाग किया जाये कि 16 प्राप्त हो ?
5. **मान ज्ञात कीजिए :**
   (*i*) 125 ÷ [5 ÷ (–1)]
   (*ii*) [169 ÷ 13] ÷ [26 ÷ 2]
   (*iii*) [(–105) ÷ 3] ÷ 7
6. सरल कीजिए : 12 – [8 + 27 ÷ (2 × 8 – 7)]
7. सरल कीजिए : 10– [8 – {11 + 30 ÷ (4 + 2)}]

**8. बहुवैकल्पिक प्रश्न :**

(*i*) $(-8) \div 2 =$

(*a*) –16 (*b*) –4

(*c*) 4 (*d*) –8

(*ii*) $(-7) \div (-7) =$

(*a*) –1 (*b*) 49

(*c*) –49 (*d*) इनमें से कोई नहीं

(*iii*) $0 \div 2 =$

(*a*) 1 (*b*) 2

(*c*) –2 (*d*) 0

**9.** किन्हीं दो पूर्णांकों का भागफल हमेशा एक पूर्णांक ही होता है। (सही/गलत)

**10.** अगर $a$ और $b$ दो पूर्णांक ऐसे है जिन के लिए $a \neq b$ और $a, b \neq 0$ हो, तो $a \div b = b \div a$। (सही/गलत)

## हमने क्या चर्चा की ?

1. ........ –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 ........ पूर्णांक होते हैं।
2. 1, 2, 3 ....... धनात्मक पूर्णांक होते हैं।
3. –1, –2, –3, ........ ऋणात्मक पूर्णांक होते हैं।
4. 0 (शून्य) ना तो धनात्मक है और ना ही ऋणात्मक।
5. दो समान चिह्न वाले पूर्णांकों का योग करने के लिए उनके संख्यात्मक मूल्यों को जोड़ा जाता है और योग के साथ दोनों पूर्णांकों का सांझा चिह्न लगाया जाता है।
6. दो असमान चिह्न वाले पूर्णांक के योग के लिए उनका व्यवकलन किया जाता है और बड़े पूर्णांक का चिह्न अंतर के साथ लगाया जाता है।
7. किसी पूर्णांक $a$ के लिए, $a + (-a) = 0$ होता है। $-a$ को $a$ का योज्य प्रतिलोम कहा जाता है।
8. पूर्णांकों के लिए, योग पर गुणन के वितरण नियम के अनुसार $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ ।

पूर्णांकों की चार मूल क्रियाओं का गुणों को सारणीबद्ध रूप :

| गुण \ क्रियाएँ | योग | अंतर | गुणन | भाग |
|---|---|---|---|---|
| संवृत (Closure) | हाँ | हाँ | हाँ | नहीं |
| क्रम विनिमेयता (Commutative) | हाँ | नहीं | हाँ | नहीं |
| साहचर्य (Associative) | हाँ | नहीं | हाँ | नहीं |
| तत्समक (Identity) | हाँ | नहीं | हाँ | नहीं |

## सीखने के परिणाम (Learning Outcomes)

**अध्याय के पूर्ण होने पर विद्यार्थी :**

1. पूर्णांक को परिभाषित करने और उन्हें संख्या रेखा पर निरूपित करने के योग्य हैं।
2. पूर्णांक की योग, अंतर, गुणन और भाग, सभी मूल क्रियाएँ करने के योग्य हैं।
3. पूर्णांक के योग, अंतर, गुणन और भाग के सभी गुणों को सत्यापित करने के योग्य हैं।

4. गणना को सरल बनाने के लिए योग और गुणन के अंतर्गत क्रमविनिमेयता, सहचारिता और वितरणता के गुण का प्रयोग आसानी से करने के योग्य हैं।

5. पूर्णांक की जानकारी का दैनिक जीवन में आने वाली परिस्थितियों में उपयोग करने के योग्य हैं।

# उत्तरमाला

## प्रश्नावली 1.1

**1.** (*i*) $>$ (*ii*) $<$
(*iii*) $>$ (*iv*) $<$
(*v*) $=$ (*vi*) $>$

**2.** (*i*) –43, –35, –10, –2, 7, 12, 31 (*ii*) –20, –5, 0, 4, 5, 13

**3.** (*i*) 46, 19, 8, 0, –3, –7, –23 (*ii*) –20, –5, –2, 0, 8, 30

**4.** (*i*) 9 (*ii*) 7
(*iii*) 2 (*iv*) 235

**5.** (*i*) ऋणात्मक (*ii*) धनात्मक
(*iii*) 1 (*iv*) –1
(*v*) धनात्मक

## प्रश्नावली 1.2

**1.** (*a*) 47 (*b*) –1
(*c*) –4 (*d*) –19
(*e*) 8 (*f*) –19
(*g*) –75 (*h*) 9
(*i*) 72 (*j*) –114

**2.** (*a*) –4 (*b*) –5
(*c*) 7 (*d*) –20

**3.** (*a*) 21 (*b*) –39
(*c*) –20 (*d*) 22

**4.** (*i*) –7 (*ii*) 25
(*iii*) 15, 20 (*iv*) –12
(*v*) –7, –2 (*vi*) 0

**5.** –27 **6.** –91, –89, –87

**7.** –2° **8.** –180

**9.** 30340 फुट

**10.** स्कोर बराबर हैं, पूर्णांकों का योग साहचर्य है।

**11.**

| टीम | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| दो उत्तर चक्करों के बाद | 4 | –4 | 6 | 7 | 1 |
| अंतिम स्कोर | 8 | –2 | 7 | 5 | 3 |

प्रथम स्थान – A, द्वितीय स्थान – C, तृतीय स्थान – D

**12.** (*i*) *d* (*ii*) *c*
(*iii*) *d* (*iv*) *d*
(*v*) *b*

## प्रश्नावली 1.3

**1.** (*i*) 0 (*ii*) –35
(*iii*) 156 (*iv*) –320
(*v*) –300 (*iv*) 360
(*viii*) 400 (*viii*) 20

**3.** (*i*) 0 (*ii*) –1
(*iii*) 18 (*iv*) –15
(*v*) –5

**4.** (*i*) –200 (*ii*) 6000
(*iii*) 280 (*iv*) 51000

**5.** (*i*) 0 (*ii*) 7

**6.** (*i*) *a* (*ii*) *a*
(*iii*) *a* (*iv*) *b*
(*v*) *a*

## प्रश्नावली 1.4

**1.** (*i*) 4 (*ii*) 13
(*iii*) 125 (*iv*) –5
(*v*) 0 (*vi*) –1

**2.** –6, –4, –2, 0, 2, 4, 6

**3.** –7, –5, –3, –1, 1, 3, 5, 7

**4.** –15

**5.** (*i*) –25 (*ii*) 1
(*iii*) –5

**6.** 1 **7.** 18

**8.** (*i*) *b* (*ii*) *d*
(*iii*) *d*

**9.** गलत **10.** गलत

अध्याय 2

G8B8N2

# भिन्न एवं दशमलव

**उद्देश्य :-**

**इस अध्याय में आप सीखेगें :-**

1. भिन्न का व्युत्क्रम करना।
2. दो या दो से अधिक भिन्नों की गुणा और भाग करना।
3. दशमलव संख्याओं की गुणा और भाग करना।
4. दैनिक जीवन में दशमलव संख्याओं तथा भिन्नों का प्रयोग करके संबंधित समस्याओं को हल करना।

## हमारे देश का गौरव (Our Nation's Pride)

**भास्कर-1 :** भास्कर– 1 सातवीं शताब्दी के गणितज्ञ थे, जिन्होंने सब से पहले शून्य के लिए वृत का प्रयोग करते हुऐ हिंदू दशमलव पद्धति में संख्याओं को लिखा। उन्होने आर्यभट्ट की कृतियों पर समीक्षा लिखी और उसी सन्दर्भ मे फलन sine का परिमेय मान बताया जो अनन्य एवं अत्यन्त उल्लेखनीय था। आर्यभट्ट की परिपाटी में ही उन्होंने महाभास्करीय एवं नामक दो खगोलशास्त्री ग्रंथ भी लिखे।

## भूमिका

आपने पिछली कक्षाओं में 'भिन्न एवं दशमलव' के बारे में अध्ययन किया है। भिन्नों के अध्ययन में हम उचित भिन्न, विषम भिन्न, मिश्रित भिन्न के योग एवं व्यवकलन के बारे में पढ़ चुके हैं। हमने, भिन्नों की तुलना, तुल्य भिन्न, भिन्नों को संख्या रेखा पर निरूपित करना और भिन्नों को क्रमबद्ध करना, के बारे में भी अध्ययन किया है। दशमलवों के अध्ययन में हम, उनकी तुलना, संख्या रेखा पर उनका निरूपण और उनका योग एवं व्यवकलन, के बारे में चर्चा कर चुके हैं। अब इस अध्याय में हम भिन्नों एवं दशमलवों के गुणन एवं भाग के बारे में अध्ययन करेंगे।

पहले, हम पिछली कक्षा में भिन्न के बारे में ली जानकारी की दोहराई करेंगे।

**भिन्न (Fraction) :** भिन्न एक ऐसी संख्या है जो किसी सम्पूर्ण वस्तु का कोई भाग निरूपित करती है। $\frac{3}{4}$, किसी सम्पूर्ण के चार भागों में से तीन को दर्शाती है। '3' को अंश और '4' को हर कहते हैं।

**उचित भिन्न (Proper Fraction) :** भिन्न, जिसमें अंश हर से छोटा हो, उचित भिन्न (Proper fraction) कहलाती हैं। उदाहरण के लिए, $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{9}{13}$ उचित भिन्नें हैं।

**विषम भिन्न (Improper Fraction) :** भिन्न जिसमें अंश, हर से बड़ा हो, विषम भिन्न कहलाती हैं। उदाहरण के लिए, $\frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{7}{3}$ विषम भिन्न है।

**मिश्रित भिन्न (Mixed Fraction) :** विषम भिन्न को जब पूर्ण भाग और उचित भिन्न के मिश्रण के रूप में लिखा जाए तो उसे मिश्रित भिन्न कहते हैं। उदाहरण के लिए, $\frac{7}{5}$ विषम भिन्न को $1\frac{2}{5}$ रूप मे लिखा जा सकता है। यह एक मिश्रित भिन्न है।

$$\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} = 1 + \frac{2}{5}$$

**समान भिन्न (Like Fractions) :** समान हर वाली भिन्नों को समान भिन्न कहा जाता है। उदाहरण के लिए, $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{8}{7}$ सभी समान भिन्नें हैं।

**असमान भिन्न (Unlike Fractions) :** अलग-अलग हर वाली भिन्नों को असमान भिन्न कहा जाता है। उदाहरण के लिए, $\frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{5}{7}$ सभी असमान भिन्नें हैं।

**दशमलव भिन्न (Decimal Fraction) :** भिन्न, जिसका हर 10 या 10 की घात अंक जैसे कि, 10, 100, 1000, ......... आदि हो, दशमलव भिन्न कहलाती है।

उदाहरण के लिए, $\frac{3}{10}, \frac{22}{100}, \frac{732}{1000}$ सभी दशमलव भिन्नें हैं।

**साधारण भिन्न (Simple Fraction) :** भिन्न, जिसका हर कोई भी प्राकृतिक संख्या हो परन्तु 10, 100, 1000, ............ को छोड़कर, वह साधारण भिन्न कहलाती है।

उदाहरण के लिए, $\frac{7}{15}, \frac{4}{25}, \frac{2}{17}$ सभी साधारण भिन्न है।

**तुल्य भिन्नें (Equivalent Fractions) :** भिन्नें, जो किसी पूर्ण के समान भागों को दर्शाती हों, वह तुल्य भिन्नें कहलाती हैं। जैसे, $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ , सभी तुल्य भिन्नें हैं।

**नोट :** विषम भिन्नों को मिश्रित भिन्न और मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में दर्शाया जा सकता है।

$\frac{15}{2}$ एक विषम भिन्न है, साथ ही $\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ जो एक मिश्रित भिन्न है।

$$\begin{array}{r|l} 2 & 15 \;(7 \\ & \underline{14} \\ & 1 \end{array}$$

$3\frac{2}{5}$ जो एक मिश्रित भिन्न है, इसको $\frac{(3 \times 5) + 2}{5} = \frac{17}{5}$ के रूप में भी लिखा जा सकता है जो एक विषम भिन्न है।

**उदाहरण-1 : $\frac{2}{3}$ की पाँच तुल्य भिन्नें लिखिए।**

हल :

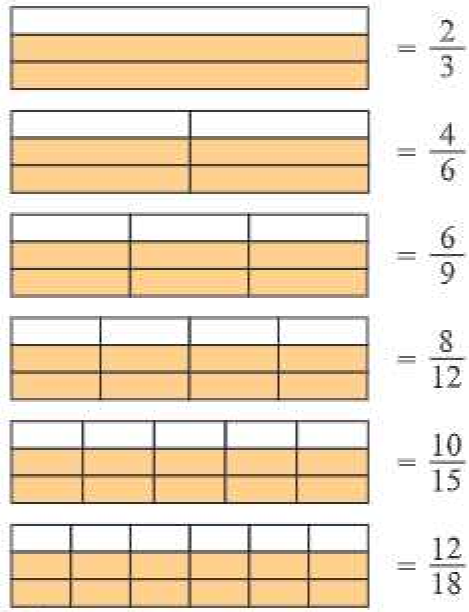
$$\frac{2}{3} = \frac{2\times 2}{3\times 2} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times 3}{3\times 3} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times 4}{3\times 4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times 5}{3\times 5} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times 6}{3\times 6} = \frac{12}{18}$$




$\therefore$ $\frac{2}{3}$ की तुल्य भिन्नें हैं। : $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}$

**उदाहरण-2 : $2\frac{3}{4}$ , $5\frac{5}{6}$ और $\frac{3}{8}$ का योग कीजिए।**

| | |
|---|---|
| 2 | 4, 6, 8 |
| 2 | 2, 3, 4 |
| 2 | 1, 3, 2 |
| 3 | 1, 3, 1 |
| | 1, 1, 1 |

हल : $2\frac{3}{4} + 5\frac{5}{6} + \frac{3}{8}$

$= \frac{11}{4} + \frac{35}{6} + \frac{3}{8}$

4, 6, 8 का ल. स. व, $= 2\times 2\times 2\times 3$

$= 24$

अब, $\frac{11}{4} + \frac{35}{6} + \frac{3}{8} = \frac{(11\times 6)+(35\times 4)+(3\times 3)}{24}$

$= \frac{66+140+9}{24} = \frac{215}{24} = 8\frac{23}{24}$

24)215(8
−192
23

**उदाहरण-3 : रमन ने $3\frac{1}{2}$ kg संतरे और $4\frac{3}{4}$ kg आम खरीदे। उसने कुल कितने फल खरीदे ?**

हल : फलों का कुल भार

$$= \left(3\frac{1}{2} + 4\frac{3}{4}\right)\text{kg}$$

$$= \left(\frac{7}{2} + \frac{19}{4}\right)\text{kg}$$

$$= \left(\frac{14+19}{4}\right)\text{kg}$$

$$= \frac{33}{4}\text{ kg} = 8\frac{1}{4}\text{ kg}$$

**उदाहरण-4 : दलबीर ने $\frac{3}{4}$ घंटे के लिए शारीरिक व्यायाम किया जब कि रणजीत ने $\frac{7}{9}$ घंटे के लिए व्यायाम किया। दोनों में से किसने अधिक व्यायाम किया ?**

हल : यह पता करने के लिए की किसने ज्यादा व्यायाम किया, हम $\frac{3}{4}$ और $\frac{7}{9}$ की तुलना करेंगे।

4 और 9 का ल. स. व. = 36

$\frac{3}{4}$ और $\frac{7}{9}$ को समान भिन्न में बदलने पर,

$$\frac{3}{4} = \frac{3\times9}{4\times9} = \frac{27}{36}$$

क्योंकि, $$\frac{7}{9} = \frac{7\times4}{9\times4} = \frac{28}{36}$$

क्योंकि, $28 > 27$,

$$\therefore \quad \frac{28}{36} > \frac{27}{36} \Rightarrow \frac{7}{9} > \frac{3}{4}$$

$\therefore$ रणजीत ने अधिक समय के लिए व्यायाम किया।

## प्रश्नावली - 2.1

1. **निम्नलिखित को हल कीजिए।**

   (*i*) $4 + \frac{7}{8}$ (*ii*) $\frac{9}{11} - \frac{4}{15}$

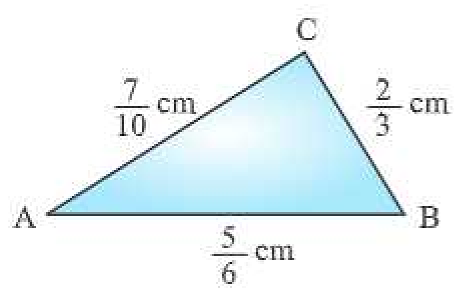
   (*iii*) $\frac{11}{16} - \frac{2}{5} + \frac{8}{10}$ (*iv*) $2\frac{1}{5} + 6\frac{1}{2}$

   (*v*) $8\frac{1}{2} - 3\frac{5}{8}$ (*vi*) $\frac{9}{10} - \frac{9}{100} + \frac{9}{1000}$

2. **निम्नलिखित को आरोही क्रम में लिखिए।**

   (*i*) $\frac{2}{17}, \frac{10}{17}, \frac{3}{17}, \frac{16}{17}, \frac{5}{17}, \frac{8}{17}$

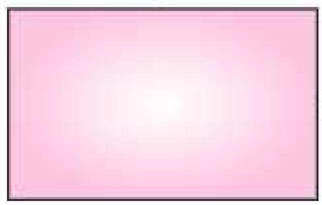
   (*ii*) $\frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{7}{10}$




3. $\Delta$ABC की तीन भुजाऐं AB, BC और CA क्रमागत $\frac{5}{6}$ cm, $\frac{2}{3}$ cm और $\frac{7}{10}$ cm हैं। त्रिभुज का परिमाप पता कीजिए।

**4.** रमेश रोज़ाना $5\frac{2}{3}$ घंटे के लिए पढ़ाई करता है। वह उसमें से $2\frac{4}{5}$ घंटे विज्ञान और गणित में लगाता है। बताओ कि वह बाकी विषयों के लिए कितना समय पढ़ाई में लगाता है।

**5.** सोनिया, एक बार में, $10\frac{2}{3}$ m और $12\frac{1}{2}$ m भुजाओं वाले एक आयताकार पार्क के चारों ओर चक्कर लगाती है। पता करो कि सोनिया ने कुल कितनी दूरी तय की।




**6.** रितु ने एक तस्वीर में रंग भरने के लिए $\frac{7}{12}$ घंटें लगाऐ। वैभव ने उसी तसवीर में रंग भरने को $\frac{3}{4}$ घंटे लगाए। किसने ज्यादा समय के लिए काम किया और कितनी ज्यादा देर के लिए काम किया ?

**7.** **बहुवैकल्पिक प्रश्न (Multiple Choice Questions) :**

(*i*) भिन्नें $\frac{2}{5}, \frac{7}{5}$ .....

(*a*) समान भिन्नें हैं।  (*b*) असमान भिन्नें हैं।

(*c*) तुल्य भिन्नें हैं।  (*d*) इन में से कोई भी नहीं।

(*ii*) 8 घंटे, दिन के कितने भाग को दर्शाते हैं।

(*a*) $\frac{1}{2}$  (*b*) $\frac{1}{3}$  (*c*) $\frac{8}{60}$  (*d*) $\frac{2}{3}$

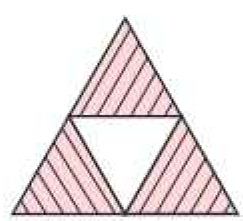
(*iii*) $\frac{3}{5}$ की तुल्य भिन्न ....... है।

(*a*) $\frac{13}{15}$  (*b*) $\frac{5}{3}$  (*c*) $\frac{9}{15}$  (*d*) $\frac{5}{13}$

(*iv*) दी हुई त्रिभुज में बिना रंग किया हुआ भाग त्रिभुज का कौन सा भाग दर्शाता है ?

(*a*) $\frac{1}{3}$  (*b*) $\frac{3}{4}$

(*c*) $\frac{1}{4}$  (*d*) $\frac{2}{3}$



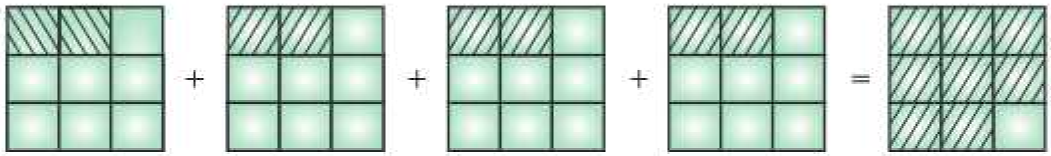
(*v*) $\frac{2}{7}$ और $\frac{3}{4}$ का योग ........ है।

(*a*) $\frac{5}{28}$  (*b*) $\frac{1}{3}$  (*c*) $\frac{5}{11}$  (*d*) $\frac{29}{28}$

## भिन्नों का गुणन (Multiplication of Fractions)

**एक भिन्न का पूर्ण संख्या से गुणन :** हम जानते हैं कि गुणा का मतलब है लगातार जोड़। उदाहरण के लिए, आप जानते हैं कि $4 \times 3$, 4 गुणा 3 को दर्शाता हैं, अर्थात $3 + 3 + 3 + 3 = 12$,

अब, $\frac{2}{9}$ को 4 से गुणा करने पर, हम $\frac{2}{9}$ को चार बार लिख के जोड़ते हैं, अर्थात

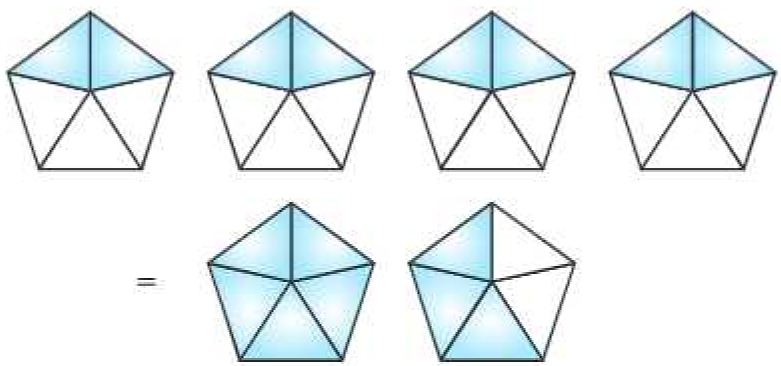


$$4 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2+2+2+2}{9} = \frac{8}{9}$$

आइए एक और उदाहरण देखें,

$$4 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2+2+2+2}{5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

$4 \times \frac{2}{5}$ को नीचे दी आकृति के अनुसार दर्शाया जा सकता है।



इसलिए, किसी पूर्ण संख्या को किसी उचित या विषम, भिन्न से गुणन करने के लिए हम पूर्ण संख्या को भिन्न के अंश से गुणा करते हैं। गुणा करने के बाद, एक नया अंश प्राप्त होता है जबकि गुणफल का हर वही भिन्न वाला हर ही होता है।

**उदाहरण-1 : भिन्न का पूर्ण संख्या से गुणा करो फिर न्यूनतम रूप में लिखो और अगर संभव हो तो मिश्रित भिन्न के रूप में लिखो।**

(*i*) $\mathbf{7 \times \frac{3}{5}}$ (*ii*) $\mathbf{\frac{2}{3} \times 4}$

**हल :** (*i*) $7 \times \frac{3}{5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$

(*ii*) $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

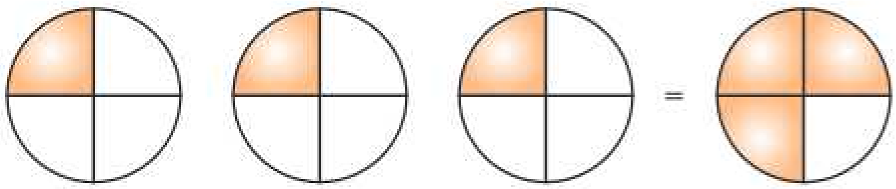
**उदाहरण-2 : 4 को $6\frac{1}{3}$ से गुणा करो और गुणनफल को मिश्रित भिन्न के रूप में दर्शाओ।**

हल : $4 \times 6\frac{1}{3} = 4 \times \left(\frac{18+1}{3}\right)$

$= 4 \times \frac{19}{3} = \frac{76}{3} = 25\frac{1}{3}$

## भिन्न, प्रचालक 'का' के रूप में (Fraction as an Operator 'OF')

आकृति में, चक्कर के छायांकित भाग को ध्यान से देखो। प्रत्येक छायांकित भाग 1 के $\frac{1}{4}$ को निरूपित करता है।



इसलिए, 3 छायांकित भाग 3 के $\frac{1}{4}$ को निरूपित करता है।

3 छायांकित भाग मिलकर 1 के $\frac{3}{4}$ भाग को दर्शाता है।

इसलिए 3 का $\frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

इस तरह, हम देख सकते है कि 'का' गुणन को निरूपित करता है।

**उदाहरण-3 : निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :**

(*i*) 16 का $\frac{3}{4}$ (*ii*) $3\frac{5}{6}$ का $\frac{1}{2}$

हल : (*i*) 16 का $\frac{3}{4}$

$= 16 \times \frac{3}{4} = \frac{48}{4} = 12$

(*ii*) $3\frac{5}{6}$ का $\frac{1}{2}$

$= 3\frac{5}{6}$ का $\frac{1}{2}$

$= \frac{23}{6}$ का $\frac{1}{2}$ $\left[3\frac{5}{6} = \frac{18+5}{6} = \frac{23}{6}\right]$

$= \frac{23}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{23}{12} = 1\frac{11}{12}$

**उदाहरण-4 :** जसबीर की महीनावार वेतन ₹ **8400** है। वह अपनी वेतन का $\frac{1}{4}$ भोजन पर और $\frac{1}{7}$ किराए पर खर्च करता है। वह बचे हुए वेतन का $\frac{1}{3}$ बच्चों की शिक्षा पर खर्च करता है। ज्ञात करो :-

(*i*) वह हर चीज़ पर कितना खर्च करता है ?

(*ii*) सारा खर्च करने के बाद, उसके पास कितने ( राशि ) बचती है ?

**हल :**

भोजन पर किया खर्च = 8400 का $\frac{1}{4}$

$= 8400 \times \frac{1}{4} =$ ₹ 2100

किराए पर किया खर्च = 8400 का $\frac{1}{7}$

$= 8400 \times \frac{1}{7} =$ ₹ 1200

उसके पास बाकी बची राशि = $8400 - 2100 - 1200$

= ₹ 5100

बच्चों की शिक्षा पर किया खर्च = 5100 का $\frac{1}{3}$

$= 5100 \times \frac{1}{3} =$ ₹ 1700

कुल खर्च = $2100 + 1200 + 1700$

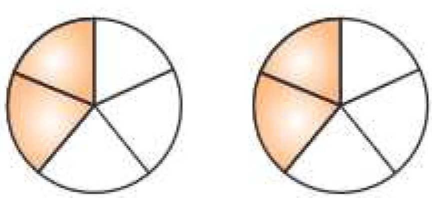
= ₹ 5000

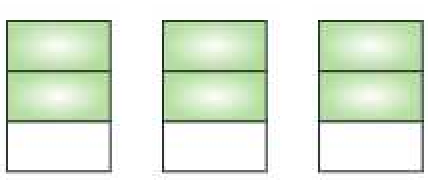
∴ अन्त में, उस के पास बची राशि = $8400 - 5000$

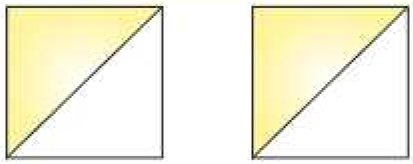
= ₹ 3400

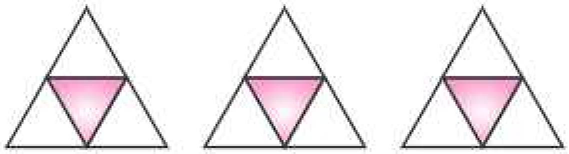
## प्रश्नावली - 2.2

**1.** मिलान करो :-

(a)  (*i*) $3 \times \frac{1}{4}$

(b)  (*ii*) $2 \times \frac{2}{5}$

(c)  (iii) $3 \times \frac{2}{3}$

(d)  (iv) $2 \times \frac{1}{2}$

**2.** **पूर्ण संख्या का भिन्न से गुणन करो, न्यूनतम रूप में लिखो और अगर संभव हो तो मिश्रित भिन्न के रूप में दर्शाओ।**

(*i*) $4 \times \frac{1}{3}$ (*ii*) $11 \times \frac{4}{7}$ (*iii*) $\frac{3}{4} \times 6$

(*iv*) $\frac{9}{7} \times 5$ (*v*) $2\frac{5}{6} \times 4$ (*vi*) $10\frac{5}{6} \times 5$

(*vii*) $5 \times 6\frac{3}{4}$ (*viii*) $3\frac{2}{5} \times 8$

**3.** **हल करो :-**

(*i*) 46 का $\frac{1}{2}$ (*ii*) 27 का $\frac{2}{3}$ (*iii*) 36 का $\frac{1}{3}$

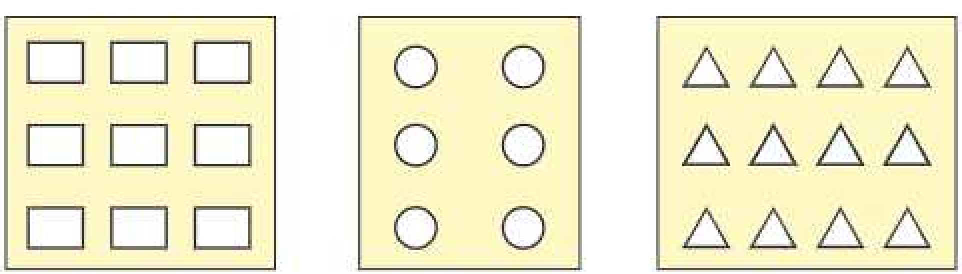
(*iv*) 16 का $\frac{3}{4}$ (*v*) 35 का $\frac{5}{7}$

**4.** **छायांकित करो :-**

(*i*) बॉक्स (*a*) के आयतों का $\frac{1}{3}$ भाग

(*ii*) बॉक्स (*b*) के वृत्तों का $\frac{2}{3}$ भाग

(*iii*) बॉक्स (*c*) के त्रिभुजों का $\frac{1}{2}$ भाग



**(*a*)** **(*b*)** **(*c*)**

5. राहुल हर मास ₹ 44,000 कमाता है। वह हर मास अपने वेतन का $\frac{3}{4}$ खर्च करता है और बाकी वेतन बचत करता है। उसकी महीनावार बचत पता करो।

6. एक किताब की कीमत ₹ $117\frac{1}{2}$ है। 8 किताबों की कीमत पता करो।

7. **बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) $\frac{1}{2} \times 8 =$ .......

(a) 8 (b) 2 (c) 4 (d) 1

(*ii*) 16 का $\frac{3}{2}$ = .........

(a) 48 (b) 8 (c) 3 (d) 24

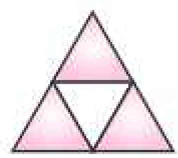
(*iii*) 40 मिनट, 1 घंटें का कितना भाग है ?

(a) $\frac{2}{3}$ (b) 40 (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$

(*iv*) आकृति का छायांकित भाग कौन सी भिन्न को दर्शाता है ?

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$

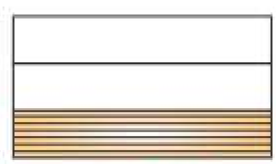


## भिन्न का भिन्न से गुणन (Multiplication of a Fraction by a Fraction)

हम जानके हैं कि 'का' गुणन को निरूपित करता है।

इसलिए $\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ के $\frac{3}{4}$ को निरूपित करता है।

आओ, $\frac{1}{3}$ के $\frac{3}{4}$ का अर्थ समझें :

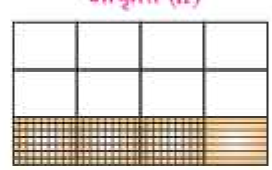


आकृति (*i*)

(*i*) जब पूर्ण को तीन बराबर भागों में बाँटा जाता है, तब $\frac{1}{3}$, एक भाग को दर्शाता है। (आकृति (*i*))

आकृति (*ii*)

(*ii*) $\frac{1}{3}$ का $\frac{3}{4}$, आकृति (*i*) में छायांकित भाग $\frac{1}{3}$ भाग को 4 बराबर भागों में बाँटा जाता है। (आकृति (*ii*))



आकृति (*iii*)

(*iii*) आकृति (*iii*) में दोहरा छायांकित भाग $\frac{1}{3}$ के $\frac{3}{4}$ भाग को निरूपित करता है।

इस प्रकार, दोहरा छायांकित भाग, पूर्ण का $\frac{3}{12}$ भाग दर्शाता है।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि, $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$

$\therefore$ दो भिन्नों का गुणनफल $= \frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$

**उदाहरण-1 : $\frac{3}{7}$ का $\frac{1}{2}$ हल करो।**

हल : $\frac{3}{7}$ का $\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

**उदाहरण-2 :** भिन्नों की गुणा करके न्यूनतम रूप में लिखिए।

(*i*) $\frac{2}{3} \times 2\frac{2}{3}$ (*ii*) $6\frac{2}{5} \times \frac{7}{9}$

हल : (*i*) $\frac{2}{3} \times 2\frac{2}{3}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{8}{3} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$ $\left[2\frac{2}{3} = \frac{3 \times 2 + 2}{3} = \frac{6+2}{3} = \frac{8}{3}\right]$

(*ii*) $6\frac{2}{5} \times \frac{7}{9}$

$= \frac{32}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{224}{45} = 4\frac{44}{45}$

**उदाहरण-3 : राज 1 घंटे में एक किताब का $\frac{1}{5}$ भाग पढ़ता है। $3\frac{2}{3}$ घंटों में वह किताब का कितना भाग पढ़ेगा?**

हल : राज द्वारा 1 घंटे में पढ़ा गया किताब का भाग $= \frac{1}{5}$

इसलिए $3\frac{2}{3}$ घंटो में पढ़ा गया किताब का भाग $= 3\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$

$= \frac{11}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{11}{15}$ $\left[3\frac{2}{3} = \frac{9+2}{3} = \frac{11}{3}\right]$

## भिन्नों के गुणनफल का मूल्य (Value of the Product of Fractions)

(*i*) दो उचित भिन्नों के गुणनफल का मूल्य सदैव दोनों भिन्नों में से प्रत्येक से कम होता है।

**उदाहरण के लिए :** $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

यहाँ, $\frac{3}{14} < \frac{1}{2}$ और $\frac{3}{14} < \frac{3}{7}$

(*ii*) दो अनुचित भिन्नों के गुणनफल का मूल्य, दोनों भिन्नों में से प्रत्येक से अधिक होता है।

**उदाहरण के लिए :** $\frac{4}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{20}{9}$

यहाँ, $\frac{20}{9} > \frac{4}{3}$ और $\frac{20}{9} > \frac{5}{3}$

(*iii*) एक उचित भिन्न और एक विषम भिन्न के गुणनफल का मूल्य, दी हुई विषम भिन्न से कम और दी हुई उचित भिन्न से अधिक होता है।

**उदाहरण के लिए :** $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

यहाँ $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ और $\frac{3}{4} < \frac{3}{2}$

## प्रश्नावली - 2.3

**1.** (*i*) निम्नलिखित भिन्नों का $\frac{1}{3}$ भाग पता करें।

(*a*) $\frac{1}{5}$ (*b*) $\frac{2}{7}$ (*c*) $\frac{3}{2}$

(*ii*) निम्नलिखित भिन्नों का $\frac{3}{4}$ भाग पता करें।

(*a*) $\frac{2}{9}$ (*b*) $\frac{4}{7}$ (*c*) $\frac{8}{3}$

**2.** **भिन्नों की गुणा करो और अगर संभव हो तो न्यूनतम रूप में लिखो।**

(*i*) $\frac{2}{7} \times \frac{7}{9}$ (*ii*) $\frac{1}{3} \times \frac{15}{8}$ (*iii*) $\frac{12}{27} \times \frac{3}{9}$

(*iv*) $\frac{2}{5} \times \frac{6}{4}$ (*v*) $\frac{81}{100} \times \frac{6}{7}$ (*vi*) $\frac{3}{5} \times \frac{5}{27}$

**3.** **निम्नलिखित भिन्नों की गुणा करो।**

(*i*) $\frac{3}{2} \times 5\frac{1}{3}$ (*ii*) $\frac{1}{7} \times 5\frac{2}{3}$ (*iii*) $2\frac{5}{6} \times 4$

(*iv*) $4\frac{1}{3} \times 9\frac{1}{4}$ (*v*) $2\frac{2}{3} \times 3\frac{5}{8}$ (vi) $3\frac{1}{5} \times 2\frac{1}{4}$

**4. निम्नलिखित भिन्नों में से कौन सी भिन्न बड़ी है ?**

(*i*) $\frac{3}{2}$ का $\frac{2}{7}$ या $\frac{5}{2}$ का $\frac{3}{8}$ (*ii*) $\frac{1}{2}$ का $\frac{6}{5}$ या $\frac{1}{3}$ का $\frac{4}{5}$

**5.** यदि एक कार $105\frac{1}{3}$ किलोमीटर प्रति घंटे की गति से चलती है तो $3\frac{2}{3}$ घंटों में कार द्वारा तय की गई दूरी पता करें।

**6.** एक आयताकार प्लाट की लम्बाई $29\frac{3}{7}$ m मी है। अगर प्लॉट की चौड़ाई $12\frac{8}{11}$ m मीटर है तो प्लॉट का क्षेत्रफल पता करें।

**7.** अगर एक कपड़े की कीमत ₹ $120\frac{1}{4}$ प्रति मीटर है, तो $4\frac{1}{3}$ मीटर कपड़े का मूल्य पता करें ?

**8. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) $\frac{8}{3}$ का $\frac{1}{4}$ ...... है।

(a) $\frac{9}{7}$ (b) $\frac{8}{4}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) 1

(*ii*) $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = ?$

(a) 1 (b) $\frac{5}{6}$ (c) 3 (d) $\frac{6}{5}$

(*iii*) दो उचित भिन्नों के गुणनफल का मूल्य

(a) दोनों उचित भिन्नों से अधिक होता है।

(b) दोनों उचित भिन्नों से कम होता है।

(c) दोनों उचित भिन्नों के बीच (मध्य) में होता हैं।

(d) उपर्युक्त में से कोई नहीं।

**9. जाँच करें कि निम्नलिखित समीकरण सही है या गलत ?**

(*i*) $1\frac{2}{3} \times 4\frac{5}{7} = 4\frac{10}{21}$ ? (सही/गलत)

(*ii*) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ ? (सही/गलत)

## भिन्नों की भाग (Division of Fractions)

**भिन्नों का व्युत्क्रम (Reciprocal of a Fraction) :** भिन्न के अंश और हर को परस्पर बदलने पर भिन्न का व्युत्क्रम प्राप्त किया जा सकता है। किसी भिन्न का अपने व्युत्क्रम से गुणनफल सदैव '1' होता है।

उदाहरण के लिए ; $\frac{3}{7}$ का व्युत्क्रम $\frac{7}{3}$ है।

हम देख सकते हैं कि, $\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = 1$

इसलिए, भिन्न $\times$ भिन्न का व्युत्क्रम = 1 है।

**नोट :** किसी भिन्न के व्युत्क्रम को उस भिन्न का गुणन प्रतिलोम भी कहते हैं।

**उदाहरण-1 : (i) $\frac{2}{5}$ (ii) 3 का व्युत्क्रम पता करो।**

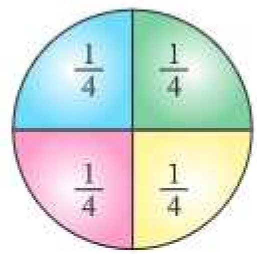
हल : (i) $\frac{2}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{5}{2}$ है।

(ii) 3 का व्युत्क्रम $= \frac{3}{1}$ का व्युत्क्रम $= \frac{1}{3}$

## पूर्ण संख्या से भिन्न की भाग (Division of a whole number by a Fraction )

आओ, $1 \div \frac{1}{4}$ ज्ञात करते हैं।

स्पष्ट रूप से हमने '1' में शामिल $\frac{1}{4}$ भागों की संख्या पता करनी है, ऐसे '$\frac{1}{4}$' भागों की संख्या, $1 \div \frac{1}{4}$ होगी। आकृति को ध्यान से देखो। आप को कितने भाग दिख रहें हैं ?




इसलिए, $1 \div \frac{1}{4} = 4$

इसी तरह, $1 \times \frac{4}{1} = 1 \times 4 = 4$

इसी तरह, $1 \div 4 = 1 \times \frac{1}{4}$

हम देख सकते हैं कि $1 \div \frac{1}{4}$ को हल करते समय '÷' का चिह्न '×' के चिह्न के साथ बदला जाता है और $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{1}$ ( $\frac{1}{4}$ का व्युत्क्रम) के रूप में बदला जाता है।

इसलिए, हम कह सकते है कि पूर्ण संख्या से भिन्न को भाग करते समय हम पूर्ण संख्या को दी हुई भिन्न के व्युत्क्रम के साथ गुणन करते है।

**उदाहरण-2 : $2 \div \frac{2}{3}$ ज्ञात करो।**

हल : $2 \div \frac{2}{3} = 2 \times (\frac{2}{3}$ का व्युत्क्रम)

$= 2 \times \frac{3}{2} = 3$

## पूर्ण संख्या की मिश्रित भिन्न से भाग (Division of a whole number by a Mixed Fraction)

पूर्ण संख्या को मिश्रित भिन्न से भाग करने के लिए, पहले मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न मे परिवर्तित कर के लिखेंगे और फिर, पूर्ण संख्या से विषम भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करेंगे।

**उदाहरण-3 :** $3 \div 2\frac{1}{4}$ **को हल करो।**

**हल :** $3 \div 2\frac{1}{4} = 3 \div \frac{9}{4}$ $\left[2\frac{1}{4} = \frac{8+1}{4} = \frac{9}{4}\right]$

$= 3 \times (\frac{9}{4}$ का व्युत्क्रम)

$= 3 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$

## भिन्न की पूर्ण संख्या से भाग (Division of a Fraction by Whole Number)

**उदाहरण-4 : ज्ञात करो :** (*i*) $\frac{5}{3} \div 2$ (*ii*) $2\frac{2}{3} \div 5$

**हल :** (*i*) $\frac{5}{3} \div 2 = \frac{5}{3} \times \frac{1}{2}$ (2 का व्यूत्क्रम $= \frac{1}{2}$)

$= \frac{5}{6}$

(*ii*) $2\frac{2}{3} \div 5 = \left(\frac{6+2}{3}\right) \div 5 = \frac{8}{3} \div 5$

$= \frac{8}{3} \times \frac{1}{5}$ (5 का व्यूत्क्रम $= \frac{1}{5}$)

$= \frac{8}{15}$

## एक भिन्न की दूसरी भिन्न से भाग (Division of a Fraction by another Fraction)

एक भिन्न को दूसरी भिन्न से भाग करते समय पहली भिन्न को दूसरी भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा किया जाता है।

**उदाहरण-5 : निम्नलिखित को हल करो :-**

(*i*) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$ (*ii*) $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (*iii*) $\frac{2}{3} \div 2\frac{3}{4}$ (*iv*) $2\frac{3}{5} \div 2\frac{1}{5}$

**हल :** (*i*) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ ($\frac{1}{2}$ का व्युत्क्रम $= \frac{2}{1}$)

(*ii*) $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ $\left[2\frac{1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}\right]$

$= \frac{5}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{5}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$

(*iii*) $\frac{2}{3} \div 2\frac{3}{4}$ $\left[2\frac{3}{4} = \frac{8+3}{4} = \frac{11}{4}\right]$

$= \frac{2}{3} \div \frac{11}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{11} = \frac{8}{33}$

मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में परिवर्तित करो।

(*iv*) $2\frac{3}{5} \div 2\frac{1}{5}$ $\left[\begin{array}{l} 2\frac{3}{5} = \frac{10+3}{5} = \frac{13}{5} \\ 2\frac{1}{5} = \frac{10+1}{5} = \frac{11}{5} \end{array}\right]$

$= \frac{13}{5} \div \frac{11}{5} = \frac{13}{5} \times \frac{5}{11} = \frac{13}{11} = 1\frac{2}{11}$

पहली भिन्न को दूसरी भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करो।

## प्रश्नावली - 2.4

**1.** निम्नलिखित भिन्नों के व्युत्क्रम ज्ञात करो।

(*i*) $\frac{2}{7}$ (*ii*) $\frac{3}{2}$ (*iii*) $\frac{5}{7}$

(*iv*) $\frac{1}{9}$ (*v*) $\frac{2}{3}$ (*vi*) $\frac{7}{8}$

**2.** ज्ञात करो। ( भिन्न की पूर्ण संख्या से भाग )

(*i*) $\frac{19}{6} \div 10$ (*ii*) $\frac{4}{9} \div 5$ (*iii*) $\frac{8}{9} \div 8$

(*iv*) $3\frac{1}{2} \div 4$ (*v*) $16\frac{1}{2} \div 5$ (*vi*) $4\frac{1}{3} \div 3$

**3.** ज्ञात करो। ( पूर्ण संख्या की भिन्न से भाग )

(*i*) $8 \div \frac{7}{3}$ (*ii*) $5 \div \frac{7}{5}$ (*iii*) $4 \div \frac{8}{3}$

(*iv*) $3 \div 2\frac{3}{5}$ (*v*) $5 \div 3\frac{4}{7}$

**4.** ज्ञात करो : ( एक भिन्न की दूसरी भिन्न से भाग )

(*i*) $\frac{2}{3} \div \frac{10}{9}$ (*ii*) $\frac{4}{9} \div \frac{2}{3}$ (*iii*) $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$

(*iv*) $\frac{3}{7} \div 1\frac{1}{5}$ (*v*) $5\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{5}$ (*vi*) $3\frac{1}{5} \div 1\frac{2}{3}$

**5.** एक $7\frac{1}{3}$ m मीटर रस्सी में से 11 छोटी रस्सियाँ काटी जाती हैं। प्रत्येक छोटी रस्सी की लम्बाई ज्ञात करो।

**6. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) $\frac{3}{4}$ का व्युत्क्रम

(*a*) $\frac{3}{4}$ (*b*) $\frac{4}{3}$ (*c*) 1 (*d*) इनमें से कोई नहीं।

(*ii*) $\frac{5}{7} \div \frac{7}{5} = ?$

(*a*) 1 (*b*) $\frac{49}{25}$ (*c*) $\frac{25}{49}$ (*d*) $-1$

(*iii*) $\frac{5}{7} \div \frac{5}{7} = ?$

(*a*) 1 (*b*) $\frac{49}{25}$ (*c*) $\frac{25}{49}$ (*d*) $-1$

**7.** (*i*) एक उचित भिन्न का व्युत्क्रम एक अनुचित भिन्न होता है। (सही/गलत)

(*ii*) एक पूर्ण संख्या का व्युत्क्रम एक पूर्ण संख्या ही होता है। (सही/गलत)

## दशमलव संख्याएँ (Decimal Numbers)

आप पिछली कक्षा में दशमलव संख्याओं के बारे में चुके हो कि 10, 100, 1000, ............आदि 'हर' वाली भिन्न को एक और रूप में भी दर्शाया जा सकता है जिसे हम दशमलव संख्याएँ कहते हैं। उदाहरण के लिए : 23.715 में 23 पूर्ण संख्या है और 715 दशमलव भाग है।

आओ, $38\frac{17}{100}$ को देखें।

इस संख्या को प्रसारित रूप में लिख सकते हैं।

$$38\frac{17}{100} = 30 + 8 + \frac{1}{10} + \frac{7}{100}$$

इसको दशमलव के रूप में भी निम्नलिखित अनुसार लिख सकते हैं।

$$38\frac{17}{100} = 30 + 8 + 0.1 + 0.07 = 38.17$$

आप इसको परिवर्तित भी कर सकते हो। उदाहरण के लिए, $135.392 = 100 + 30 + 5 + \frac{3}{10} + \frac{9}{100} + \frac{2}{1000}$

## दशमलव संख्याओं की तुलना (Comparison of Decimal Numbers)

दो दी हुई दशमलव संख्याओं की तुलना करने के लिए, हम पहले इन संख्याओं के पूर्ण भाग की तुलना करेंगे। दी हुई दशमलव संख्याओं में से जिस संख्या का पूर्ण भाग बड़ा होगा वह दशमलव संख्या बड़ी होगी। उदाहरण के लिए 27. 75 > 22. 33, क्योंकि, 27. 75 का पूर्ण भाग '27', 22.33 के पूर्ण भाग '22' से बड़ा है।

भाव, $27 > 22$

अगर, दी हुई दशमलव संख्याओं के पूर्ण भाग बराबर हो तो, हम दशांश स्थान से शुरू करते हुए दशमलव बिंदु के दाईं ओर के अंकों की तुलना करते हैं।

लम्बाई, भार और धन की निम्न इकाई को उच्च इकाई में परिवर्तित करते समय हमें दशमलव की आवश्यकता होती है।

**उदाहरण-1 : कौन सी दशमलव संख्या बड़ी है ? (*i*) 3.86 अथवा 2.38 (*ii*) 5.32 अथवा 5.3215**

हल : (*i*) 3.86 अथवा 2.38

3.86 का पूर्ण भाग 2.38 के पूर्ण भाग से बड़ा है।

$\therefore$ $3.86 > 2.38$

(*ii*) 5.32 और 5.3215

5.3200 यां 5.3215

दोनों दशमलव संख्याओं में पूर्ण भाग बराबर है।

इसलिए दशमलव भाग की तुलना करेंगे।

इन संख्याओं में दशांश और शतांश समान है।

5.3215 का सहस्त्रांश, 5.3200 के सहस्त्रांश से बड़ा है।

$\therefore$ $5.3215 > 5.3200$

भाव $5.3215 > 5.32$

दोनों संख्याओं के बीच दशमलव स्थानों को बराबर बनाना।

**उदाहरण-2 : 7 रुपये 5 पैसे को दशमलव का प्रयोग कर के रुपये के रूप में व्यक्त कीजिए।**

हल : 7 रुपये 5 पैसे

$$= ₹\, 7 + ₹\, \frac{5}{100} = ₹\, 7 + ₹\, 0.05 = ₹\, 7.05$$

**उदाहरण-3 : निम्नलिखित में दशमलव संख्याओं में 3 का स्थानीय मूल्य ज्ञात कीजिए।**

**(*i*) 3.472 (*ii*) 0.43 (*iii*) 54.2738**

हल : (*i*) 3.472 में 3 का स्थानीय मूल्य $= 3$

(*ii*) 0.43 में 3 का स्थानीय मूल्य $= \frac{3}{100}$

(*iii*) 54.2738 में 3 का स्थानीय मूल्य $= \frac{3}{1000}$

## प्रश्नावली - 2.5

1. **निम्नलिखित में से कौन सी दशमलव संख्या बड़ी है ?**

(*i*) 0.9 अथवा 0.4 (*ii*) 1.35 अथवा 1.37

(*iii*) 10.10 अथवा 10.01 (*iv*) 1735.101 अथवा 1734.101

(*v*) 0.8 अथवा 0.88

**2.** **निम्नलिखित दशमलव संख्याओं के प्रसारित विस्तृत रूप लिखो।**

(*i*) 40.38 (*ii*) 4.038

(*iii*) 0.4038 (*iv*) 4.38

**3.** **निम्नलिखित दशमलव संख्याओं में 5 का स्थानीय मूल्य लिखो।**

(*i*) 17.56 (*ii*) 1.253

(*iii*) 10.25 (*iv*) 5.62

**4.** **दशमलव का उपयोग करते हुए निम्नलिखित को रुपये के रूप (₹) में व्यक्त कीजिए।**

(*i*) 55 पैसे (*ii*) 55 रुपये 5 पैसे

(*iii*) 347 पैसे (*iv*) 2 पैसे

**5.** **निम्नलिखित को किलोमीटर (km) में व्यक्त कीजिए।**

(*i*) 350 मीटर (*ii*) 4035 मीटर

(*iii*) 2 किलोमीटर 5 मीटर

**6.** **बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) 3.02 में 2 का स्थानीय मूल्य ............ है।

(a) 2 (b) 20

(c) $\frac{2}{10}$ (d) $\frac{2}{100}$

(*ii*) 0.7, 0.07, 7 का सही आरोही क्रम क्या होगा ?

(a) $7 < 0.07 < 0.7$ (b) $0.07 < 0.7 < 7$

(c) $0.7 < 0.07 < 7$ (d) $0.07 < 7 < 0.7$

(*iii*) 5 किलोग्राम 20 ग्राम का दशमलव रूप .......... है।

(a) 5.2 किलो ग्राम (b) 5.20 किलोग्राम

(c) 5.02 किलो ग्राम (d) उपर्युक्त में से से कोई नहीं।

(*iv*) 2.38 का विस्तृत रूप ......... है।

(a) $2 + \frac{38}{10}$ (b) $2 + 3 + \frac{8}{10}$

(c) $\frac{238}{100}$ (d) $2 + \frac{3}{10} + \frac{8}{100}$

## दशमलव संख्याओं का गुणन (Multiplication of Decimal Numbers)

आओ, $11.34 \times 2.3$ पता करें।

$$11.34 \times 2.3 = \frac{1134}{100} \times \frac{23}{10} = \frac{26082}{1000} = 26.082$$

उपर्युक्त उदाहरण में, हमने दशमलव संख्याओं को भिन्न के रूप में परिवर्तित किया, भिन्न को भिन्न से गुणा किया और अंत में गुणनफल को दशमलव संख्या में लिखा।

- दशमलव संख्याओं का गुणन करने के लिए कुछ और भी विधियाँ हैं।

### दशमलव संख्याओं की 10, 100 और 1000 से गुणा

(*i*) किसी दशमलव संख्या को 10 से गुणा करने पर, दी हुई दशमलव संख्या का दशमलव बिंदु दाईं तरफ एक स्थान से विस्थापित होता है।

(*ii*) किसी दशमलव संख्या को 100 से गुणा करने पर, दी हुई दशमलव संख्या का दशमलव बिंदु दाईं तरफ दो स्थान से विस्थापित होता है।

(*iii*) किसी दशमलव संख्या को 1000 से गुणा करने पर, दी हुई दशमलव संख्या का दशमलव बिंदु दाईं तरफ तीन स्थान से विस्थापित होता है।

भाव, जब किसी दशमलव संख्या को 10, 100 अथवा 1000 से गुणा किया जाता है तो गुणनफल के अंक वही होते हैं परन्तु गुणनफल में दशमलव बिंदु दाईं तरफ उतने ही स्थानों से विस्थापित होता है जितने '1' से अतिरिक्त शून्य होते हैं।

**उदाहरण-1 : मूल्य ज्ञात करो : (*i*) 15.23 × 10 (*ii*) 2.457 × 1000 (*iii*) 3.7 × 100**

हल : (*i*) $15.23 \times 10$
$= 152.3$

क्योंकि 10 में केवल एक शून्य है इसलिए दशमलव बिंदु दाईं तरफ एक स्थान से विस्थापित होता है।

(*ii*) $2.457 \times 1000$
$= 2457$

1000 में तीन शून्य है इसलिए दशमलव बिंदु दाईं तरफ तीन स्थान से विस्थापित होता है।

(*iii*) $3.7 \times 100$
ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3.7 = 3.70$
$= 3.70 \times 100$
$= 370$

100 में दो शून्य है इसलिए दशमलव बिंदु दाईं तरफ दो स्थान से विस्थापित होता है।

## दशमलव संख्या की पूर्ण संख्या से गुणा (Multiplication of a decimal by whole number)

### दशमलव संख्या को पूर्ण संख्या से गुणा करने के लिए :

(*i*) सर्वप्रथम, दशमलव बिंदु को छोड़कर दशमलव संख्या की पूर्ण संख्या से गुणा करो।

(*ii*) फिर, प्राप्त गुणनफल में दशमलव बिंदु इस प्रकार लगाओ कि दशमलव बिंदु के दाईं तरफ उतने ही अंक हों जितने की दशमलव संख्या में हैं।

**उदाहरण-2 : गुणनफल पता करो।**

**(*i*) 1.3 × 7 (*ii*) 3.75 × 12 (*iii*) 0.02 × 15**

हल : (*i*) 1.3 में दशमलव बिंदु छोड़कर 13 प्राप्त होता है।
अब $13 \times 7 = 91$
$\therefore$ $1.3 \times 7 = 9.1$ ($\because$ 1.3 में दशमलव बिंदु के दाईं ओर एक ही अंक है)

(*ii*) $3.75 \times 12$
3.75 में दशमलव बिंदु को छोड़कर 375 प्राप्त होता है।
अब, $375 \times 12 = 4500$
$\therefore$ $3.75 \times 12 = 45.00$ ($\because$ 3.75 में दशमलव बिंदु के दाईं ओर दो अंक हैं।)
$= 45$

(*iii*) $0.02 \times 15$

0.02 में दशमलव बिंदु को छोड़कर

002 भाव 2 प्राप्त होता है।

अब $2 \times 15 = 30$

$\therefore$ $0.02 \times 15 = 0.30$ ($\because$ 0.02 में दशमलव बिंदु के दांई ओर दो अंक है।)

## दो दशमलव संख्याओं का गुणन (Multiplication of two decimal numbers)

### दो दशमलव संख्याओं की गुणा करने के लिए

(*i*) पहले, दी हुई दशमलव संख्याओं को दशमलव बिंदु के बिना, पूर्ण संख्याओं के रुप में गुणा करो।

(*ii*) फिर, गुणनफल में दांईं तरफ से उतने ही अंक छोड़कर दशमलव बिंदु लगाओ जितने गुणा होने वाली दशमलव संख्याओं में दशमलव स्थानों का जोड़ हो।

**उदाहरण-3 : गुणनफल पता करो।**

**(*i*) $1.25 \times 3.1$ (*ii*) $1.01 \times 10.01$ (*iii*) $0.75 \times 2.1$**

हल : (*i*) $1.25 \times 3.1$

दशमलव बिंदुओं को छोड़कर

पहले 125 को 31 से गुणा करें।

अब, $125 \times 31 = 3875$

1.25 में दशमलव के बाद अंक 2 हैं। और 3.1 में दशमलव के बाद अंक 1 है।

दी हुई दशमलव संख्याओं में दशमलव के बाद, कुल अंक $= 2 + 1 = 3$

$\therefore$ इसलिए, गुणनफल में दशमलव बिंदु के बाद 3 अंक होंगे।

$\therefore$ $1.25 \times 3.1 = 3.875$

(*ii*) $1.01 \times 10.01$

दशमलव बिंदुओं को छोड़कर पहले 101 को 1001 से गुणा करो।

अब, $101 \times 1001 = 101101$

दी हुई दशमलव संख्याओं में दशमलव बिंदु के बाद, कुल अंक $= 2 + 2 = 4$

$\therefore$ गुणनफल में, दांईं ओर से 4 अंक छोड़कर दशमलव लगेगा।

$\therefore$ $1.01 \times 10.01 = 10.1101$

(*iii*) $0.75 \times 2.1$

दशमलव बिंदुओं को छोड़कर, पहले 75 को 21 से गुणा करो।

अब $75 \times 21 = 1575$

दी हुई दशमलव संख्याओं में, कुल दशमलव अंक $= 2 + 1 = 3$ है।

$\therefore$ गुणनफल में दांईं ओर सें 3 अंक छोड़कर दशमलव बिंदु लगेगा।

$\therefore$ $0.75 \times 2.1 = 1.575$

**उदाहरण-4 : एक आयत की लम्बाई 8.5 cm सेमी और चौड़ाई 5.7 cm सेमी है। आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करो।**

हल : आयत की लम्बाई = 8.5 cm

आयत की चौड़ाई = 5.7 cm

$\therefore$ आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= $8.5 \text{ cm} \times 5.7 \text{ cm}$

= 48.45 sq. cm

## प्रश्नावली - 2.6

1. निम्नलिखित का गुणनफल पता करो।
   (*i*) $1.31 \times 10$
   (*ii*) $25.7 \times 10$
   (*iii*) $1.01 \times 100$
   (*iv*) $0.45 \times 100$
   (*v*) $9.7 \times 100$
   (*vi*) $3.87 \times 10$
   (*vii*) $0.07 \times 10$
   (*viii*) $0.3 \times 100$
   (*ix*) $53.7 \times 1000$
   (*x*) $0.02 \times 1000$
2. निम्नलिखित का गुणनफल पता करो।
   (*i*) $1.5 \times 3$
   (*ii*) $2.71 \times 12$
   (*iii*) $7.05 \times 4$
   (*iv*) $0.05 \times 12$
   (*v*) $112.03 \times 8$
   (*vi*) $3 \times 7.53$
3. निम्नलिखित के मूल्य पता करो।
   (*i*) $3.7 \times 0.4$
   (*ii*) $2.75 \times 1.1$
   (*iii*) $0.07 \times 1.9$
   (*iv*) $0.5 \times 31.83$
   (*v*) $7.5 \times 5.7$
   (*vi*) $10.02 \times 1.02$
   (*vii*) $0.08 \times 0.53$
   (*viii*) $21.12 \times 1.21$
   (*ix*) $1.06 \times 0.04$
4. तार के एक टुकड़े को 15 बराबर भागों में बांटा जाता है। यदि एक भाग की लम्बाई 2.03 m मी. है तो तार की कुल लम्बाई पता करो।
5. एक मीटर कपड़े का मूल्य ₹ 75.80 है। 4.75 मीटर कपड़े का मूल्य पता करो।
6. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-
   (*i*) $1.25 \times 10 = ?$
   (a) 0.125 (b) 125
   (c) 12.5 (d) 1.25
   (ii) यदि $x \times 100 = 135.72$ हो तो, $x$ का मूल्य क्या होगा ?
   (a) 13.572 (b) 1.3572
   (c) 135.72 (d) 13572
   (*iii*) $1.5 \times 8$ का मूल्य .......... है।
   (a) 1.2 (b) 120
   (c) 12 (d) 0.12
7. (*i*) एक दशमलव संख्या और शून्य का गुणनफल सदैव शून्य होता है। (सही/गलत)
   (*ii*) एक दशमलव संख्या को 10 से गुणा करने, पर दशमलव बिंदु बाईं ओर एक स्थान से विस्थापित होता है। (सही/गलत)

## दशमलव संख्याओं की भाग :– (Division of Decimal Numbers)

### दशमलव संख्याओं की 10, 100 और 1000 से भाग

(*i*) दशमलव संख्या को 10 से भाग करने पर भागफल में दशमलव बिंदु बाईं तरफ एक स्थान से विस्थापित होता है।

(*ii*) दशमलव संख्या को 100 से भाग करने पर भागफल में दशमलव बिंदु बाईं तरफ दो स्थानों से विस्थापित होता है।

(*iii*) दशमलव संख्या को 1000 से भाग करने पर भागफल में दशमलव बिंदु बाईं तरफ तीन स्थानों से विस्थापित होता है।

अर्थात, किसी दशमलव संख्या को 10, 100 अथवा 1000 से भाग करने पर संख्या और भागफल के अंक एक जैसे हैं परंतु भागफल में दशमलव बिंदु बाईं तरफ उतने ही स्थानों से विस्थापित हो जाता है जितने 1 के साथ शून्य होते हैं।

**उदाहरण-1 : निम्नलिखित का मूल्य ज्ञात करो।**

**(*i*) 25.73 ÷ 10 (*ii*) 15.3 ÷ 100 (*iii*) 3.25 ÷ 1000**

हल : (*i*) $25.73 \div 10$

$$= 25.73 \times \frac{1}{10}$$

$$= 2.573$$

> 10 में एक शून्य होने के कारण दशमलव बिंदु बाईं तरफ 1 स्थान से विस्थापित होता है।

(*ii*) $15.3 \div 100$

$$= 15.3 \times \frac{1}{100}$$

$$= 0.153$$

> 100 में 2 शून्य होने के कारण दशमलव बिंदु बाईं तरफ 2 स्थान से विस्थापित होता है।

(*iii*) $3.25 \div 1000$

$$= 3.25 \times \frac{1}{1000}$$

$$= 0.00325$$

> 1000 में 3 शून्य होने के कारण दशमलव बिंदु बाईं तरफ तीन स्थान से विस्थापित होता है।

## दशमलव संख्या की पूर्ण संख्या से भाग (Division of a decimal number by whole number)

दशमलव संख्या को पूर्ण संख्या से भाग करने के लिए, दशमलव संख्या को भिन्न के रूप में लिखो, जिसका हर 10, 100 अथवा 1000 होगा। प्राप्त भिन्न को पूर्ण संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करनके जो भिन्न प्राप्त होगी उसे फिर से दशमलव रूप में परिवर्तित करें।

उदाहरण के लिए, 3.45 को 5 से भाग करने के लिए

भाव $3.45 \div 5$

**पग I** : 3.45 को भिन्न रूप मे $\frac{345}{100}$ लिखो।

**पग II** : $\frac{345}{100}$ को 5 के व्युत्क्रम से गुणा करो।

भाव, $\frac{345}{100} \times \frac{1}{5}$ करके $\frac{69}{100}$ प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{r|l} 5\overline{)345} & 69 \\ -30 & \\ \hline 45 & \\ 45 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

**पग III** : $\frac{69}{100}$ को दशमलव संख्या के रूप में व्यक्त करो, = 0.69

$\therefore \quad 3.45 \div 5 = 0.69$

> **टिप्पणी :** यहाँ और इससे अगले परिच्छेद (एक दशमलव संख्या का दूसरी दशमलव संख्या से भाग) में हमने केवल ऐसे विभाजनों की चर्चा की है जिनमें, दशमलव को छोड़कर अंश स्थान में आने वाली संख्या को हर स्थान में आने वाली संख्या से पूरी तरह विभाजित किया जा सकेगा अर्थात शेषफल के रूप में शून्य प्राप्त होगा। यद्यपि ऐसी भी स्थितियाँ हैं जिनमें कोई संख्या किसी दूसरी संख्या से पूरी तरह विभाजित नहीं की जा सकती अर्थात शेषफल के रूप में शून्य को प्राप्ति नहीं होती है उदाहरणत : $145 \div 7$, ऐसी स्थितियों के बारे में हम अगली कक्षा में चर्चा करेंगे।

**उदाहरण-2 : मूल्य ज्ञात करो। (*i*) 13.6 ÷ 4 (*ii*) 73.282 ÷ 11**

हल : (*i*) $13.6 \div 4$

$= \frac{136}{10} \div 4$

$= \frac{136}{10} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{34}{10}$

$= 3.4$

4)136(34
−12
16
16
×

(*ii*) $73.282 \div 11$

$= \frac{73282}{1000} \div 11$

$= \frac{73282}{1000} \times \frac{1}{11}$

$= \frac{66\,62}{1000}$

$= 6.662$

11)73285(6662
−66
72
−66
68
−66
22
22
×

## एक दशमलव संख्या का दूसरी दशमलव संख्या से भाग (Division of a decimal number by another decimal number)

एक दशमलव संख्या को दूसरी दशमलव संख्या से भाग करने के लिए, दोनों दी हुई दशमलव संख्याओं को भिन्न के रूप में व्यक्त करो। फिर, एक भिन्न को दूसरी भिन्न से भाग करने की विधि को अपनाते हुए, हल करो। हल करने के बाद जो भिन्न प्राप्त हो उसे पुण: दशमलव रूप में परिवर्तित करो।

उदाहरण के लिए, 2.55 को 0.05 से भाग करने के लिए,

भाव $25.5 \div 0.5$

$= \frac{255}{100} \div \frac{5}{10}$

$= \frac{255}{100} \div \frac{10}{5}$

$= \frac{51}{10}$

$= 5.1$

5)255(51
−25
05
−5
0

**उदाहरण-3 : ज्ञात करो। (*i*) 31.5 ÷ 1.5 (*ii*)12.42 ÷ 1.8**

हल : (*i*) $31.5 \div 1.5$

$\frac{315}{10} \div \frac{15}{10}$

$= \frac{315}{10} \times \frac{10}{15} = 21$

(*ii*) $12.42 \div 1.8$

$$= \frac{1242}{100} \div \frac{18}{10}$$

$$= \frac{1242}{100} \times \frac{10}{18}$$

$$= \frac{69}{10}$$

$$= 6.9$$

**उदाहरण-4 : 1.3, 3.2, 1.7 और 0.6 की औसत पता करो।**

हल : 1.3, 3.2, 1.7 और 0.6 की औसत

$$= \frac{1.3+3.2+1.7+0.6}{4}$$

$$= \frac{6.8}{4} = 1.7$$

**उदाहरण-5 : 4.5 लीटर पेट्रोल से एक कार 79.2 km कि. मी. की दूरी तय करती है। एक लीटर में कार द्वारा तय की दूरी ज्ञात कीजिए।**

हल : 4.5 लीटर पेट्रोल में तय की दूरी = 79.2 km

1 लीटर पेट्रोल में तय की दूरी = $\frac{79.2}{4.5} = 17.6$ km

## प्रश्नावली - 2.7

1. **निम्नलिखित में दशमलव संख्याओं को 10, 100 अथवा 1000 से भाग करके, हल करो।**
   (*i*) $2.7 \div 10$ (*ii*) $3.35 \div 10$ (*iii*) $0.15 \div 10$
   (*iv*) $32.7 \div 10$ (*v*) $5.72 \div 100$ (*vi*) $23.75 \div 100$
   (*vii*) $532.73 \div 100$ (*viii*) $1.321 \div 100$ (*ix*) $2.5 \div 1000$
   (*x*) $53.83 \div 1000$ (*xi*) $217.35 \div 1000$ (*xii*) $0.2 \div 1000$
2. **दशमलव संख्या को पूर्ण संख्या से भाग करके, हल करो।**
   (*i*) $7.5 \div 5$ (*ii*) $16.9 \div 13$ (*iii*) $65.4 \div 6$
   (*iv*) $0.121 \div 11$ (*v*) $11.84 \div 4$ (*vi*) $47.6 \div 7$
3. **दशमलव संख्या को दूसरी दशमलव संख्या से भाग करके, हल करो।**
   (*i*) $3.25 \div 0.5$ (*ii*) $5.4 \div 1.2$ (*iii*) $26.32 \div 3.5$
   (*iv*) $2.73 \div 13$ (*v*) $12.321 \div 11.1$ (*vi*) $0.0018 \div 0.15$
4. एक स्कूल ने 25 स्टील की कुर्सियाँ ₹ 11, 883.75 में खरीदीं। स्टील की एक कुर्सी का मूल्य ज्ञात करो।
5. एक कार 4.5 घंटों में 276.75 km दूरी तय करती है। कार की औसत चाल (गति) कितनी है ?

**6. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) $27.5 \div 10 = ?$

(a) 275 (b) 0.275

(c) 2.75 (d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

(*ii*) $1.5 \div 3$ का मूल्य ....... है।

(a) 5 (b) 0.05

(c) 0.5 (d) 4.5

(*iii*) संख्याओं 1.1, 2.1 अथवा 3.1 की औसत ..... है।

(a) 2.5 (b) 1.1

(c) 2.1 (d) 6.3

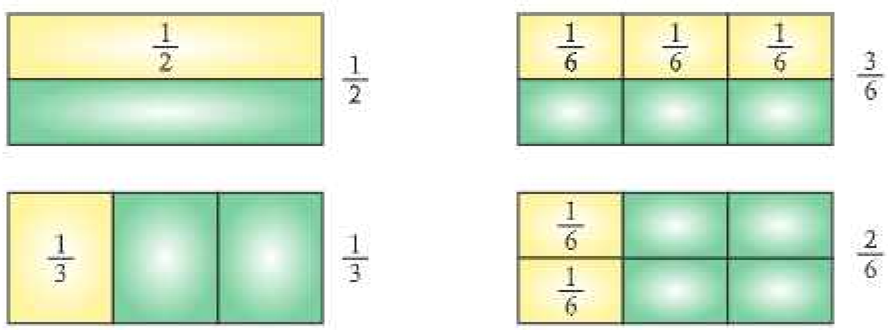
**7.** एक दशमलव संख्या को 100 से भाग करने पर दशमलव बिंदु बाई तरफ एक स्थान से विस्थापित होता है। (सही/गलत)

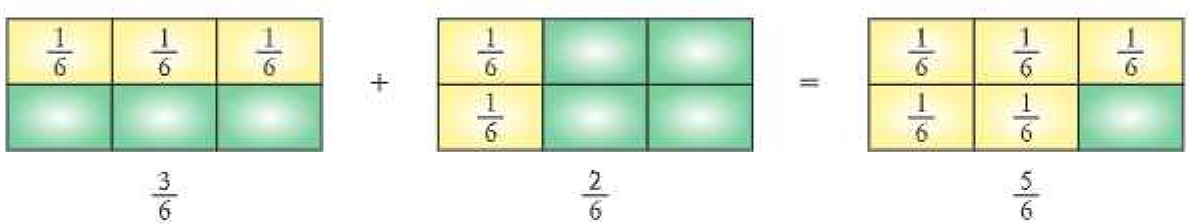
## क्रिया

**उद्देश्य : क्रिया के द्वारा दो असमान भिन्नों का जोड़ ( योग ) ज्ञात करना।**

**आवश्यक सामग्री :** कागज़, स्केल, पेंसिल, रंगदार पेंसिल।

**विधि :** मान लो, भिन्न $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$. का योग ज्ञात करना है। 2 और 3 का ल. स. व. 6 है। अब, निम्नलिखित अनुसार चलिए :-




**निरीक्षण :** दो असमान भिन्नों को जोड़ने के लिए, हरों को समान करने की आवश्यकता होती है जो दोनों हरों का ल.स.व. होता है।

**सीखने का परिणाम :** हम सीखते हैं कि दो असमान भिन्नों का योग करने के लिए उनके हर को समान करना आवश्यक है।

## मौखिक प्रश्न

**प्रश्न 1.** **असमान भिन्नें क्या होती हैं ?**

**उत्तर :** दो या दो से ज्यादा भिन्नें जिनके हर अलग-अलग हो, असमान भिन्नें कहलाती है।

**प्रश्न 2.** **2 और 5 का ल.स.व. क्या है ?**

**उत्तर :** 10

**प्रश्न 3.** **$\frac{3}{5}$ में 'हर' क्या है ?**

**उत्तर :** 5

### हमने क्या चर्चा की ?

1. भिन्न $\frac{a}{b}$ में '$a$' अंश और '$b$' हर है।
2. भिन्नों का वर्गीकरण

| भिन्न के प्रकार | स्थितियाँ |
|---|---|
| उचित भिन्न | अंश, हर से छोटा |
| विषम भिन्न | अंश, हर से बड़ा |
| मिश्रित भिन्न | एक पूर्ण संख्या और एक उचित भिन्न का मिश्रण होता है। |
| समान भिन्न | समान हर वाली भिन्नें |
| असमान भिन्न | विभिन्न हर वाली भिन्नें |
| दशमलव भिन्न | 10, 100, 1000 ......... आदि हर वाली भिन्न |
| साधारण भिन्न | हर का मूल्य 10, 100, 1000 आदि को छोड़कर कोई और संख्या वाली भिन्न |
| तुल्य भिन्न | पूर्ण के एक जैसे भागों को दर्शाने वाली भिन्नें। |

3. भिन्नों का गुणनफल $= \dfrac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$
4. भिन्न, प्रचालक 'का' के रूप में काम करती है। उदाहरणत : 3 का $\frac{1}{3} = 3 \times \frac{1}{3} = 1$
5. एक भिन्न का व्युत्क्रम जानने के लिए हम अंश और हर के स्थान बदल देते हैं।
6. पूर्ण संख्या को एक भिन्न से भाग करने के लिए, हम पूर्ण संख्या को भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।
7. भिन्न को एक पूर्ण संख्या से भाग करने के लिए, हम भिन्न को पूर्ण संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।
8. एक भिन्न को दूसरी भिन्न से भाग करने के लिए हम पहली भिन्न को दूसरी भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।
9. एक दशमलव संख्या को 10, 100, 1000 आदि से गुणा करने पर, हम उस संख्या में दशमलव बिंदु को दाईं तरफ उतने ही स्थान से विस्थापित करते हैं जितने 10, 100, 1000 ......... आदि में शून्यों की संख्या होती है।

10. एक दशमलव संख्या को एक पूर्ण संख्या से गुणा करने के लिए दी हुई दशमलव संख्या (बिना दशमलव बिंदु के) को पूर्ण संख्या से गुणा करते हैं। गुणनफल में दाईं तरफ से उतने ही अंक छोड़कर दशमलव बिंदु लगाया जाता है जितने दी हुई दशमलव संख्या में दशमलव के बाद अंक हैं।
11. एक दशमलव संख्या को दूसरी दशमलव संख्या से गुणा करने के लिए, दोनों दशमलव संख्याओं को (बिना दशमलव बिंदु के) पूर्ण संख्या के रूप में गुणा करते हैं। और फिर गुणनफल में दाईं तरफ से उतने ही अंक छोड़कर दशमलव बिंदु लगाया जाता है जितने दोनों दशमलव संख्याओं में दशमलव के बाद कुल अंक हों।
12. एक दशमलव संख्या को 10, 100, 1000 आदि से भाग करने के लिए, दशमलव संख्या में दशमलव बिंदु को बाईं तरफ उतने ही स्थान से विस्थापित करते हैं जितने 10, 100, 1000 ......... आदि में शून्यों की संख्या होती है।
13. एक दशमलव संख्या को एक पूर्ण संख्या से भाग करने के लिए, दशमलव संख्या को पहले भिन्न के रूप में लिखते हैं और फिर दी हुई पूर्ण संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं। प्राप्त गुणनफल को फिर दशमलव रूप मे व्यक्त करते हैं।
14. दो दशमलव संख्याओं को भाग करने के लिए सर्वप्रथम दोनों दशमलव संख्याओं को भिन्न रूप मे व्यक्त करते हैं। फिर, एक भिन्न को दूसरी भिन्न से भाग करने की विधि को अपनाते हुये, गुणा करते हैं। प्राप्त भिन्न को फिर दशमलव रूप में व्यक्त करते हैं।

**सीखने के परिणाम**

**अध्याय के पूर्ण होने पर विद्यार्थी**

1. भिन्न का व्युत्क्रम पता करने के योग्य हैं।
2. भिन्नों का गुणन और भाग करने के योग्य हैं।
3. दशमलव संख्याओं का गुणन और भाग, विभिन्न विधियों के साथ करने के योग्य हैं।
4. दैनिक जीवन में भिन्नों और दशमलव संख्याओं से सम्बंधित समस्याओं को हल करने के योग्य हैं।

# उत्तरमाला

## प्रश्नावली 2.1

1. (i) $4\frac{7}{8}$  (ii) $\frac{91}{165}$  (iii) $1\frac{7}{80}$
   (iv) $8\frac{7}{10}$  (v) $4\frac{7}{8}$  (vi) $\frac{819}{1000}$
2. (i) $\frac{2}{17}, \frac{3}{17}, \frac{5}{17}, \frac{8}{17}, \frac{10}{17}, \frac{16}{17}$  (ii) $\frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{7}{10}$
3. $1\frac{8}{15}$ cm
4. $2\frac{13}{15}$ घंटे
5. $46\frac{1}{3}$ m
6. वैभव, $\frac{1}{6}$ घंटे से
7. (i) *a*  (ii) *b*  (iii) *c*
   (iv) *c*  (v) *d*

## प्रश्नावली 2.2

**1.** (*a*) (*ii*) (*b*) (*iii*)
(*c*) (*iv*) (*d*) (*i*)

**2.** (*i*) $1\frac{1}{3}$ (*ii*) $6\frac{2}{7}$ (*iii*) $4\frac{1}{2}$
(*iv*) $6\frac{3}{7}$ (*v*) $11\frac{1}{3}$ (*vi*) $54\frac{1}{6}$
(*vii*) $33\frac{3}{4}$ (*viii*) $27\frac{1}{5}$

**3.** (*i*) 23 (*ii*) 18 (*iii*) 12
(*iv*) 12 (*v*) 25

**5.** ₹ 11000 **6.** ₹ 940

**7.** (*i*) *c* (*ii*) *d*
(*iii*) *a* (*iv*) *c*

## प्रश्नावली 2.3

**1.** (*i*) (*a*) $\frac{1}{15}$ (*b*) $\frac{2}{21}$ (*c*) $\frac{1}{2}$
(*ii*) (*a*) $\frac{1}{6}$ (*b*) $\frac{3}{7}$ (*c*) 2

**2.** (*i*) $\frac{2}{9}$ (*ii*) $\frac{5}{8}$ (*iii*) $\frac{4}{27}$
(*iv*) $\frac{3}{5}$ (*v*) $\frac{243}{350}$ (*vi*) $\frac{1}{9}$

**3.** (*i*) 8 (*ii*) $\frac{17}{21}$ (*iii*) $11\frac{1}{3}$
(*iv*) $40\frac{1}{12}$ (*v*) $9\frac{2}{3}$ (*vi*) $7\frac{1}{5}$

**4.** (*i*) $\frac{5}{2}$ का $\frac{3}{8}$ (*ii*) $\frac{1}{2}$ का $\frac{6}{5}$

**5.** $386\frac{2}{9}$ km **6.** $374\frac{6}{11}$ sq. m **7.** ₹ $521\frac{1}{12}$

**8.** (*i*) *c* (*ii*) *a* (*iii*) *b*

**9.** (*i*) गलत (*ii*) सही

## प्रश्नावली 2.4

**1.** (*i*) $\frac{7}{2}$ (*ii*) $\frac{2}{3}$ (*iii*) $\frac{7}{5}$

(*iv*) 9 (*v*) $\frac{3}{2}$ (*vi*) $\frac{8}{7}$

**2.** (*i*) $\frac{19}{60}$ (*ii*) $\frac{4}{45}$ (*iii*) $\frac{1}{9}$

(*iv*) $\frac{7}{8}$ (*v*) $3\frac{3}{10}$ (*vi*) $1\frac{4}{9}$

**3.** (*i*) $3\frac{3}{7}$ (*ii*) $3\frac{4}{7}$ (*iii*) $1\frac{1}{2}$

(*iv*) $\frac{15}{13}$ (*v*) $1\frac{2}{5}$

**4.** (*i*) $\frac{3}{5}$ (*ii*) $\frac{2}{3}$ (*iii*) $4\frac{1}{6}$

(*iv*) $\frac{5}{14}$ (*v*) $2\frac{1}{2}$ (*vi*) $1\frac{23}{25}$

**5.** $\frac{2}{3}m$

**6.** (*i*) *b* (*ii*) *c* (*iii*) *a*

**7.** (*i*) सही (*ii*) गलत

## प्रश्नावली 2.5

**1.** (*i*) 0.9 (*ii*) 1.37 (*iii*) 10.10

(*iv*) 1735.101 (*v*) 0.88

**2.** (*i*) $4 \times 10 + 0 + 3 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{100}$

(*ii*) $4 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 8 \times \frac{1}{1000}$

(*iii*) $0 + 4 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{1}{100} + 3 \times \frac{1}{1000} + 8 \times \frac{1}{10000}$

(*iv*) $4 + 3 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{100}$

**3.** (*i*) $\frac{5}{10}$ (*ii*) $\frac{5}{100}$ (*iii*) $\frac{5}{100}$ (*iv*) 5

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **4.** | (*i*) | ₹ 0.55 | (*ii*) | ₹ 55.05 | | | | |
| | (*iii*) | ₹ 3.47 | (*iv*) | ₹ 0.02 | | | | |
| **5.** | (*i*) | 0.350*km* | (*ii*) | 4.035*km* | | | | |
| | (*iii*) | 2.005*km* | | | | | | |
| **6.** | (*i*) | *d* | (*ii*) | *b* | | | | |
| | (*iii*) | *c* | (*iv*) | *d* | | | | |

## प्रश्नावली 2.6

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | (*i*) 13.1 | | (*ii*) 257 | | (*iii*) 101 | |
| | (*iv*) 45 | | (*v*) 970 | | (*vi*) 38.7 | |
| | (*vii*) 0.70 | | (*viii*) 30 | | (*ix*) 53700 | |
| | (*x*) 20 | | | | | |
| **2.** | (*i*) 4.5 | | (*ii*) 32.52 | | (*iii*) 28.2 | |
| | (*iv*) 0.6 | | (*v*) 896.24 | | (*vi*) 22.59 | |
| **3.** | (*i*) 1.48 | | (*ii*) 3.025 | | (*iii*) 0.133 | |
| | (*iv*) 15.915 | | (*v*) 42.75 | | (*vi*) 10.2204 | |
| | (*vii*) 0.0424 | | (*viii*) 25.5552 | | (*ix*) 0.0424 | |
| **4.** | 30.45m | | **5.** ₹ 360.05 | | | |
| **6.** | (*i*) *c* | | (*ii*) *b* | | (*iii*) *c* | |
| **7.** | (*i*) सही | | (*ii*) गलत | | | |

## प्रश्नावली 2.7

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1.** | (*i*) 0.27 | (*ii*) 0.335 | (*iii*) 0.015 | |
| | (*iv*) 3.27 | (*v*) 0.0572 | (*vi*) 0.2375 | |
| | (*vii*) 5.3273 | (*viii*) 0.01312 | (*ix*) 0.0025 | |
| | (*x*) 0.05383 | (*xi*) 0.21735 | (*xii*) 0.0002 | |
| **2.** | (*i*) 1.5 | (*ii*) 1.3 | (*iii*) 10.9 | |
| | (*iv*) 0.011 | (*v*) 2.96 | (*vi*) 6.8 | |
| **3.** | (*i*) 6.5 | (*ii*) 4.5 | (*iii*) 7.52 | |
| | (*iv*) 0.21 | (*v*) 1.11 | (*vi*) 0.012 | |
| **4.** | ₹ 475.35 | **5.** 61.5 km/h | | |
| **6.** | (*i*) c | (*ii*) c | | |
| | (*iii*) c | | | |
| **7.** | गलत | | | |

अध्याय 3

R1V4G7

# आँकड़ों का प्रबंधन

**उद्देश्य :-**

**इस अध्याय में आप सीखेगें-**

1. आँकडों को इकट्ठा करना।
2. एकत्रित किऐ आँकड़ों को संगठित करना और भविष्य के संदर्भ के लिए आँकड़ों की व्याख्या करना।
3. दिये हुऐ आँकड़ों की औसत पता करना।
4. दिऐ हुऐ आँकड़ों का बहुलक और माध्यिका पता करने के लिए आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करना।
5. दिऐ आँकड़ों के लिए दंड आलेख या दोहरा आलेख खींचना।
6. दिऐ आँकड़ों के लिए सारे केंद्रीय प्रवृत्ति भाव औसत, बहुलक, माध्यिका के बारे में समझना।
7. दैनिक जीवन में संयोग और प्रायकिता को समझना।
8. सदैव घटित होने वाली घटनाओं की प्रायकिता के बारे में समझना।

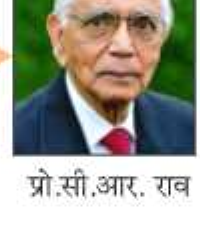
## भूमिका

छठी कक्षा में आपने आँकड़ों को एकत्रित करना, उनको सारणीबद्ध करना तथा उन्हें दंड आलेखों के रूप में प्रदर्शित करना सीखा था। आँकड़ों का संग्रह, आलेखन और प्रस्तुतीकरण, हमें अनुभवों को संगठित करने और उनसे निष्कर्ष निकालने में हमारी सहायता करते हैं।

आजकल, आँकड़ों का प्रबंधन, किसी संस्था या संगठन का सब से महत्त्वपूर्ण कार्य होता है- भाव वह कोई अस्पताल हो जहाँ मरीज़ों से सम्बन्धित आँकड़े संभालने हो या फिर एक स्कूल हो जहाँ विद्यार्थियों के इकट्ठे किए रिकॉर्ड को भविष्य के लिए रखा जाता हो। आँकड़ों के प्रबंधन में आँकड़ों को इकट्ठा करना, उनका आलेखन करना और भिन्न-भिन्न तरीके से उनको प्रस्तुत करना शामिल हैं। आँकड़ों का प्रबंधन, एक आँकड़ा विज्ञानी का मुख्य कार्य है। आँकड़ा विज्ञानी एक पेशेवर होता है जो आँकड़ों का संग्रह कर और आलेखन कर के उसकी व्याख्या करता है। जिसके आधार पर वह भूतकाल में हुई घटनाओं की व्याख्या करते हैं और भविष्य में होने वाली घटनाओं के संकेत देते हैं।

आओ, हम आँकड़ों से संबंधित कुछ मूल संकल्पों को समझने का प्रयास करें। कौन जानता है कि आप में से ही कोई प्रोफेसर सी. आर. राय और कैरन डन्नल की तरह आँकड़ों की दुनिया में अपनी अमिट छाप छोड़ जाए।

***आँकड़ा वैज्ञानिक***



प्रो.सी.आर. राव

कैरन डन्नल

## आँकड़ों का संग्रह (Collection of Data)

आँकड़े, संख्यात्मक तथ्यों का एक ऐसा समूह है जिस का प्रयोग किसी प्रकार की सूचना देने के लिए किया जाता है। आँकड़ों में दी हर संख्या को प्रेक्षण कहते हैं। और जितनी बार एक विशेष प्रेक्षण आता है वह उसकी बारंबारता होती है।

**उदाहरण के लिए :-**

एक सरकारी दफ़्तर में 25 कर्मचारी हैं। उनको उनके बच्चों की गिनती बताने के लिए कहा गया है। परिणाम निम्नलिखित प्रकार से हैं–

1, 2, 3, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 2, 1, 3, 5, 2, 4, 0, 3, 2, 4, 1, 1, 2, 2, 0, 3

हम देखते हैं कि इस सारणी में प्राप्त जानकारी संख्यात्मक रूप में है इसलिए यह आँकड़े है। इस तरह के आँकड़ों को मूल आँकड़ें भी कहते हैं। इन आँकड़ों के आधार पर हमारे लिए निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर देना सरल नहीं होगा। जैसे :-

(*i*) किस कर्मचारी के सब से अधिक बच्चे हैं ?

(*ii*) कितने कर्मचारियों के दो बच्चे हैं ?

(*iii*) कितने कर्मचारियों के दो या दो से अधिक बच्चे हैं ?

(*iv*) कितने कर्मचारियों के दो या दो से कम बच्चे हैं ?

## आँकड़ों को संगठित और सारणीबद्ध करना (Organising and Tabulating Data)

आइए, उपरोक्त आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में क्रमबद्ध करें।

आरोही क्रम में,

0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5

इस रूप में दिऐ आँकड़ों को क्रमबद्ध आँकड़े कहते हैं।

इस तरह के आँकड़ो से बेहतर जानकारी मिलती है। इन आँकड़ों से पहले पूछे प्रश्न का उत्तर देना अब सरल हो गया है-किसी भी कर्मचारी के अधिक से अधिक बच्चों की गिनती 5 हैं। परन्तु बाकी के प्रश्नों के उत्तर देना अभी भी कठिन है। इस के अतिरिक्त, इस तरह क्रमबद्ध करने में समय और मेहनत भी अधिक लगती है, विशेषतौर पर तब जब आँकड़ों की गिनती अधिक हो।

बाकी के प्रश्नों के उत्तर देने और आँकड़ों को सरलता से समझने के लिए हम दिऐ हुए आँकड़ों को सारणीबद्ध करते है। अलग-अलग प्रेक्षणों की बारंबारता दर्शाने वाली सारणी को बारंबारता बंटन या बारंबारता सारणी कहते हैं।

| बच्चों की गिनती ( चल ) | कर्मचारियों की गिनती ( बारंबारता ) |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 1 | 6 |
| 2 | 8 |
| 3 | 4 |
| 4 | 2 |
| 5 | 1 |
| **कुल योग** | **25** |

अब उपर्युक्त सारणी से ऊपर दिए प्रश्नों के उत्तर देना सरल हो गया है।

उन कर्मचारियों की संख्या जिन के 2 बच्चे हैं = 8

उन कर्मचारियों की संख्या जिनके 2 या 2 से कम बच्चे हैं। = 8 + 6 + 4 = 18

उन कर्मचारियों की संख्या जिनके 2 या 2 से अधिक बच्चे हैं। = 8 + 4 + 2 + 1 = 15

## प्रतिनिधि मान (Representative Values)

आप 'औसत' (average) शब्द से अवश्य ही परिचित होगें तथा अपने दैनिक जीवन में औसत शब्द से संबंधित निम्नलिखित प्रकार के कथन अवश्य ही सुने या पढ़े होंगे :-

- गीता अपनी पढ़ाई पर प्रतिदिन औसतन लगभग 5 घंटे का समय व्यतीत करती है।
- जून के महीने में पंजाब का औसत तापमान 40° सेल्सियस (40° C) होता है।
- मेरी कक्षा में विद्यार्थियों की औसत आयु 13 वर्ष है।
- एक स्कूल की वार्षिक परीक्षा के समय विद्यार्थियों की औसत उपस्थिति 96 प्रतिशत थी।

ऊपर दिए हुए कथनों के बारे में सोचिए।

क्या आप सोचते हैं कि पहले कथन में बताया गया बच्चा प्रतिदिन ठीक 6 घंटे पढ़ता है ? अथवा, क्या जून के पूरे महीने पंजाब का तापमान सदैव 40°C होता है ? या, क्या उस कक्षा में प्रत्येक विद्यार्थी की आयु 13 वर्ष है ? स्पष्टत: इन प्रश्नों के उत्तर हैं 'नहीं'।

तब, ये कथन हमें क्या बताते हैं ? औसत से हम समझते हैं कि गीता प्राय: एक दिन में 6 घंटे पढ़ती है। कुछ दिन वह इससे कम घंटे पढ़ती है और कुछ दिन इससे अधिक पढ़ती है।

इसी प्रकार, 40°C के औसत तापमान का अर्थ है जून के महीने में लगभग 40°C तापमान होता है। कभी 40°C से कम और कभी 40°C से अधिक भी हो जाता है।

इस प्रकार हमनें यह अनुभव किया कि औसत (average) एक ऐसी संख्या है जो प्रेक्षणों (observations) या आँकड़ों के एक समूह की केंद्रीय प्रवृत्ति (Central Tendency) को निरूपित करती (या दर्शाती) हैं। क्योंकि औसत सबसे अधिक तथा सबसे कम मूल्य (value) के आँकड़ों के बीच में होता है। इसलिए हम कहते हैं कि औसत, आँकड़ों के एक समूह की केंद्रीय प्रवृति का मापक (measure) है। विभिन्न प्रकार के आँकड़ों की व्याख्या करने के लिए, विभिन्न प्रकार के प्रतिनिधि मूल्यों (representative value) या केंद्रीय मानों (Central value) की आवश्यकता होती है। इनमें से एक प्रतिनिधि मूल्य अंकगणितीय माध्य **(Arithmetic Mean)** है।

## अंकगणितीय माध्य (Arithmetic Mean)

अंकगणितीय माध्य जिसे हम संक्षेप में माध्य कहते हैं, केंद्रीय प्रवृति का एक माप है क्योंकि यह दिए हुए आँकड़ों की औसत मूल्य बताता है।

औसत या अंकगणितीय माध्य (A.M) या केवल माध्य को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है :

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की गिनती}}$$

**उदाहरण-1 : अमन चार क्रमागत दिनों में क्रमशः 3 घंटे, 5 घंटे, 2 घंटे और 6 घंटे पढ़ता है। उसके प्रतिदिन पढ़ने का औसत समय क्या है ?**

हल : अमन के पढ़ने का औसत समय होगा $= \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की गिनती}}$

$$= \frac{3+5+2+6}{4} \text{ घंटे} = \frac{16}{4} = 4 \text{ घंटे}$$

**उदाहरण-2 : एक स्कूल की सातवीं कक्षा में 7 विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ 142, 153, 166, 161, 165, 149, 156 cm है। उनकी औसत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।**

हल : औसत ऊँचाई $= \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की गिनती}}$

$$= \frac{142+153+166+161+165+149+156}{7}$$

$$= \frac{1092}{7} \text{ cm} = 156 \text{ cm}$$

**उदाहरण-3 : प्रथम पाँच अभाज्य संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।**

हल : प्रथम पाँच अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5, 7 और 11 है।

$$\text{माध्य} = \frac{2+3+5+7+11}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$$

इस प्रकार, प्रथम पाँच अभाज्य संख्याओं का माध्य = 5.6

## प्रसार या परिसर (Range)

दिऐ आँकड़ों में, सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के अंतर को प्रेक्षणों का प्रसार या परिसर कहते हैं।

**[प्रसार = सबसे बड़ा प्रेक्षण –सबसे छोटा प्रेक्षण]**

निम्नलिखित उदाहरण देखिए :-

**उदाहरण-4 : गणित की परीक्षा में, विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा (100 मे से) प्राप्त किए गए अंक : 85, 76, 90, 85, 39, 48, 56, 95, 81 अते 75**

**ज्ञात कीजिए-**

**(i) विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त सबसे अधिक अंक और सबसे कम अंक।**

**(ii) प्राप्त अंकों का प्रसार।**

**(iii) समूह द्वारा प्राप्त माध्य अंक।**

हल : (i) अंकों को आरोही क्रम में क्रमबद्ध करने पर,

39, 48, 56, 75, 76, 81, 85, 85, 90, 95

सबसे अधिक अंक = 95

सबसे कम अंक = 39

(ii) अंकों का प्रसार = 95 – 39 = 56

(iii) $$\text{माध्य अंक} = \frac{85+76+90+85+39+48+56+95+81+75}{10}$$

$$= \frac{730}{10} = 73$$

## प्रश्नावली - 3.1

1. **निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य पता करो।**
   (i) 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15
   (ii) 40, 30, 30, 0, 26, 60
2. प्रथम पाँच पूर्ण संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।
3. **एक बल्लेबाज़ ने 6 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए :**
   36, 35, 50, 46, 60, 55
   उसका माध्य स्कोर (score) या रन ज्ञात कीजिए।
4. **एक स्कूल के 10 अध्यापकों की ( वर्षों में ) आयु इस प्रकार है :**
   32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33, 38, 40

(*i*) सबसे बड़ी उम्र वाले और सबसे छोटी उम्र वाले अध्यापक की आयु क्या है ?

(*ii*) अध्यापकों की आयु का प्रसार क्या है ?

(*iii*) इन अध्यापकों की माध्य आयु क्या है ?

**5. एक नगर नें किसी विशेष सप्ताह के 7 दिनों में हुई वर्षा (mm में) निम्नलिखित रूप में रिकॉर्ड की गई :**

| दिन | सोमवार | मंगलवार | बुधवार | बृहस्पतिवार | शुक्रवार | शनिवार | रविवार |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| वर्षा (mm में) | 0.01 | 12.2 | 2.1 | 0.0 | 20.5 | 5.5 | 1.0 |

(*i*) उपरोक्त आँकड़ों से वर्षा का प्रसार ज्ञात कीजिए।

(*ii*) इस सप्ताह की माध्य वर्षा ज्ञात कीजिए।

(*iii*) कितने दिन वर्षा, माध्य वर्षा से कम रही ?

## बहुलक (Mode)

दिए हुए प्रेक्षणों के एक समूह में, सबसे अधिक बार आने वाला प्रेक्षण इस समूह का **बहुलक** कहलाता है।

इस उदाहरण को देखिए :

रेडीमेड कपड़ों का एक दुकानदार कहता है, ''मेरे द्वारा सबसे अधिक माप की बेची गई कमीज़ का माप 90 cm है।''

ध्यान दीजिए कि यहाँ भी दुकानदार की रुचि विभिन्न मापों की बेची गई कमीज़ों की संख्याओं में ही है। वह कमीज के उस माप को देख रहा है, जो सबसे अधिक बिकती है। यह आँकड़ों का एक अन्य प्रतिनिधि मूल्य है। सबसे अधिक बिक्री 90 cm माप की कमीज़ों की है। यह प्रतिनिधि मूल्य आँकड़ों का बहुलक (mode) कहलाता है।

## बड़े आँकड़ों का बहुलक (Mode of Larger Data)

यदि प्रेक्षणों की संख्या बड़ी हो, तो उनको समान मान वाले प्रेक्षणों के रूप में व्यवस्थित करना और फिर उनको गिनना इतना सरल नहीं होता है। ऐसी स्थितियों में, हम आँकड़ों को सारणीबद्ध करते है, जैसा कि आप पिछली कक्षा में कर चुके हैं, आँकड़ों की सारणी बनाने का कार्य **मिलान चिह्नों (tally marks)** से प्रारंभ करते हुए, प्रेक्षणों की बारंबारता (frequency) बनाकर पूरा किया जा सकता है।

**उदाहरण-1 : निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।**

**1, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 2, 2, 4**

हल : दिए आँकड़ों को आरोही क्रम में क्रमबद्ध करें।

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4.

दिए आकड़ों में 2, किसी और संख्या से अधिक बार आया है।

∴ दिए आँकड़ों का बहुलक = 2.

**उदाहरण-2 : टीम के एक समूह में खेले गए मैचों में, जीतने के अंतर गोल में निम्नलिखित हैं :**

**1, 3, 2, 5, 1, 4, 6, 2, 5, 2, 2, 2, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 2 6, 4, 3, 2, 1, 1, 4, 2, 1, 5, 3, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 1, 2**

**इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।**

हल : क्योंकि दिए हुए आँकड़ों की संख्या अधिक है इसलिए इन आँकड़ों को एक सारणी के रूप में लिखें।

| जीतने का (अंतर) | मिलान चिन्ह | मैचों की संख्या |
|---|---|---|
| 1 | ~~IIII~~ IIII | 9 |
| 2 | ~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII | 14 |
| 3 | ~~IIII~~ II | 7 |
| 4 | ~~IIII~~ | 5 |
| 5 | III | 3 |
| 6 | II | 2 |
| **कुल** | | **40** |

इस सारणी को देखकर, हम तुरंत यह कह सकते है कि 2 बहुलक है।

∴ क्योंकि = 2 की बारंबारता सब से अधिक है।

**उदाहरण-3 : निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए :**

**1, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 6, 8, 8, 10**

हल : यहाँ 2 और 5 दोनों ही तीन बार आए हैं।

अत: ये दोनों ही आँकड़ों के बहुलक हैं।

क्या संख्याओं के एक समूह के एक से अधिक बहुलक हो सकते हैं?

## माध्यिका (Median)

हम देख चुके हैं कि कुछ स्थितियों में अंकगणितीय माध्य एक उपर्युक्त केंद्रीय प्रकृत्ति का मापक है तथा कुछ स्थितियों में बहुलक एक उपर्युक्त केद्रीय प्रवृत्ति का मापक है। इसी प्रकार, कुछ ऐसी स्थितियाँ भी हो सकती हैं जहाँ इन दोनों में से कोई भी दिए हुए आँकड़ों का प्रतिनिधि मूल्य नहीं हो सकता। ऐसी हालत में हमें केंद्रीय प्रवृत्ति के किसी ओर माप के बारे में सोचना पड़ेगा। निम्नलिखित आँकड़ों मे देखें जिसमें एक कक्षा के 17 विद्यार्थियों की ऊँचाई दी गई है।

108, 112, 106, 125, 123, 119, 116, 114, 118, 115, 104, 102, 116, 101, 116, 120, 125

आओ, उन्हें आरोही क्रम में व्यक्त करें।

101, 102, 104, 106, 108, 112, 114, 115, 116, 116, 116, 118, 119, 120, 123, 125, 125

इन आँकड़ों में, 116 मध्य मूल्य है क्योंकि 116 दिऐ हुए विद्यार्थियों के समूह को 8 विद्यार्थियों वाले 2 बराबर समूहों में बाँट देते हैं। इस मूल्य (मान) को माध्यिका कहते हैं।

**माध्यक उस मान को बताता है जो आँकड़ों के मध्य में स्थित होता है। ( उनको आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर ) तथा आधे प्रेक्षण इससे अधिक मान वाले होते है और आधे प्रेक्षण इससे कम मान वाले होते हैं। यहाँ हम केवल उन स्थितियों को ही लेंगे, जहाँ प्रेक्षणों की संख्या विषम है।**

**उदाहरण-4 : निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यिका ज्ञात कीजिए।**

**24, 36, 46, 17, 18, 25, 35.**

हल : आँकड़ों को आरोही क्रम मे व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है।

17, 18, 24, 25, 35, 36. 46

मध्य (बीच) वाला प्रेक्षण माध्यिका होता है।

∴ अत: माध्यिका 25 है।

**उदाहरण-5 : निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका पता करे ?**

**2, 0, 4, 12, 10, 6, 8, 5, 7**

हल : आँकड़ों को बढ़ते क्रम में क्रमबद्ध करने पर हमें प्राप्त होता है :

0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12

मध्य वाला प्रेक्षण माध्यिका होता है।

∴ माध्यिका 6 है।

## प्रश्नावली - 3.2

**1. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए।**

3, 1, 5, 6, 3, 4, 5

**2. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।**

2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

**3. गणित की एक परीक्षा में, 15 विद्यार्थियों द्वारा (25 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं :**

19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20

इन आँकड़ों का माध्य, बहुलक और माध्यिका ज्ञात कीजिए। क्या ये तीनों समान हैं ?

**4. एक कक्षा के 15 विद्यार्थियों के भार (kg में) इस प्रकार हैं।**

38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47.

(*i*) इन आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए।

(*ii*) क्या इनके एक से अधिक बहुलक हैं ?

**5. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक और माध्यिका ज्ञात कीजिए।**

13, 16, 12, 14, 19, 12, 14, 13, 14

**6. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।**

12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 15, 16, 16, 15
17, 13, 16, 16, 15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14

**7. बहुवैकल्पिक प्रश्न :**

**(*i*) इन आँकड़ों का बहुलक है।**

3, 5, 1, 2, 0, 2, 3, 5, 0, 2, 1, 6

(*a*) 6 (*b*) 3 (*c*) 2 (*d*) 1

**(*ii*) एक क्रिकेटर ने 7 पारियों में 38, 79, 25, 52, 0, 8, 100 रन बनाए। बनाए गए रनों का प्रसार क्या है ?**

(*a*) 100 (*b*) 92 (*c*) 52 (*d*) 38

**(*iii*) निम्नलिखित में से कौन-सा केंद्रीय प्रवृत्ति का माप नहीं है ?**

(*a*) माध्य (*b*) माध्यिका (*c*) बहुलक (*d*) प्रसार

**(*iv*) 3, 1, 5, 7, 9 का माध्य है।**

(*a*) 6 (*b*) 4 (*c*) 5 (*d*) 0

## दंड आलेख (Bar Graphs)

क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दंड आलेख, आँकड़ों को दर्शाने का एक सरल और प्रभावशाली तरीका है। एक दंड आलेख में, दंडों की ऊँचाई (लम्बाई), प्रेक्षण की बारंबारता को दर्शाती है। एक दंड आलेख में सभी दंडों की चौड़ाई और दो दंडों के बीच दूरी समान होनी चाहिए। एक दंड आलेख में दंड की चौड़ाई का कोई खास महत्त्व नहीं होता। यह केवल आँखों को देखने में अच्छा लगता है। एक दंड आलेख के दोनों अक्षों (धुरों) पर क्या दर्शाया है यह स्पष्ट होना चाहिए।

**एक पैमाना (scale) (या मापदंड) चुनना :** हम जानते हैं कि दंड आलेख समान चौड़ाई के दंडों द्वारा संख्याओं (आँकड़ों का निरूपण है तथा दंडों की लम्बाइयाँ बारंबारताओं और चुने गए स्केल पर निर्भर करती है। उदाहरणार्थ, एक दंड आलेख में, जहाँ संख्याओं को इकाइयों में दर्शाना है, आलेख एक प्रेक्षण के लिए एक इकाई लंबाई निरूपित करता है और यदि उसे संख्याओं को दहाई या सैकड़ों में दर्शाना है, तो एक इकाई लम्बाई 10 या 100 प्रेक्षणों को निरूपित कर सकती है। निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए।

**उदाहरण-1 : एक स्कूल की 6 विभिन्न कक्षाओं के विद्यार्थियों की संख्याएँ नीचे दी गई हैं। इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए :**

| कक्षा | V | VI | VII | VIII | IX | X |
|---|---|---|---|---|---|---|
| विद्यार्थियों की संख्या | 135 | 120 | 95 | 100 | 90 | 80 |

(*i*) आप पैमाना किस प्रकार चुनेगें ?

(*ii*) निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए : किस कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम हैं ? किस कक्षा में न्यूनतम हैं ?

(*iii*) कक्षा 6 के विद्यार्थियों की संख्या का कक्षा 8 के विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।

**हल :** (*i*) **उचित पैमाना चुनिए :** स्केल को 0 से शुरु करें। आँकड़ों का सब से अधिक मूल्य 135 है। इस लिए, स्केल को 135 से कुछ अधिक, मान लीजिए 140 पर समाप्त करते हैं। ऊर्ध्वाधर अक्ष पर समान विभाजन करते हुए, स्केल को इस प्रकार चुनें कि दंड ना तो अधिक बड़े हो और न ही ज्यादा छोटे 0 और 140 तक ही सारे दंड बन जाए। क्षैतिज अक्ष पर कक्षाए अंकित करें।

दिये हुए आँकड़ों को दर्शाने के लिए दंड आलेख निम्नलिखित अनुसार है।

(*ii*) छठी (VI) कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या सब से अधिक है और दसवीं (X) कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या सब से कम है।

(*iii*) छठी कक्षा के विद्यार्थियों की गिनती का आठवीं कक्षा के विद्यार्थियों से अनुपात = 120 : 100 अर्थात 6 : 5 है।

## दोहरा दंड आलेख (Double Bar Graphs)

दोहरा दंड आलेख, एक ऐसा दंड आलेख है जिसमें एक साथ बने दो दंड, आँकड़ों के दो विभिन्न समूहों को दर्शाते हैं। इन आलेखों का प्रयोग एक ही नज़र में दो विभिन्न समूहों की तुलना करने के लिए किया जाता है।

**उदाहरण-2 : एक विद्यार्थी के प्रथम सत्र और द्वितीय सत्र (term) का प्रदर्शन दिया हुआ है। एक उपर्युक्त स्केल चुनकर एक दोहरा दंड आलेख खींचिए और दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :**

| विषय : | अंग्रेज़ी | हिन्दी | गणित | विज्ञान | सामाजिक वि. |
|---|---|---|---|---|---|
| प्रथम सत्र ( अधिकतम अंक 100 ) : | 67 | 72 | 88 | 81 | 73 |
| द्वितीय सत्र ( अधिकतम अंक 100 ) : | 70 | 65 | 95 | 85 | 75 |

उचित पैमाना चुनकर एक दोहरा दंड आलेख बनाए और प्रश्नों का उत्तर दे।

(*i*) किस विषय में विद्यार्थी ने अपने प्रदर्शन में सबसे सुधार किया है ?

(*ii*) किस विषय में सुधार सबसे कम है ?

(*iii*) क्या किसी विषय में प्रदर्शन नीचे गिरा है ?

**हल :** विभिन्न विषयों को X-अक्ष पर अंकित कीजिए और विषयों में प्राप्त अंकों को Y-अक्ष पर अंकित कीजिए।

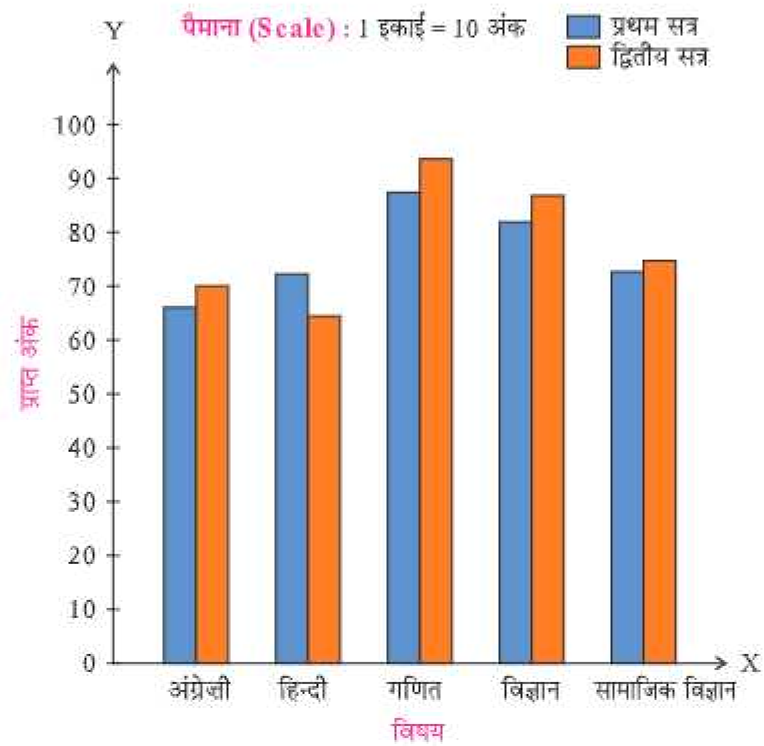
**पैमाना :** Y-अक्ष पर 1 इकाई ऊँचाई = 10 अंक।

दिऐ आँकड़ों का दोहरा दंड आलेख निम्नलिखित अनुसार है।

(*i*) गणित विषय में विद्यार्थियों ने अपने प्रदर्शन में सबसे अधिक सुधार किया है।

(*ii*) सामाजिक विज्ञान विषय में सुधार सबसे कम है।

(*iii*) जी हाँ, हिन्दी विषय में प्रदर्शन नीचे गिरा है।



## प्रश्नावली - 3.3

**1.** **निम्नलिखित आँकड़े किसी कक्षा के छह विद्यार्थियों द्वारा 600 में से किए गए कुल अंकों को दर्शाते हैं। इन्हें एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।**

| विद्यार्थी : | अजय | बाली | दीप्ति | फ़ैयाज़ | गीतिका | हरि |
|---|---|---|---|---|---|---|
| प्राप्तांक : | 450 | 500 | 300 | 360 | 400 | 540 |

**2.** **निम्नलिखित दंड आलेख को पढ़िए जो एक पुस्तक भंडार द्वारा 5 क्रमागत वर्षों में बेची गई पुस्तकों की संख्या दर्शाती है। और आगे आने वाले प्रश्नों के उत्तर दीजिए।**

(*i*) वर्षों 2008, 2009 और 2011 में से प्रत्येक में लगभग कितनी पुस्तकें बेची गई ?

(*ii*) किस वर्ष में लगभग 475 पुस्तकें बेची गई ? किस वर्ष में लगभग 225 पुस्तके बेची गई ?

**3.** **एक स्कूल की छठी और सातवीं कक्षाओं के 200 विद्यार्थियों से उनके मनपसंद रंग का नाम बताने के लिए कहा गया। ताकि यह निर्णय लिया जा सके कि उनके स्कूल के भवन का क्या रंग रखा जाए। इसके परिणाम निम्नलिखित सारणी में दर्शाए गए हैं। इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।**

| मनपसंद रंग | लाल | हरा | नीला | पीला | नारंगी |
|---|---|---|---|---|---|
| विद्यार्थियों की संख्या | 43 | 19 | 55 | 49 | 34 |

इस दंड आलेख की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(*i*) कौन सा रंग सबसे अधिक पसंद किया जाता है ?

(*ii*) कौन सा रंग सबसे कम पसंद किया जाता है ?

(*iii*) कुल कितने रंग है ? और कौन-कौन से हैं।

**4.** **किसी कॉलोनी में किए गए सर्वेक्षण से प्राप्त निम्नलिखित आँकड़ों पर विचार कीजिए :**

| पसंदीदा खेल | क्रिकेट | बास्केट बॉल | तैरना | हॉकी | खेलकूद |
|---|---|---|---|---|---|
| देखना | 1240 | 470 | 510 | 430 | 250 |
| भाग लेना | 620 | 320 | 320 | 250 | 110 |

एक उपर्युक्त पैमाना चुनकर, एक दोहरा दंड आलेख खींचिए।

इस दंड आलेख से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं ?

(*i*) कौन सा खेल अधिक लोकप्रिय है ?

(*ii*) खेलों को देखना अधिक पसंद किया जाता है या उनमें भाग लेना ?

**5. निम्नलिखित सारणी में सातवीं कक्षा के एक विद्यार्थी द्वारा एक दिन में किए जाने वाले विभिन्न कामों में बिताए गए समय के बारे में बताया है।**

| क्रिया (काम) | स्कूल | सोना | खेलना | टी. वी. देखना | पढ़ना | अन्य काम |
|---|---|---|---|---|---|---|
| समय (घंटों में) | 8 | 8 | 1 | 3 | 2 | 2 |

उपर्युक्त सारणी के लिए दंड आलेख खींचिए। इस दंड आलेख से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं ?

## संयोग और प्रायिकता (Chance and Probability)

किसी घटना के होने को संयोग कहते हैं। साधारण शब्दों में, यह किसी घटना के होने की संभावना होती है। निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए और इन शब्दों को समझने का प्रयास कीजिए।

(*i*) सूर्य पश्चिम से निकलता है।

(*ii*) एक चींटी की ऊँचाई 3m हो जाती है।

(*iii*) भारत अगली टेस्ट शृंखला जीतेगा।

यदि आप उपरोक्त कथनों को देखेंगे, तो आप कहेंगे कि पश्चिम से सूर्य का निकलना असंभव (Impossible) है, एक चींटी की ऊँचाई 3m होना भी संभव नहीं है। दूसरी ओर, भारत अगली टेस्ट शृंखला जीत भी सकता है और हार भी सकता है। दोनों ही संभव हैं।

### क्रिया

यदि आप एक सिक्के को उछालें, तो क्या आप सदैव इसकी सही प्रागुक्ति (prediction) कर सकते हैं कि क्या प्राप्त होगा ? आप एक सिक्के को 10 बार उछालकर उससे प्राप्त होने वाले परिणामों को नोट कीजिए। अपने प्रेक्षण निम्नलिखित सारणी के रूप में लिखए।

| उछाल संख्या | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| परिणाम | H | H | T | T | T | H | T | T | H | H |

यहाँ, H चित (head) को निरूपित करता है तथा T पट (tail) को निरूपित करता है।

ये आँकड़े आपको क्या बताते हैं ? क्या आप चित और पट के लिए प्रागुक्तीय प्रतिरूप ज्ञात कर सकते हैं ? स्पष्ट है, यहाँ चित और पट के आने का कोई निश्चित प्रतिरूप नहीं है।

जब आप प्रत्येक बार सिक्के को उछालते हैं तो प्रत्येक उछाल का परिणाम चित या पट में से कोई भी एक हो सकता है। यह संयोग की बात है कि एक विशेष उछाल में आपको इनमें से कोई एक प्राप्त हो।

आपने एक पासे (dice) से साथ भी अवश्य खेला होगा। एक पासे में छह फलक होते हैं। जिसके प्रत्येक फलक पर 1 से 6 तक संख्याएँ अंकित होती हैं। जब आप एक पासे को फेंकते हो, तो क्या आप प्राप्त होने वाली संख्या की प्रागुक्ति कर सकते हैं ? यह संयोग की बात है कि किसी एक उछाल के नतीजे में संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से कोई भी हो सकता है।

## प्रायिकता (Probability)

जब हम किसी सिक्के को उछालते है, तो हम जानते हैं कि इसके दो संभव परिणाम चित या पट हैं। साथ ही, एक पासे को फेंकने पर 6 संभव परिणाम हैं। अपने अनुभव से, हम यह भी जानते हैं कि एक सिक्के के लिए, चित या पट का प्राप्त करना एक समप्रायिक घटना है। हम कहते हैं कि एक चित आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है तथा एक पट आने की प्रायिकता भी $\frac{1}{2}$ हैं।

पासे फेंकने पर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 के आने की संभावनाएँ बराबर हैं। अर्थात पासे के लिए 6 समप्रायिक संभव परिणाम हैं। हम कहते हैं कि 1, 2, 3, 4, 5 और 6 में से प्रत्येक के आने की प्रायिकता $\left(\frac{1}{6}\right)$ है।

किसी घटना E की प्रायिकता को P (E) से लिखा जाता है और इसे निम्नलिखित के अनुसार परिभाषित किया जाता है :

$$P(E) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभव परिणाम}}$$

यह परिभाषा केवल जानकारी हेतु के लिए दी गई है इस का प्रयोग हम अगली कक्षाओं में करेंगे।

कई संभावनाओं वाली घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच में होती है। जिनके घटित होने का कोई संयोग या संभावना नहीं है, उनकी प्रायिकता 0 होती है तथा जिनको निश्चित रूप से घटित होना है, उनकी प्रायिकता 1 होती है।

- एक प्रयोग (experiment) ऐसी स्थिति होती है जिसमें किसी घटना के घटित होने का संयोग शामिल हो।
- एक प्रयोग का निष्कर्ष उसका परिणाम **(outcome)** होता है।
- एक प्रयोग के सारे संभव परिणामों के समूह को **(Sample space)** कहते है।
- एक घटना **(event)** किसी प्रयोग का विशेष परिणाम (outcome) होता हैं।

आइए, निम्नलिखित प्रयोगों पर विचार करें।

**प्रयोग :** एक पासे को फेंकना

**परिणाम :** 1, 2, 3, 4, 5 और 6

**सैंपल स्पेस :** {1, 2, 3, 4, 5, 6}

**घटना :** एक सम संख्या प्राप्त करना।

**उदाहरण-1 : एक थैले में 5 सफेद और 9 लाल गेंदें है। बिना देखे, थैले में से एक गेंद निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि प्राप्त गेंद *(i)* एक सफेद गेंद हो। *(ii)* एक लाल गेंद हो।**

**हल** *(i)* थैले में गेंदों की कुल संख्या = 5 + 9 = 14

एक सफेद गेंद की प्रायिकता = 14 में 5

एक सफेद गेंद की प्रायिकता = $\frac{5}{14}$.

*(ii)* घटना है–लाल गेंद प्राप्त करना।

लाल गेंद की गिनती = 14 में 9

एक लाल गेंद की प्रायिकता = $\frac{9}{14}$.

हमने देखा कि सफेद और लाल गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता 0 और 1 के बीच है।

## प्रश्नावली - 3.4

**1. बताइए कि निम्नलिखित में किसकी होना निश्चित है, किसका होना असंभव है तथा कौन हो भी सकता है परंतु निश्चित रूप से नहीं।**

*(i)* मारुति कार में 200 लोग बैठते हैं।

*(ii)* आप कल से बड़े हो।

*(iii)* एक सिक्के को उछालने पर चित आएगा।

*(iv)* एक पासे को फेंकने पर 8 प्राप्त आएगा।

*(v)* कल बादल घिरे होंगे।

*(vi)* भारत अगली टेस्ट शृंखला जीतेगा।

*(vii)* अगली ट्रैफिक लाइट हरी दिखेगी।

**2.** **एक डिब्बे में 6 कँचे हैं, जिन पर 1 से 6 संख्याएँ अंकित हैं।**

(*i*) संख्या 5 वाले कँचे को निकालने की प्रायिकता क्या है ?

(*ii*) संख्या 2 वाले कँचे को निकालने की प्रायिकता क्या है ?

**3.** दो टीमें A और B हैं। यह निर्णय करने के लिए कि कौन सी टीम खेल शुरू करेगी, एक सिक्का उछाला जाता है। क्या प्रायिकता है कि टीम A शुरूआत करे।

**4.** एक थैले में 3 लाल और 7 हरी गेंदें हैं। बिना देखे थैले में से एक गेंद निकाली जाती है। क्या प्रायिकता है कि निकाली गई गेंद (*i*) लाल हो (*ii*) हरी हो।

**5.** **बहुवैकल्पिक प्रश्न :**

(*i*) किसी असंभव घटना की प्रायिकता है :

(*a*) $-1$ (*b*) $0$ (*c*) $\frac{1}{2}$ (*d*) $1$

(*ii*) 'GIRL' शब्द में G अक्षर चुनने की प्रायिकता क्या है।

(*a*) $1$ (*b*) $\frac{1}{2}$ (*c*) $\frac{1}{4}$ (*d*) $\frac{1}{3}$

(*iii*) एक पासे को गिराने पर, संख्या '4' प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है ?

(*a*) $\frac{1}{2}$ (*b*) $\frac{1}{3}$ (*c*) $\frac{4}{6}$ (*d*) $\frac{1}{6}$

(*iv*) एक थैले में 5 सफेद और 10 काली गेंदें है। थैले में से सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता है :

(*a*) $\frac{5}{10}$ (*b*) $\frac{5}{15}$ (*c*) $\frac{10}{15}$ (*d*) $1$

## हमने क्या चर्चा की ?

**1.** किसी सूचना से संबंधित इकट्ठे किए गए तथ्यों का संख्यात्मक रूप आँकड़े कहलाता है।

**2.** आँकड़ों में एकत्रित की गई संख्याओं को प्रेक्षण कहते हैं।

**3.** आरोही या अवरोही क्रम में संग्रहित आँकड़ों को क्रमबद्ध आँकड़े कहते हैं।

**4.** जितनी बार एक खास प्रेक्षण दिए हुए आँकड़ों में होता है वह उसकी बारंबारता कहलाता है।

**5.** मिलान चिह्न ( | ) प्रेक्षणों की गणना करने में सहायक होते हैं। हम पाँच के समूह के लिए मिलान चिह्न (卌) का प्रयोग करते हैं।

**6.** भिन्न-भिन्न प्रेक्षणों की बारंबारता को दर्शाती सारणी बारंबारता बंटन सारणी कहलाती है।

**7.** आँकड़ों को ऊर्ध्वाधर या क्षैतिज दंड आलेख की मदद से चित्र रूप में दर्शाया जा सकता है।

**8.** दोहरा दंड आलेख, एक नज़र में ही आँकड़ों के दो समूहों की तुलना करने में सहायक होता है।

**9.** माध्य, माध्यिका और बहुलक आँकड़ों के प्रतिनिधि मूल्य या केंद्रीय प्रवृत्ति के मूल्य होता है।

**10.** साधारण आँकड़ों के लिए, माध्य $= \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$ होता है।

**11.** आँकड़ों में सब से अधिक बार आने वाला प्रेक्षण, बहुलक कहलाता है।

**12.** माध्यिका, उस मूल्य को दर्शाता है जो प्रेक्षण के मध्य (बीच) मे होता है। (उन्हें आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद)।

**13.** बहुलक का मूल्य सदैव दिऐ हुए आँकड़ों में से ही एक होता है जबकि माध्यिका और माध्यिका का मान ऐसा भी हो सकता है जो दिऐ आँकड़ों में ना हो।

**14.** माध्य, बहुलक और माध्यिका के मूल्य, सब से छोटे और सबसे अधिक मान वाले प्रेक्षणों के मध्य होता है।

**15.** प्रायिकता, अनिश्चितता का माप है।

### सीखने के परिणाम

**अध्याय के अध्ययन के पूर्ण होने पर विद्यार्थी :**

1. आँकड़े इकट्ठे करने के योग्य हैं।
2. आँकड़ों को संगठित करने और उनकी व्याख्या करने के योग्य हैं।
3. दिऐ हुए साधारण आँकड़ों का माध्य पता करने के योग्य हैं।
4. बहुलक और माध्यिका ज्ञात करने के लिए आँकड़ों को क्रमबद्ध करने के योग्य हैं।
5. दिए आँकड़ों के अनुसार, दंड आलेख और दोहरा दंड आलेख की सहायता से आँकड़ों की व्याख्या करने के योग्य हैं।
6. किसी भी घटना के परिणामों को ज्ञात करने के योग्य हैं।
7. किसी घटना के प्रायिकता ज्ञात करने के योग्य हैं।

## उत्तरमाला

### प्रश्नावली 3.1

**1.** (*i*) 9 (*ii*) 31

**2.** 2

**3.** 47

**4.** (*i*) 54 वर्ष, 23 वर्ष (*ii*) 31 वर्ष (*iii*) 35 वर्ष

**5.** (*i*) 20.5 (*ii*) 5.9 (*iii*) 5 दिन

### प्रश्नावली 3.2

**1.** 3.86

**2.** 2 और 5

**3.** माध्य = 17.5, बहुलक = 20, माध्यिका = 20 ; नहीं

**4.** (*i*) बहुलक = 38 kg, 43 kg., माध्यिका = 40 kg. (*ii*) हाँ

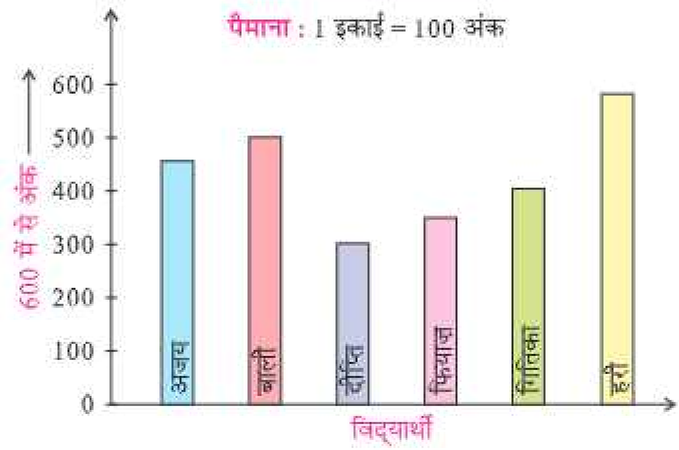
**5.** माध्यिका = 14 बहुलक = 14

**6.** 15.

**7.** (*i*) *c* (*ii*) *a* (*iii*) *d* (*iv*) *c*

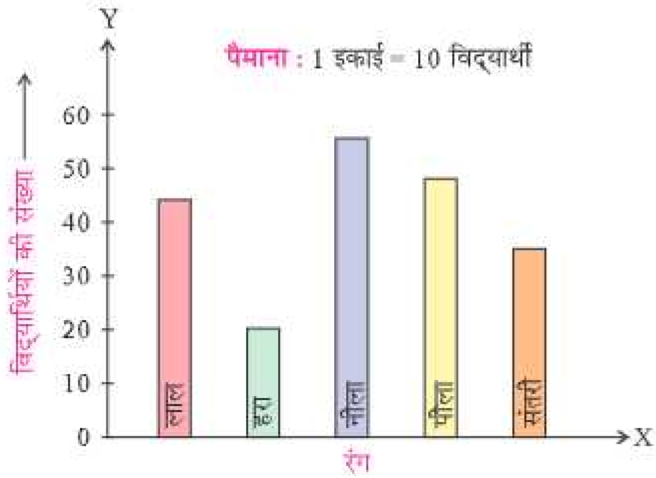
## प्रश्नावली 3.3

**1.**



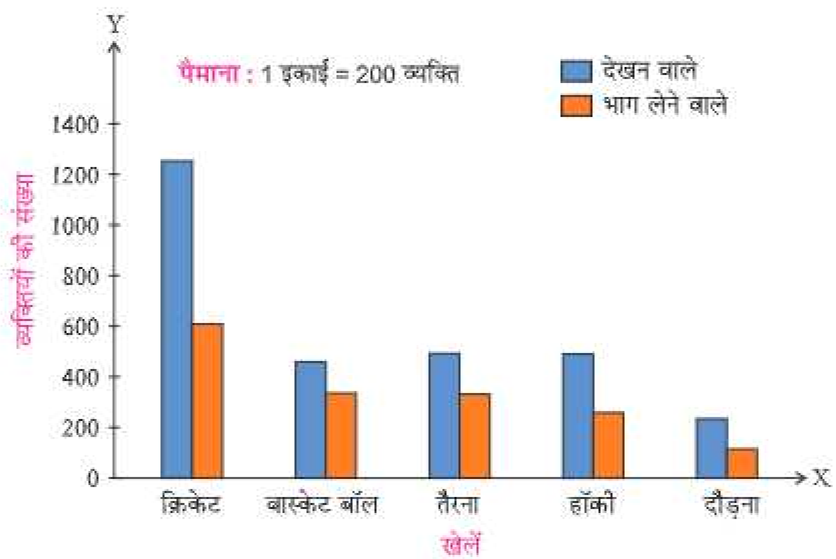

**2.** (*i*) 140 ; 360 ; 180 (*ii*) 2012 ; 2010

**3.**



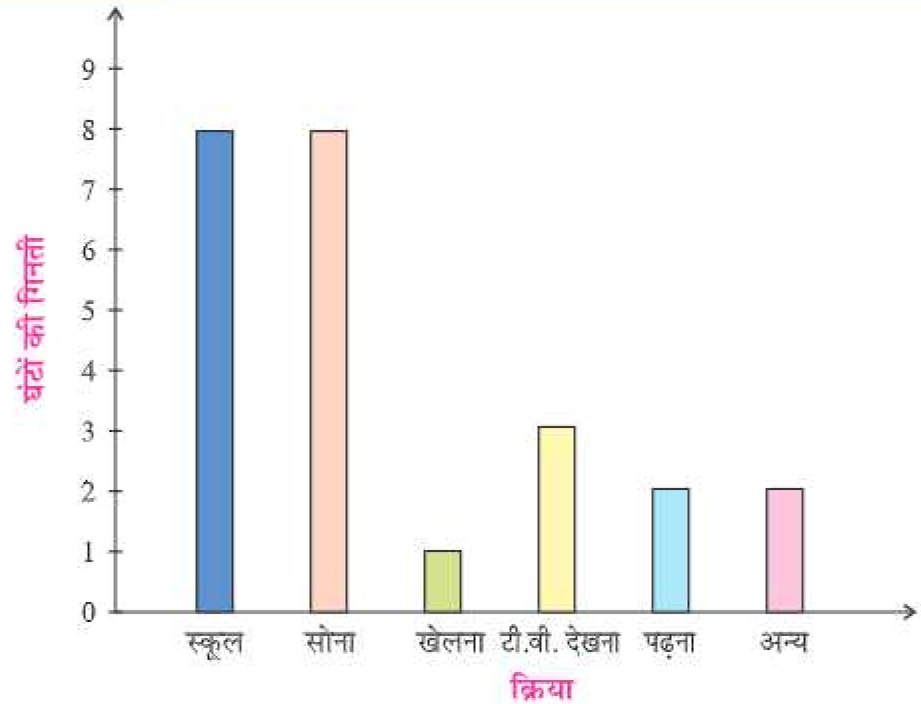

(*i*) नीला (*ii*) हरा (*iii*) 5 ; लाल, हरा, नीला, पीला, संतरी

**4.**




(*i*) क्रिकेट (*ii*) देखने वाले

**5.**




## प्रश्नावली 3.4

**1.** (*i*) असंभव

(*ii*) निश्चित है

(*iii*) हो भी सकता है परंतु निश्चित रूप से नहीं।

(*iv*) असंभव

(*v*) हो भी सकता है परंतु निश्चित रूप से नहीं।

(*vi*) हो भी सकता है परंतु निश्चित रूप से नहीं।

(*vii*) हो भी सकता है परंतु निश्चित रूप से नहीं।

**2.** (*i*) $\frac{1}{6}$ (*ii*) $\frac{1}{6}$ **3.** $\frac{1}{2}$

**4.** (*i*) $\frac{3}{10}$ (*ii*) $\frac{7}{10}$

**5.** (*i*) *b* (*ii*) *c* (*iii*) *d* (*iv*) *b*

अध्याय 4

L8P8E8

# सरल समीकरण

## उद्देश्य :-

**इस अध्याय में हम सीखेगें :-**

1. ज्ञात करना कि एक संख्या दी हुई समीकरण का हल है या नहीं।
2. दिए हुए कथन को समीकरण में व्यक्त करना।
3. समीकरण को कथन में परिवर्तित करना।
4. समीकरण को तीन विधियों प्रयत्न और भूल विधि, संतुलन विधि और स्थानापन्न विधि से हल करना।
5. दैनिक जीवन में समस्याओं को सरल समीकरण की सहायता से हल करना।

## भूमिका

छठी कक्षा में हम यह सीख चुके हैं कि समीकरण दो बीज गणितक व्यंजकों की समता का एक कथन होता है। हम, सरल समीकरण, उनका निर्माण और प्रयत्न तथा भूल विधि से उनको हल करना भी सीख चुके हैं। इस अध्याय में हम छठी कक्षा मे पढ़े विषयों की समीक्षा करेंगे। हम सरल समीकरण का व्यावहारिक स्थितियों में प्रयोग करने के बारे में समीकरण का व्यवहारिक स्थितियों में प्रयोग करने के बारे में जानेगें और साथ ही, स्थानापन्न विधि से रेखीय समीकरण को हल करना सीखेंगे।

## याद करें (Recall Equations)

प्राथमिक कक्षाओं में हमने संख्याओं के बारे में कुछ ऐसी समस्याओं को हल किया था जैसे, 7 में कौन सी संख्या जोड़ी जाए कि हमें 13 प्राप्त हो जाए। इस समस्या को निम्नलिखित अनुसार भी दर्शाया जा सकता है।

$$\square + 7 = 13$$

यहाँ $\square$ एक ऐसी अज्ञात संख्या है जिसे हमें पता करना है। हम सरलता से वह संख्या पता कर सकते हैं, जिसे $\square$ में भरने से '=' के दोनों तरफ का मूल्य बराबर हो जाए।

$\square$ में '6' लिखा जाएगा क्योंकि $6 + 7 = 13$ होता है।

अब, इस समस्या को $x + 7 = 13$ के रूप में भी लिखा जा सकता है।

यहाँ अज्ञात संख्या को चर कहा जाता है। यहाँ चर के लिए अंग्रेज़ी अक्षर '$x$' का प्रयोग किया है।

हम चरों को दर्शाने के लिए अंग्रेज़ी अक्षरों जैसे, $x, y, z, a, b, c,$ आदि का प्रयोग करते हैं।

उपरोक्त समता का कथन भाव, $x + 7 = 13$ एक समीकरण है। इस तरह, एक चर और संख्या के मेल से बना समता के कथन को समीकरण कहते है। जिस समीकरण में केवल एक चर का प्रयोग किया जाता है, उसे एक चर वाला समीकरण कहते हैं।

ऊपर दिए गए समीकरण में शाब्दिक संख्या $x$ को चर कहते हैं।

उदाहरण के लिए $2y + 6 = 7, p = \frac{7}{2}, 2q + 10 = 0$

$3x^2 + 2x + 6 = 0,\ 2x^2 = 8$ सभी एक चर वाले समीकरण हैं।

अगर, एक चर वाले एक समीकरण में चर का सब से बड़ा घात अंक '1' हो तो, समीकरण को रेखीय समीकरण कहा जाता है।

$2y + 6 = 7, p = \frac{7}{2}, 2q + 10 = 0$ सारे रेखीय समीकरण है।

$3x^2 + 2x + 6 = 0, 2x^2 = 8$ रेखीय समीकरण नहीं है।

## समीकरण बनाना (Formation of an equation)

**पग 1 :** समस्या को ध्यान से पढ़ें और अज्ञात को पहचानें।

**पग 2 :** अज्ञात संख्या को अंग्रेज़ी के अक्षर $x, y, z$......... यां $a, b, c,$ ............... आदि के साथ व्यक्त करें।

**पग 3 :** गणित के चिह्न, +. –, × और ÷ आदि की मदद से कथन को व्यंजक के रूप में लिखें।

**पग 4 :** समस्या के अनुसार, दिए गए व्यंजक को '=' के चिह्न का प्रयोग करके समीकरण बनाएं।

**उदाहरण-1 : निम्नलिखित कथनों को समीकरणों के रूप में लिखिए।**

**(a) एक संख्या का सात गुणा 42 है।**

**(b) एक संख्या के आधे में 2 जोड़ने से योगफल 17 प्राप्त होता है।**

**(c) यदि आप किसी संख्या के 6 गुणा में से 5 घटाओगे तो 7 प्राप्त होगा।**

**(d) संख्याएँ $x$ और 6 का योगफल 9 है।**

**हल :** (a) मान लें, अज्ञात संख्या $x$ है।

∴ $7x = 42$ वांछित समीकरण है।

(b) मान लें, अज्ञात संख्या $y$ है। ∴ संख्या का आधा $= \frac{1}{2} y$

इसमें 2 जोड़ने पर $= 2 + \frac{1}{2} y$

इस लिए, $2 + \frac{1}{2} y = 17$

जो कि वांछित समीकरण है।

(c) मान लें, अज्ञात संख्या $z$ है।, $z$ का 6 गुणा $= 6z$

$6z$ में से 5 घटाने पर, $= 6z–5$ प्राप्त होता है।

दिए हुए कथन अनुसार, $6z – 5 = 7$ वांछित समीकरण है।

(d) $x + 6 = 9$

**उदाहरण-2 : निम्नलिखित समीकरणों को कथन रूप में व्यक्त करो।**

**(i) $x + 4 = 15$ (ii) $x – 7 = 3$ (iii) $2m = 8$ (iv) $\frac{p}{5} – 2 = 6$**

**हल :** (i) $x$ और 4 का योगफल 15 है।

(ii) $x$ में से 7 घटाने पर 3 प्राप्त होता है।

(iii) एक संख्या $m$ का दुगुना, 8 है।

(iv) किसी संख्या $p$ के पाँचवें हिस्से से 2 घटाने पर 6 प्राप्त होता है।

**उदाहरण-3 : निम्नलिखित स्थिति पर विचार कीजिए।**

**लक्ष्मी के पिता की आयु, लक्ष्मी की आयु के तीन गुणा से 5 वर्ष अधिक है। लक्ष्मी के पिता की आयु 44 वर्ष है। लक्ष्मी की आयु ज्ञात करने के लिए, एक समीकरण बनाइए ( स्थापित कीजिए )।**

हल : लक्ष्मी की आयु हमारे लिए अज्ञात है। मान लें उसकी आयु $x$ वर्ष है। लक्ष्मी की आयु '$x$' का तीन गुणा $3x$ है। लक्ष्मी के पिता की आयु $3x$ से 5 वर्ष अधिक है। यह भी दिया है कि लक्ष्मी के पिता की आयु 44 वर्ष है।

इसलिए, $3x + 5 = 44$

यह चर '$x$' वाली समीकरण है। इस को हल करने पर हमें लक्ष्मी की आयु ज्ञात हो जाएगी।

## प्रश्नावली - 4.1

**1. पूरा कीजिए :-**

| क्रम संख्या | समीकरण | चर का मूल्य | बताइए कि समीकरण संतुष्ट होता है ? (हाँ/नहीं) |
|---|---|---|---|
| (i) | $x + 5 = 0$ | $x = 5$ | |
| (ii) | $x + 5 = 0$ | $x = -5$ | |
| (iii) | $x - 3 = 1$ | $x = 3$ | |
| (iv) | $x - 3 = 1$ | $x = -3$ | |
| (v) | $2x = 10$ | $x = 5$ | |
| (vi) | $\frac{x}{3} = 2$ | $x = -6$ | |
| (vii) | $\frac{x}{3} = 2$ | $x = 0$ | |

**2. जाँच कीजिए कि कोष्ठकों में दिये हुए मूल्य, दिए गए समीकरणों के हल हैं या नहीं ?**

(i) $x + 4 = 11$ $(x = 7)$

(ii) $8x + 4 = 28$ $(x = 4)$

(iii) $3m - 3 = 0$ $(m = 1)$

(iv) $\frac{x}{5} - 4 = -1$ $(x = 15)$

(v) $4x - 3 = 13$ $(x = 0)$

**3. प्रयत्न और भूल विधि से निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।**

(i) $5x + 2 = 17$

(ii) $3p - 14 = 4$

**4. निम्नलिखित कथनों के लिए समीकरण दीजिए।**

(i) संख्याएँ $x$ और 4 का योगफल 9 है।

(ii) $y$ में से 3 घटाने पर 9 प्राप्त होता है।

(iii) $x$ का दस गुणा 50 है।

(iv) $x$ के 9 गुणा में 6 जोड़ने से, 87 प्राप्त होता है।

(v) संख्या $y$ के पाँचवें भाग से 6 घटाने से 3 प्राप्त होता है।

**5. निम्नलिखित समीकरणों को सामान्य कथनों के रूप में लिखिए।**

(i) $x - 2 = 6$

(ii) $3y - 2 = 10$

(iii) $\frac{x}{6} = 6$

(iv) $7x - 15 = 34$

(v) $\frac{x}{2} + 2 = 8$

6. निम्नलिखित कथनों के लिए समीकरण बनाइए।

(i) राजू के पिता की आयु राजू की आयु के पाँच गुणा से 4 वर्ष अधिक है। राजू के पिता की आयु 54 वर्ष है।

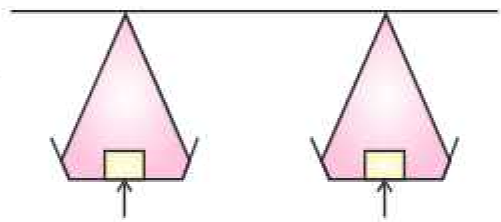
(ii) अध्यापक बताता है कि उसकी कक्षा में एक विद्यार्थी द्वारा प्राप्त किए गए अधिकतम अंक, प्राप्त किए न्यूनतम अंक का दुगुना से 6 अधिक हैं। अधिकतम अंक 86 हैं। (न्यूनतम अंक $x$ लीजिए।)

(iii) एक समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्ष कोण प्रत्येक आधार कोण का दुगुना है। मान लीजिए प्रत्येक आधार कोण $x$ डिग्री है। याद रखिए कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $180°$ होता है।

(iv) एक दुकानदार दो तरह की पेटियों मे रखे आम बेच रहा है। प्रत्येक बड़ी पेटी में रखे आमों की संख्या 8 छोटी पेटियों में रखे आमों की संख्या सें 4 अधिक है। प्रत्येक बड़ी पेटी में 100 आम हैं।

## एक समीकरण को हल करना ( संतुलित करके ) (Solving an equation (By Balancing)

एक समीकरण को एक ऐसा तोलने वाला तराजू समझा जाता है। जिसके दोनों पलड़ों में बराबर बाँट रखे हैं। इस स्थिति में तराजू की डंडी ठीक क्षैतिज रहती है। यदि तराजू के दोनों तरफ के बाँट को आपस में बदल दें तो भी तराजू की डंडी क्षैतिज पर ही रहती है। इसी प्रकार यदि हम दोनों पलड़ों में बराबर बाँट डालें, तो डंडी, अभी भी क्षैतिज ही रहती है और दोनों पलड़ों में से बराबर बाँट निकालने पर भी तराजू का संतुलन बना रहता है।




समीकरण, एक ऐसी तोलने वाली तराजू की तरह है, जिसके दोनों पलड़ों में बराबर भार हो।

हम यह सिद्धांत एक समीकरण को हल करने में प्रयोग करते हैं।

निम्नलिखित समीकरण पर विचार कीजिए : $x + 4 = 6$, हम समीकरण के दोनो पक्षों में से 4 घटाते हैं।

नया बायाँ पक्ष $x + 4 - 4 = x$ है तथा

नया दायाँ पक्ष $6 - 4 = 2$ है।

इस तरह, दोनों पक्ष संतुलन में ही हैं। या $x = 2$

### समीकरण को हल करने के नियम :-

(i) एक समीकरण के संतुलन को बिना परिवर्तित किए, दोनों तरफ एक समान संख्या जोड़ सकते हैं।

(ii) एक समीकरण के संतुलन को बिना परिवर्तित किए, दोनो तरफ से समान संख्या को घटाया जा सकता है।

(iii) एक समीकरण के संतुलन को बिना परिवर्तित किए, दोनों तरफ से एक समान संख्या (जो कि शून्य न हो) गुणा किया जा सकता है।

(iv) एक समीकरण के संतुलन को बिना परिवर्तित किए, दोनों तरफ से एक समान संख्या (जो कि शून्य न हो) भाग किया जा सकता है।

(v) यदि हम किसी समीकरण के दोनों पक्षों मे एक जैसी गणितीय सक्रिया नहीं करते तो समता नहीं रहती।

## याद रखें

कभी-कभी एक समीकरण को हल करने के लिए, हमें एक से अधिक गणितीय संक्रियाएँ करनी पड़ सकती हैं। हमारा प्रयास यह होना चाहिए कि समीकरण मे चर पृथक हो जाए।

**उदाहरण-1 : समीकरण $6x - 4 = 22$ हल कीजिए।**

हल : दी हुई, समीकरण : $6x - 4 = 22$

हम प्रयास करेंगे कि समीकरण के बाएँ पक्ष में केवल '$x$' रह जाए।

दोनों पक्षों में 4 जोड़ने से,

$$6x - 4 + 4 = 22 + 4$$
$$6x = 26$$

अब, दोनों पक्षों में 6 से भाग करने पर, हमें प्राप्त होता है।

$$\frac{6x}{6} = \frac{26}{6}$$

या $x = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$. इस तरह, $x = \frac{13}{3}$ दिए हुए समीकरण का हल है।

**उदाहरण-2 : हल कीजिए : (*i*) $2x + 6 = 12$ (*ii*) $\frac{p}{4} = 5$**

हल : (*i*) पग I : दोनों पक्षों में से 6 घटाइए।

$$2x + 6 - 6 = 12 - 6$$
$$2x = 6$$

पग II : दोनों पक्षों को 2 से भाग करने पर,

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$

या, $x = 3$, दिय हुए समीकरण का हल है।

हमें प्राप्त हुए हल की सदैव पुष्टि (जाँच) कर लेनी चाहिए।
आओ, हम $x = 3$, दिए हुए समीकरण में रख कर देखते हैं।

बायाँ पक्ष $= 2x + 6 = 2 \times 3 + 6 = 6 + 6$
$= 12 =$ दायाँ पक्ष

इस प्रकार हमने हल के सही होने की जाँच कर ली है।

(*ii*) $\frac{p}{4} = 5$

दोनो पक्षों को 4 से गुणा करने पर,

$$\frac{p}{4} \times 4 = 5 \times 4$$
$$p = 20$$

$\therefore$ $p = 20$ दिए समीकरण का हल है।

## प्रश्नावली - 4.2

1. पहले चर को पृथक करने वाले चरण बताइए और फिर समीकरण को हल कीजिए।
   (*i*) $x + 1 = 0$ (*ii*) $x - 1 = 5$
   (*iii*) $x + 6 = 2$ (*iv*) $y + 4 = 4$
   (*v*) $y - 3 = 3$
2. पहले चर को पृथक करने वाले चरण बताइए और फिर समीकरण को हल कीजिए।
   (*i*) $3x = 15$ (*ii*) $\frac{p}{7} = 4$
   (*iii*) $8y = 36$ (*iv*) $20x = -10$

**3.** चर को पृथक करने वाले चरण बताइए, और फिर समीकरण हल कीजिए।

(*i*) $5x + 7 = 17$ (*ii*) $\frac{20x}{3} = 40$

(*iii*) $3p - 2 = 46$

**4.** निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।

(*i*) $10x + 10 = 100$ (*ii*) $\frac{-p}{3} = 5$

(*iii*) $3x + 12 = 0$ (*iv*) $2q - 6 = 0$

(*v*) $3p = 0$ (*vi*) $3s = -9$

## समीकरण को हल करना (स्थानांतरण से)

आइए, कुछ और समीकरणों को हल करें। इन समीकरणों को हल करते समय, हम संख्याओं का स्थानांतरण करेंगे। भाव पक्ष बदलने को स्थानांतरम कहते हैं।

संख्याओं का स्थानांतरण करते समय ध्यान रखें :

**1.** समीकरण के एक पक्ष में जोड़ने वाली संख्या, स्थानांतरित हो कर दूसरे पक्ष में से घटाई जाती है।

अर्थात $x + 4 = 10$

$\Rightarrow$ $x = 10 - 4 = 6$ (4 को स्थानांतरित करने पर)

**2.** समीकरण के एक पक्ष में घटाई गई संख्या, स्थानांतरित हो कर दूसरे पक्ष में जोड़ी जाती है।

भाव $y - 6 = 8$

अर्थात $y = 8 + 6$ (6 को स्थानांतरित करने पर)

**3.** समीकरण के एक पक्ष में गुणा हुई संख्या, स्थानांतरित हो कर दूसरे पक्ष में भाग होती है।

अर्थात $7z = 14$

$\Rightarrow$ $z = 14 \div 7$ या $\frac{14}{7} = 2$ (7 को स्थानांतरित करने पर)

**4.** समीकरण के एक पक्ष में भाग हुई संख्या, स्थानांतरित हो कर दूसरे पक्ष में गुणा होती है।

अर्थात $\frac{y}{8} = 5$

$\Rightarrow$ $y = 5 \times 8 = 40$ (8 को स्थानांतरित करने पर)

**उदाहरण-1 : $12x - 3 = 21$ हल कीजिए :-**

हल : $-3$, समीकरण के बायें पक्ष से दायें पक्ष की तरफ जाने पर $+3$ में बदल जाता है।

$$12x = 21 + 3 \text{ या } 12x = 24$$

$$x = \frac{24}{12} = 2 \text{ (12 को स्थानांतरित करने पर)}$$

जाँच करने के लिए, समीकरण के $x = 2$ रखें।

$$\begin{aligned} \text{बायाँ पक्ष} &= 12x - 3 \\ &= 12(2) - 3 \\ &= 24 - 3 = 21 = \text{दायाँ पक्ष} \end{aligned}$$

**उदाहरण-2 : - $3(y + 7) = 15$ हल कीजिए।**

हल : दोनों पक्षों को 3 से भाग करने पर,

$$y + 7 = \frac{15}{3}$$

या $$y + 7 = 5$$

7 को स्थानांतरित करने पर,

$$y = 5 - 7$$

या $$y = -2 \text{ वांछित हल है।}$$

जाँच के लिए, बायाँ पक्ष में $y = -2$ रखें।

$$\begin{aligned} \text{बायाँ पक्ष} &= 3(y + 7) \\ &= 3(-2 + 7) \\ &= 3(5) = 15 = \text{दायाँ पक्ष} \end{aligned}$$

**उदाहरण-3 : (*i*) $\frac{x}{5} + 3 = 1$ (*ii*) $3(x - 2) = 2(x + 1) - 3$ हल कीजिए। अपने उत्तर की जाँच कीजिए।**

हल : दिया है, : $\frac{x}{5} + 3 = 1$

3 को स्थानांतरित करने पर,

$$\frac{x}{5} = 1 - 3$$

$$\frac{x}{5} = -2$$

$$x = -2 \times 5 \text{ (5 को स्थानांतरित करने पर)}$$

$$x = -10$$

जाँच के लिए, समीकरण के $x = -10$ रखें।

$$\begin{aligned} \text{बायाँ पक्ष} &= \frac{x}{5} + 3 = \frac{-10}{5} + 3 \\ &= -2 + 3 = 1 = \text{दायाँ पक्ष} \end{aligned}$$

(*ii*) $3(x - 2) = 2(x + 1) - 3$

यहाँ, पहले कोष्ठकों को हटाएंगे।

$$3x - 6 = 2x + 2 - 3$$

6 को स्थानांतरित करने पर,

$$3x = 2x + 2 - 3 + 6$$

$$3x = 2x + 5$$

2 को स्थानांतरित करने पर,

$$3x - 2x = 5$$

$$x = 5$$

जाँच करने के लिए, बायें पक्ष में $x = 5$ रखें,

$$\text{बायाँ पक्ष } 3(x-2) = 2(x+1)-3$$
$$3(5-2) = 3 \times 3 = 9$$
$$\text{दायाँ पक्ष } 2(x+1)-3 = 2(5+1)-3$$
$$= 12 - 3 = 9$$
$$\text{बायाँ पक्ष} = \text{दायाँ पक्ष}$$

**हल से समीकरण की ओर**

समीकरण $\rightarrow$ हल (सामान्य पथ)

हल $\rightarrow$ समीकरण (विपरीत पथ)

**उदाहरण-4 : $x = 5$ से प्रारंभ करके तीन समीकरण बनाओ।**

| | | | |
|---|---|---|---|
| प्रारंभ कीजिए | ↓ | $x = 5$ | ↑ दोनों पक्षों को 4 से भाग करो। |
| दोनों पक्षों में 4 से गुणा करो | | $4x = 20$ | |
| दोनों पक्षों मे से 3 घटाइए। | ↓ | $4x - 3 = 17$ | ↑ दोनों पक्षों मे 3 जोड़ें। |
| दोनों पक्षों मे 4 जोड़ो। | ↓ | $4x + 1 = 21$ | ↑ दोनो पक्षों मे से 4 घटाओ। |

## प्रश्नावली - 4.3

**1.** निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $6x + 10 = -2$  (ii) $2y - 3 = 2$

(iii) $\frac{a}{5} + 3 = 2$  (iv) $\frac{3x}{2} = \frac{2}{3}$

(v) $\frac{5}{2}x = -5$  (vi) $2x + \frac{5}{2} = \frac{37}{2}$

**2.** निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $5(x+1) = 25$  (ii) $2(3x-1) = 10$

(iii) $4(2-x) = 8$  (iv) $-4(2+x) = 8$

**3.** निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $4 = 5(x-2)$  (ii) $-4 = 5(x-2)$

(iii) $4 + 5(p-1) = 34$  (iv) $6y - 1 = 2y + 1$

**4.** (i) $x = 2$ से प्रारम्भ करके, 3 समीकरण बनाओ।

(ii) $x = -2$ से प्रारम्भ करते हुए, 3 समीकरण बनाइए।

**5. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(i) यदि $7x + 4 = 39$, तो $x = ......$

(a) 6  (b) –4  (c) 5  (d) 8

(ii) यदि $8m - 8 = 56$ तो $m = ......$

(a) –4  (b) –2  (c) –14  (d) 8

(*iii*) निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या समीकरण $-6 + x = -18$ को संतुष्ट करती है ?

(*a*) 10 (*b*) –13 (*c*) –12 (*d*) –16

(*iv*) यदि $\frac{x}{2} = 14$, तो $2x + 6 =$ ......

(*a*) 62 (*b*) –64 (*c*) 16 (*d*) –62

(*v*) यदि एक संख्या के दुगुने में से 3 घटाने पर 5 प्राप्त होता तो संख्या ज्ञात कीजिए।

(*a*) –4 (*b*) –2 (*c*) 2 (*d*) 4

(*vi*) यदि 5 को एक संख्या के तिगुने मे जोड़ने से – 7 प्राप्त होता है तो संख्या ज्ञात कीजिए।

(*a*) –6 (*b*) –5 (*c*) –4 (*d*) 4

## व्यावहारिक स्थितियों में सरल समीकरणों के अनुप्रयोग

व्यावहारिक जीवन से संबंधित अधिकतर समस्याओं को किसी एक विधि पूरी तरह से हल नहीं किया जा सकता। फिर भी, निम्नलिखित सुझाव, इन समस्याओं को हल करने में लाभदायक सिद्ध हो सकते हैं।

- समस्या के कथन को ध्यान से पढ़ो और फिर निर्धारित करो कि पता क्या करना है ?
- अज्ञात को अंग्रेजी के अक्षर से व्यक्त करो।
- यह भी निर्धारित करो कि कौन-से व्यंजक समान हैं और समीकरण बनाओ।
- प्राप्त समीकरण को हल करो।

**उदाहरण-1 : यदि एक संख्या के दुगुने में 5 जोड़ने से 29 प्राप्त होता है, संख्या ज्ञात कीजिए।**

हल : यदि अज्ञात संख्या $x$ मान लिया जाए,

संख्या का दुगुना $= 2x$

संख्या के दुगुने में 5 जोड़ने पर, $= 2x + 5.$

कथन अनुसार

$$2x + 5 = 29$$
$$2x = 29 - 5$$
$$2x = 24$$
$$x = \frac{24}{2}$$
$$\Rightarrow \quad x = 12$$

इस तरह, वांछित संख्या 12 है।

**उदाहरण-2 : एक संख्या ज्ञात कीजिए जिसका एक चौथाई 10 है।**

हल : मान लें, अज्ञात संख्या $x$ है ; $x$ का एक चौथाई $\frac{x}{4}$ है।

इस तरह, समीकरण प्राप्त होती है : $\frac{x}{4} = 10$

4 को दूसरी तरफ ले जाने पर,

$$x = 10 \times 4$$

या $x = 40$ वांछित संख्या है।

आओ, अपने उत्तर की जाँच करें। समीकरण में $x$ का मूल्य भरने पर,

बायाँ पक्ष $= \frac{x}{4}$

$\frac{40}{4} = 10 =$ दायाँ पक्ष

**उदाहरण-3 : राधा ने पिता जी की आयु 49 वर्ष है। उनकी आयु राधा की आयु के तिगुने से 4 वर्ष अधिक है। राधा की आयु कितनी है ?**

हल : मान लीजिए, राधा की आयु $x$ वर्ष है।

$\therefore$ राधा के पिता की आयु $= (3x + 4)$ वर्ष हैं, परन्तु राधा के पिता की आयु 49 वर्ष है।

प्रश्न के अनुसार,

$$3x + 4 = 49$$

$$\Rightarrow \quad 3x = 49 - 4$$

$$3x = 45$$

दोनों पक्षों को 3 से से भाग करने पर

$$\frac{3x}{3} = \frac{45}{3}$$

$$x = 15$$

$\therefore$ राधा की आयु = 15 वर्ष है।

## प्रश्नावली - 4.4

1. एक संख्या के पाँच गुणा मे 7 जोड़ने पर 57 प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात करो।
2. एक संख्या के चार गुणा में से 9 घटाने से 43 प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात करो।
3. एक संख्या के $\frac{1}{5}$ में से 4 घटाने से 3 प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात करो।
4. 35 विद्यार्थियों वाली कक्षा में लड़कियों की संख्या, लड़कों की संख्या का $\frac{2}{5}$ है। कक्षा में लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
5. शाम के पिता की आयु, शाम की आयु के तिगुने से 5 वर्ष अधिक है। यदि उस के पिता की आयु 44 वर्ष है। तो शाम की आयु ज्ञात कीजिए।
6. एक समद्विबाहु त्रिभुज के आधार कोण बराबर होते हैं। शीर्ष कोण $40^{\circ}$ है। इस त्रिभुज के आधार कोण क्या हैं ? (यदि कीजिए कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $180^{\circ}$ होता है।)
7. इरफान कहता है कि उसके पास परमीत के बच्चों के पाँच गुणा से सात कँचे अधिक हैं, इरफान के पास 37 कँचे हैं। परमीत के पास कितने कँचे है ?
8. एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 3 इकाइयाँ अधिक हैं और आयत का परिमाप 22 इकाइयाँ है। आयत की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

## हमने क्या चर्चा की ?

1. समीकरण एक गणितक कथन है जो कि दो व्यंजको की समता पर निर्धारित करता है। इन दोनों व्यंजको में से कम से कम एक में चर अवश्य होना चाहिए।
2. केवल एक चर वाले समीकरण जिस में चर का घात अंक 1 होता है। रेखीय समीकरण कहलाता है।
3. चर का वह मूल्य जिसके लिए समीकरण संतुष्ट होता है, समीकरण का हल कहलाता है।
4. चर की वह संख्या पता करनी जो समीकरण के बाएँ एवं दाएँ पक्ष को बराबर करती है उसे समीकरण का हल करने की विधि कहते हैं।
5. यदि समीकरण के बाएँ और दाएँ पक्ष को आपस में बदला जाता है तो समीकरण में कोई बदलाव नहीं आता।
6. एक संतुलित समीकरण में, यदि

   (*i*) दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ते हैं, या

(*ii*) दोनों पक्षों में से समान संख्या घटाते हैं, या

(*iii*) दोनों पक्षों में समान संख्या से गुणा करते हैं या

(*iv*) दोनों पक्षों मे समान संख्या से भाग करते हैं, तो संतुलन बना रहता है भाव, दाएँ पक्ष और बाएँ पक्ष के मूल्य समान रहते हैं।

**7.** अज्ञात साधारण या व्यावहारिक समस्याओं को हल करते समय, पहले हम दिए गए कथन के संगत समीकरण लिखेंगे और फिर उस अज्ञात का मूल्य ढूँढ़ने के लिए समीकरण को हल करेंगे।

**सीखने के परिणाम :**

**अध्याय के पूर्ण होने पर विद्यार्थी**

1. अज्ञात की पहचान करने के योग्य हैं।
2. रेखीय समीकरण को समझने के योग्य हैं।
3. समीकरण का हल पता करने के योग्य हैं।
4. यह निर्धारित करने के योग्य है कि अज्ञात का कोई मूल्य, दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करता है या नहीं।
5. दैनिक जीवन की व्यावहारिक स्थितियों को सरल समीकरण के रूप मे व्यक्त करने और उसको हल करने के योग्य हैं।
6. कथन को समीकरण के रुप में परिवर्तित करने के योग्य हैं।
7. समीकरण को हल करने के लिए तीन विधियों का प्रयोग करने के योग्य हैं।

## उत्तरमाला

### प्रश्नावली 4.1

**1.** (*i*) नहीं (*ii*) हाँ (*iii*) नहीं
(*iv*) नहीं (*v*) हाँ (*vi*) नहीं
(*vii*) नहीं

**2.** (*i*) हाँ (*ii*) नहीं (*iii*) हाँ
(*iv*) हाँ (*v*) नहीं

**3.** (*i*) $x = 3$ (*ii*) $p = 6$

**4.** (*i*) $x + 4 = 9$ (*ii*) $y - 3 = 9$ (*iii*) $10x = 50$
(*iv*) $9x + 6 = 87$ (*v*) $\frac{x}{5} - 6 = 3$

**5.** (*i*) $x$ मे से 2 घटाने से 6 प्राप्त होता है।
(*ii*) एक संख्या '$y$' के तिगुने में से 2 घटाने से 10 प्राप्त होता है।
(*iii*) एक संख्या '$x$' का छठा भाग 6 होगा।
(*iv*) यदि किसी संख्या के 7 गुणा में से 15 घटाया जाए तो 34 प्राप्त होता है।
(*v*) किसी संख्या $x$ के आधे में 2 जोड़ें तो 8 प्राप्त होता है।

**6.** (*i*) $5x + 4 = 54$ (*ii*) $2x + 16 = 86$
(*iii*) $4x = 180°$ (*iv*) $8x + 4 = 100$

## प्रश्नावली 4.2

**1.** (*i*) दोनों पक्षों मे से 1 घटाइए ; $x = -1$

(*ii*) दोनों पक्षों में 1 जोड़ो ; $x = 6$

(*iii*) दोनों पक्षों में से 6 घटाइए ; $x = -4$

(*iv*) दोनों पक्षों में से 4 घटाइए ; $y = 0$

(*v*) दोनों पक्षों में 3 जोड़ो; $y = 6$

**2.** (*i*) दोनों पक्षों को 3 से भाग करो ; $x = 5$

(*ii*) दोनों पक्षों को 7 से भाग करो ; $p = 28$

(*iii*) दोनों पक्षों को 8 से भाग करो ; $y = \frac{9}{2}$

(*iv*) दोनों पक्षों को 8 से भाग करो, ; $x = -\frac{1}{2}$

**3.** (*i*) पग 1 : पग 1 : दोनों पक्षों में से 7 घटाने पर

पग 2 : दोनों पक्षों को 5 के साथ भाग करो, $x = 2$

(*ii*) पग 1 : दोनों पक्षों को 3 के साथ भाग करो

पग 2 : दोनों पक्षों को 20 के साथ भाग करो, $x = 6$

(*iii*) पग 1 : दोनों पक्षों में 2 जोड़ो

पग 2 : दोनों पक्षों को 3 के साथ भाग करो, $p = 16$

**4.** (*i*) $x = 9$ (*ii*) $p = -15$ (*iii*) $x = -4$ (*iv*) $q = 3$

(*v*) $p = 0$ (*vi*) $s = -3$

## प्रश्नावली 4.3

**1.** (*i*) $x = -2$ (*ii*) $y = \frac{5}{2}$ (*iii*) $a = -5$ (*iv*) $x = \frac{4}{9}$

(*v*) $x = -2$ (*vi*) $x = 8$

**2.** (*i*) $x = 4$ (*ii*) $x = 2$ (*iii*) $x = 0$ (*iv*) $x = -4$

**3.** (*i*) $x = \frac{14}{5}$ (*ii*) $x = \frac{6}{5}$ (*iii*) $p = 7$ (*iv*) $y = \frac{1}{2}$

**4.** (*i*) संभव समीकरण हैं : $10x + 2 = 22$; $\frac{x}{5} = \frac{2}{5}$ ; $5x - 3 = 7$

(*ii*) संभव समीकरण हैं : $3x = -6$; $3x + 7 = 1$, $3x + 10 = 4$

**5.** (*i*) *c* (*ii*) *d* (*iii*) *c* (*iv*) *a* (*v*) *d* (*vi*) *c*

## प्रश्नावली 4.4

**1.** 10 **2.** 13 **3.** 35 **4.** 10 **5.** 13 वर्ष

**6.** प्रत्येक कोण 70° **7.** 6 **8.** 4 इकाइयाँ, 7 इकाइयाँ

अध्याय

# 5

N4A7K4

# रेखाएँ एवं कोण

**उद्देश्य :-**

**इस अध्याय में आप सीखेंगे :-**

1. रेखाओं, रेखा-खंड, किरणों और कोणों के बारे में जानेंगे।
2. भिन्न-भिन्न तरह की रेखाओं और कोणों को पहचानना सीखेंगे।
3. कोणों के नामकरण और रचना सीखेंगे।
4. कोणों को सम्बंधित आकारों के साथ मिलान सकेंगे।
5. कोणों और उनके संबंध के साथ भिन्न-भिन्न कोणों को ज्ञात करना सीखेंगे।
6. दैनिक जीवन में रेखाओं और कोणों के महत्व को जानेंगे।

## भूमिका

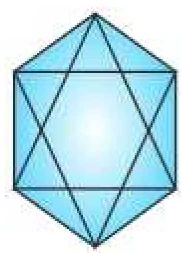
रेखाएँ और कोण, ज्यामितीय का एक बहुत ही महत्त्वपूर्ण भाग है जो कि आकारों और ढाँचों का मूल आधार है। प्रत्येक व्यक्ति इन आकारों को आपने आस-पास देख सकता है। मेज के कोनों में, इमारत की दीवारों में, स्तम्भों और रेंप में, पुल के नक्शों में आदि। इन की जानकारी की सहायता से ही आर्किटेक्ट, इंजीनियर भिन्न-भिन्न इमारतों, पुलों आदि के निर्माण करते हैं, भूगोल (शास्त्री) वैज्ञानिक तारों का अध्ययन करते हैं। इस तरह, हम कह सकते हैं कि रेखाओं और कोणों के अध्ययन को समझना अति महत्त्वपूर्ण ही नहीं बल्कि एक बढ़िया जीवन जीने के लिए अति आवश्यक है।

क्या आप निम्नलिखित आकृतियों में विभिन्न रेखाखंडों एंव कोणों की पहचान कर सकते हैं?

(*i*)

(*ii*)

(*iii*)

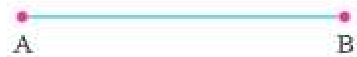

(*iv*)

## समीक्षा (Review) :-

1. **रेखा (Line) :** एक रेखा अनंत बिंदुओं का एक समूह होती है जिसकी अनिश्चित लम्बाई होती है। इसकी कोई मोटाई नहीं होती हैं। इसे दोनों दिशाओं में अनंत रूप से बढ़ाया जा सकता है। इसे $\overleftrightarrow{AB}$ के चिह्न के साथ दर्शाया जा सकता है।

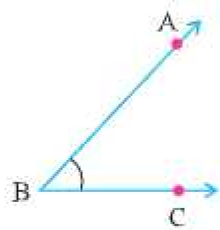
2. **किरण (Ray) :** किरण, रेखा का एक भाग है जिसका एक निश्चित प्रारंभिक बिंदु होता है परन्तु कोई अंत बिंदु नहीं होता। इसे एक दिशा में अनंत रूप से बढ़ाया जा सकता है। किरण $\overrightarrow{AB}$ को संकेत से दर्शाया जा सकता है।

3. **रेखा खंड (Line segment) :** रेखा खंड, रेखा का एक भाग है जिसके दो अंत बिंदु होते हैं और एक निश्चित लम्बाई होती है। इसे किसी भी दिशा में बढ़ाया जा सकता। रेखा खंड $\overline{AB}$ संकेत से दर्शाया जा सकता है।




## कोण तथा उनके प्रकार (Angles and its Types)

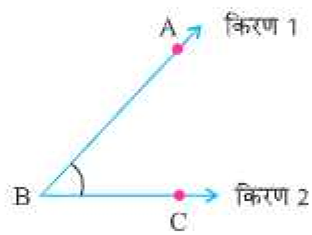
**कोण (Angle) :** जब दो किरणें आपस में एक सांझे बिंदु पर मिलती हैं तो वह कोण बनाती है। कोण को डिग्री (°) में और (प्रोट्रैक्टर) कोणमापक की सहायता से मापा जाता है।




कोण को '$\angle$' के संकेत से दर्शाया जाता है।

यहाँ AB तथा BC को कोण की भुजाएँ कहते हैं।

**कोण का नामकरण :** कोण को एक क्रम मे लिखा जाता है। पहली किरण पर किसी बिंदु का नाम लिखो, फिर दोनों किरणों के सांझे बिंदु और अंत में दूसरी किरण दोनों के बिंदु का नाम लिखो।



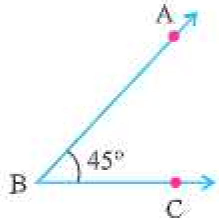

आकृति में, किरण BA और BC, $\angle ABC$ अथवा $\angle CBA$ बनाती हैं।

## कोणों के प्रकार (Types of Angles)

1. **शून्य कोण (Zero angle) :** वह कोण जिसका माप $0^\circ$ हो, शून्य कोण कहलाता है। जब किसी कोण की दोनों किरणें एक दूसरे के ऊपर या संपाती हों तो $0^\circ$ कोण बनता है। आकृति में, $\angle ABC = 0^\circ$ है।

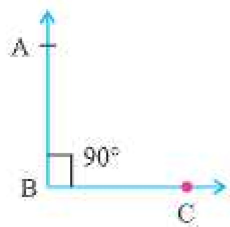
$\therefore$ $\angle ABC$ एक शुन्य कोण है।

**2. न्यून कोण (Acute angle) :** वह कोण जिसका माप $0°$ और $90°$ के बीच में हो, वह न्यून कोण कहलाता है। आकृति में $\angle ABC = 45° (< 90°)$ $(0° < \angle ABC < 90°)$




$\therefore$ $\angle ABC$ एक न्यून कोण है।

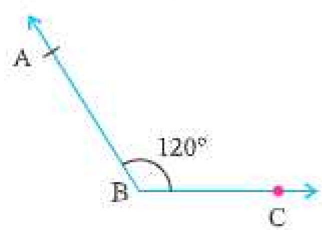
**3. समकोण (Right angle) :** वह कोण जिसका माप $90°$ हो, समकोण कहलाता है। जो किरणें $90°$ का कोण बनाती हैं उन किरणों को लंबिक किरणें भी कहते हैं। आकृति में, $\angle ABC = 90°$




$\therefore$ $\angle ABC$ एक समकोण है।

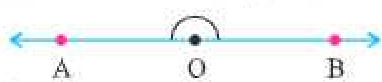
**4. अधिक कोण (Obtuse angle) :** वह कोण जिसका माप $90°$ और $180°$ के बीच हो, वह अधिक कोण कहलाता है। आकृति में

$\angle ABC = 120°$ $(90° < \angle ABC < 180°)$




$\therefore$ $\angle ABC$ एक अधिक कोण है।

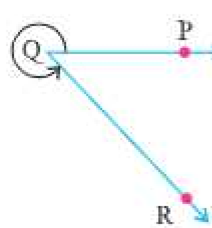
**5. सरल कोण (Straight angle) :** वह कोण जिसका माप $180°$ हो, सरल कोण कहलाता है। इसे सरल कोण इसलिए कहा जाता है क्योंकि दो किरणें परस्पर मिलकर एक सरल रेखा बनाती हैं। $\angle AOB = 180°$




$\therefore$ $\angle AOB$ एक सरल कोण है।

**6. बृहत्कोण (Reflex angle) :** वह कोण जिसका माप $180°$ और $360°$ के बीच में हो, बृहत्कोण कहलाता है। आकृति में, बृहत्कोण $\angle PQR = 320°$

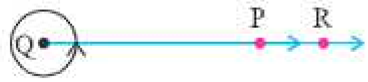
$(180° <$ बृहत्कोण $\angle PQR < 360°)$



7. **सम्पूर्ण कोण (Complete angle) :** वह कोण जिसका माप 360° हो, सम्पूर्ण कोण कहलाता है। यह एक पूरा चक्कर बनाता है।

चित्र $\angle PQR = 360°$

$\therefore$ $\angle PQR$ एक सम्पूर्ण कोण है।




## कोणों के संबंध में कुछ और :-

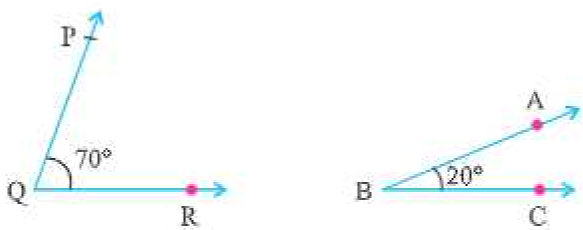
(*i*) **पूरक कोण (Complementary angles) :** जब दो कोणों के मापों का योग 90° होता है, तो इनमें से प्रत्येक कोण दूसरे कोण का पूरक कहलाता है। जैसे $70° + 20° = 90°$ तो 70° का पूरक 20° और 20° का पूरक 70° होता है।

अथवा आकृति में

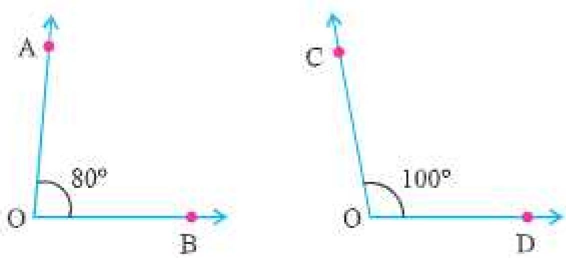
$$\angle PQR + \angle ABC = 70° + 20° = 90°$$

$\angle PQR$, $\angle ABC$ एक दूसरे के पूरक कोण हैं।

$\angle PQR$, $\angle ABC$ का पूरक कोण है तथा $\angle ABC$, $\angle PQR$ का पूरक कोण है।




(*ii*) **संपूरक कोण (Supplementary angles) :** जब दो कोणो के माप का योग 180° होता है तो ये कोण संपूरक कोण कहलाते हैं। जब दो कोण संपूरक होते है $80° + 100° = 180°$ तो 80° ਅਤੇ 100° इनमें से प्रत्येक कोण दूसरे कोण का संपूरक कहलाता है।




आकृति में,

$$\angle AOB + \angle COD = 80° + 100° = 180°$$

यहाँ $\angle AOB$ तथा $\angle COD$ एक दूसरे के संपूरक कोण हैं।

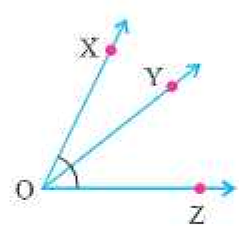
(*iii*) **आसन्न कोण (Adjacent angles) :** दो कोण आसन्न कोण कहलाते हैं यदि

(*a*) उनका एक उभयनिष्ठ भुजा हो।

(*b*) उनमें एक उभयनिष्ठ शीर्ष हो।

(*c*) उनकी उभयनिष्ठ भुजाएं, गैर उभयनिष्ठ भुजाओं के दोनों तरफ होती हैं।

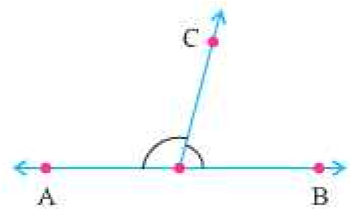
आकृति में $\angle XOY$ और $\angle YOZ$ आसन्न कोण हैं जिनका उभयनिष्ठ शीर्ष O और उभयनिष्ठ भुजा OY है। OX और OZ उभयनिष्ठ भुजाएँ नहीं हैं और OY के दोनों ओर स्थित हैं।



(*iv*) **रैखिक युग्म (Linear Pair) :** ऐसे आसन्न कोणों का युग्म होता है जिनका योग 180° हो, वह रैखिक युग्म बनाते हैं।

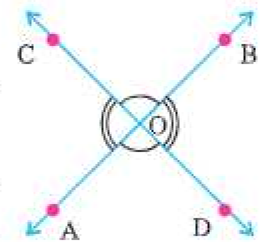
आकृति में, $\angle AOC + \angle COB = 180°$

∴ यह एक रैखिक युग्म बनाता है।




रैखिक युग्म के कोण परस्पर संपूरक होते हैं अर्थात कोणों का जोड़ 180° होता है।

(*v*) **उर्ध्वाधर सम्मुख कोण (Vertically Opposite Angles) :** जब दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं तब वह चार कोण बनाती हैं।




कोणों के वह युग्म जो प्रतिच्छेद बिंदु से विपरीत दिशा में हों उर्ध्वाधर सम्मुख कोण कहलाते हैं।

आकृति में, रेखाएँ $\overleftrightarrow{AB}$ तथा $\overleftrightarrow{CD}$ बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। $\angle AOD$ तथा $\angle BOC$ उर्ध्वाधर सम्मुख कोणों का एक युग्म और $\angle AOC$ तथा $\angle BOD$ उर्ध्वाधर सम्मुख कोणों का एक युग्म है।

उर्ध्वाधर सम्मुख कोण सदैव समान होते हैं।

भाव $\angle AOD = \angle BOC$

$\angle AOC = \angle BOD$

**उदाहरण-1 : निम्नलिखित कोणों के पूरक कोण ज्ञात कीजिए।**

**(*i*) 38° (*ii*) 63°**

हल : (*i*) 38° का पूरक कोण $= (90° - 38°) = 52°$

(*ii*) 63° का पूरक कोण $= (90° - 63°) = 27°$

**उदाहरण-2 : निम्नलिखित कोणों के संपूरक कोण ज्ञात कीजिए।**

**(*i*) 35° (*ii*) 62°**

हल : (*i*) 35° का संपूरक कोण $= (180° - 35°) = 145°$

(*ii*) 62° का संपूरक कोण $= (180° - 62°) = 118°$

**उदाहरण-3 : दो पूरक कोण 4 : 5 में हैं। कोण ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लो, कोण $4x$ और $5x$ हैं।

$$\therefore \quad 4x + 5x = 90°$$
$$9x = 90°$$
$$x = 10°$$

तो वांछित कोण $4 \times 10°$ और $5 \times 10°$ है।

अर्थात 40° और 50°

**उदाहरण-4 : दो संपूरक कोण 2:7 में है। कोण ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लो, कोण $2x$ और $7x$ वांछित कोण हैं।

प्रश्न के अनुसार, $2x$ और $7x$ संपूरक कोण हैं।

$$\therefore \quad 2x + 7x = 180^\circ$$
$$9x = 180^\circ$$
$$x = 20^\circ$$

वांछित कोण $2 \times 20 = 40^\circ$ तथा $7 \times 20 = 140^\circ$ है।

अर्थात $40^\circ$ और $140^\circ$

**उदाहरण-5 : ऐसा कोण ज्ञात कीजिए जो अपने संपूरक का दुगुना हो ?**

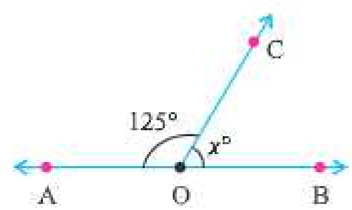
हल : मान लीजिए एक कोण $x$ है तो उसका संपूरक कोण $180^\circ - x$ है।

प्रश्न के अनुसार, कोण = 2 × ( संपूरक कोण)

$$x = 2\,(180^\circ - x)^\circ$$
$$x = 360^\circ - 2x$$
$$x + 2x = 360^\circ$$
$$3x = 360^\circ$$
$$x = 120^\circ$$

वांछित कोण = $120^\circ$

**उदाहरण-6 : दी हुई आकृति में, $x$ ज्ञात कीजिए।**

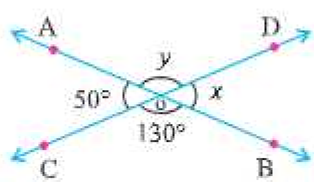



हल : आकृति में $\angle AOC = 125^\circ$

यहाँ $\angle AOC$ और $\angle COB$ रैखिक युग्म बना रहें हैं।

$$\therefore \quad \angle AOC + \angle COB = 180^\circ$$
$$125^\circ + x = 180^\circ$$
$$x = 180^\circ - 125^\circ$$
$$x = 55^\circ$$

**उदाहरण-7 : दी हुई आकृति में, $x$ तथा $y$ का मान ज्ञात कीजिए।**



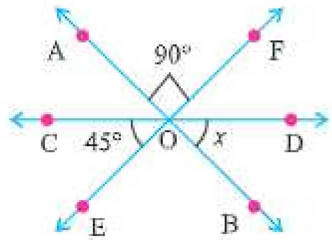

हल : यहाँ $\angle AOC$ तथा $\angle BOD$ उर्ध्वाधर सम्मुख कोण हैं।

$$\therefore \quad \angle BOD = \angle AOC$$
$$x = 50^\circ$$

और $\angle AOD$ तथा $\angle BOC$ उर्ध्वाधर सम्मुख कोण हैं।

$$\therefore \quad \angle AOD = \angle BOC$$
$$y = 130^\circ$$

**उदाहरण-8 :** दी गई आकृति में, AB, CD और EF सरल रेखाएँ हैं जो बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle COE = 45^\circ$ तथा $\angle AOF = 90^\circ$ हो तो $\angle DOB$ ज्ञात कीजिए।




**हल :** मान लीजिए, $\angle DOB = x$

यहाँ $\angle FOD$ तथा $\angle COE$ अर्ध्वाधर सम्मुख कोण हैं।

$\therefore \quad \angle FOD = \angle COE = 45^\circ$

अब, AOB एक सरल रेखा है।

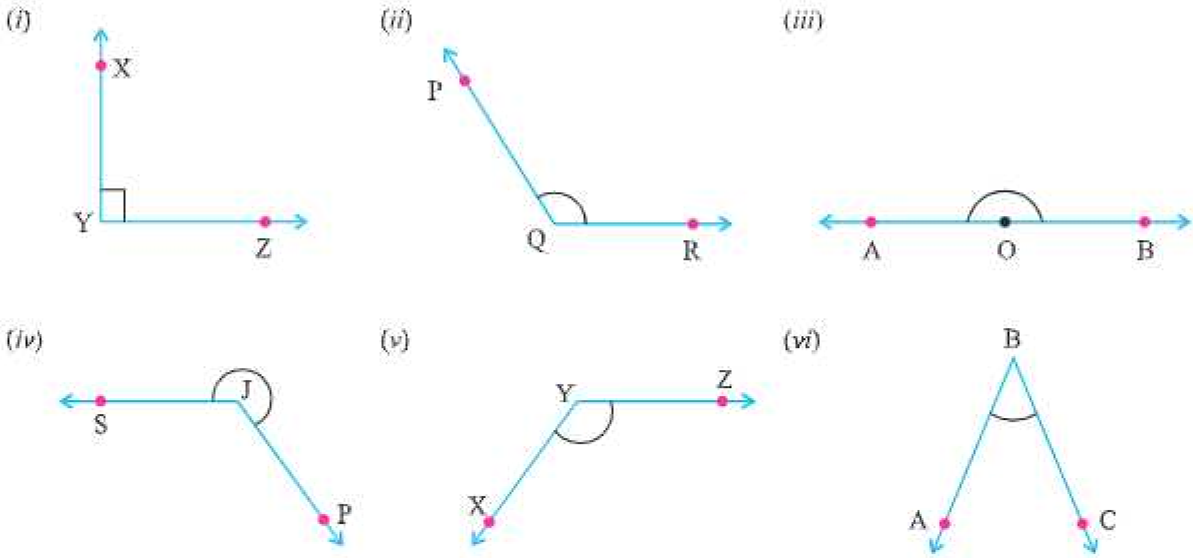
$$\therefore \quad \angle AOF + \angle FOD + \angle DOB = 180^\circ$$
$$90^\circ + 45^\circ + x = 180^\circ$$
$$135^\circ + x = 180^\circ$$
$$x = 180^\circ - 135^\circ$$
$$x = 45^\circ$$

वांछित उपेक्षित कोण $x = 45^\circ$

$\therefore \quad \angle DOB = 45^\circ$

## प्रश्नावली - 5.1

**1.** **निम्नलिखित कोणों में से न्यून कोण, अधिक कोण, समकोण तथा बृहत्कोण की पहचान करें।**




**2.** निम्नलिखित कोणों के पूरक कोण ज्ञात कीजिए।

(i) 53° (ii) 90° (iii) 85°

(iv) समकोण का $\frac{4}{9}$ भाग (v) 0°

**3.** निम्नलिखित कोणों के संपूरक कोण ज्ञात कीजिए।

(*i*) $55°$ (*ii*) $105°$

(*iii*) $100°$ (*iv*) समकोण का $\frac{2}{3}$ भाग

(*v*) $270°$ का $\frac{1}{3}$

**4.** कोणों के निम्नलिखित युग्मों में से पूरक एवं संपूरक युग्म बताएं।

(*i*) $65°$ और $115°$ (*ii*) $112°$ और $68°$

(*iii*) $63°$ और $27°$ (*iv*) $45°$ और $45°$

(*v*) $130°$ और $50°$

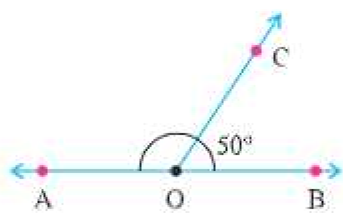
**5.** दो पूरक कोण $4 : 5$ में है, कोण ज्ञात कीजिए।

**6.** दो संपूरक कोण $5 : 13$ मे है, कोण ज्ञात कीजिए।

**7.** ऐसा कोण ज्ञात कीजिए जो अपने पूरक के समान हो।

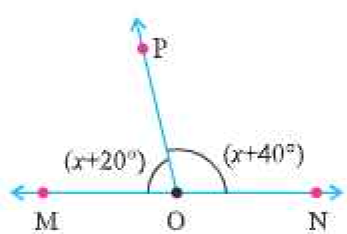
**8.** ऐसा कोण ज्ञात कीजिए जो अपने संपूरक के समान हो।

**9.** दी हुई आकृति में, AOB एक सरल रेखा है, $\angle AOC$ का मान ज्ञात कीजिए।



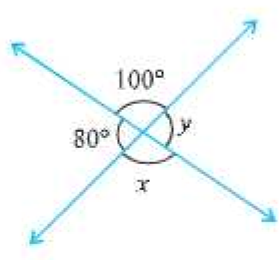

**10.** दी हुई आकृति में, MON एक सरल रेखा है, ज्ञात कीजिए।

(*i*) $\angle MOP$ (*ii*) $\angle NOP$

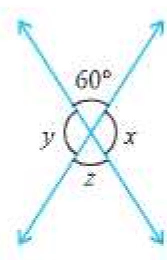



**11.** दी हुई आकृति में, $x$, $y$ तथा $z$ का मान ज्ञात कीजिए।

(*i*)

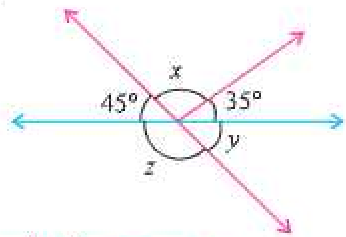



(*ii*)

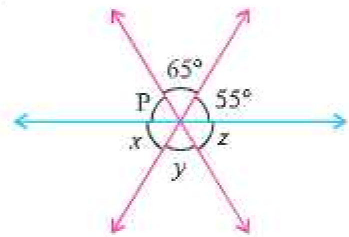


**12.** दी गई आकृतियों में, $x, y, z$ और $p$ का मान ज्ञात कीजिए।

(*i*)




(*ii*)




**13. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) यदि दो कोण पूरक हैं तो उनका योग .................. होता है।

(*a*) 180° (*b*) 90°

(*c*) 360° (*d*) उपर्युक्त मे से कोई नहीं

(*ii*) दो कोणों को ................ कोण कहते हैं, यदि उनका योग 180° हो।

(*a*) संपूरक (*b*) पूरक

(*c*) समकोण (*d*) कोई नहीं।

(*iii*) यदि दो आसन्न कोण संपूरक कोण हों, तो वह ............... बनाते हैं।

(*a*) समकोण (*b*) उर्ध्वाधर सम्मुख कोण

(*c*) रैखिक युग्म (*d*) संगत कोण

(*iv*) यदि दो रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं तो उर्ध्वाधर सम्मुख कोण सदैव .......... होते हैं।

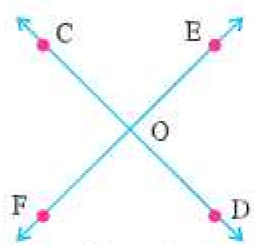
(*a*) समान (*b*) शून्य

(*c*) 90° (*d*) कोई नहीं

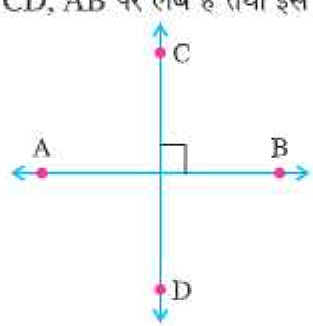
## रेखा युग्म (Pairs of Lines)

इस भाग में हम रेखाओं के भिन्न-भिन्न युग्मों जैसे प्रतिच्छेदी रेखाएँ, लम्बवत रेखाएँ, समांतर रेखाएँ आदि के बारे में चर्चा करेगें।

**1. प्रतिच्छेदी रेखाएँ (Intersecting lines) :** यदि दो रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं तो उन्हें प्रतिच्छेदी रेखाऐं कहते हैं। आकृति में, CD तथा EF प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं और O उनका एक उभयनिष्ठ बिंदु है, जो प्रतिच्छेद बिंदु कहलाता है।




**2. लम्बवत रेखाएँ (Perpendicular lines) :** दो रेखाओं को लम्बवत रेखाएँ कहा जाता है जब वह एक दूसरे पर परस्पर लम्ब बनाती हों। आकृति में CD, AB पर लंब है तथा इसे $CD \perp AB$ लिखा जा सकता है।



**3.** **समांतर रेखाएँ (Parallel Lines) :** एक ही तल पर दो रेखाओं को समांतर रेखा कहा जाता है। यदि वह एक दूसरे से परस्पर बराबर दूरी पर हों और एक दूसरे को कभी प्रतिच्छेद न करें।

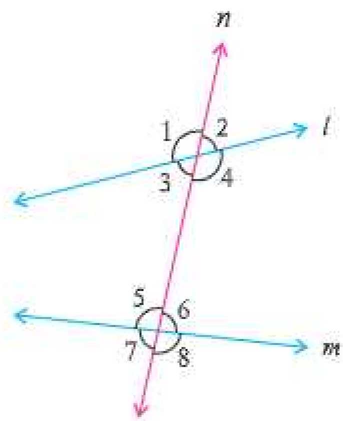
आकृति में, $l$ तथा $m$ आपस में समांतर हैं, हम इसे $l \parallel m$ से दर्शाते हैं।

**4.** **तिर्यक छेदी रेखा (Transversal line) :** एक ऐसी रेखा जो दो अथवा दो से अधिक रेखाओं को भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है, तिर्यक छेदी रेखा कहलाती है।

आकृति (i) में, $l, m$ और $n$ के लिए ; $m, l$ और $n$ के लिए $n, l$ और $m$ की तिर्यक छेदी रेखा (ii) में $l$ तथा $m$ तिर्यक छेदी $p$ है।

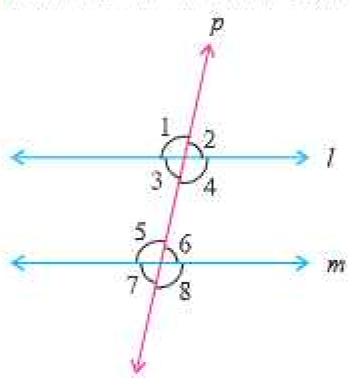
## असमातंर रेखाओं और तिर्यक छेदी रेखा द्वारा निर्मित कोण (Angles made by a transversal with non parallel lines)

आकृति में, रेखाएँ $l$ तथा $m$ तिर्यक छेदी रेखा $n$ द्वारा काटी जा रही हैं। इस प्रकार बनने वाले 1 से 8 तक अंकित कोणों के विशिष्ट नाम हैं :-

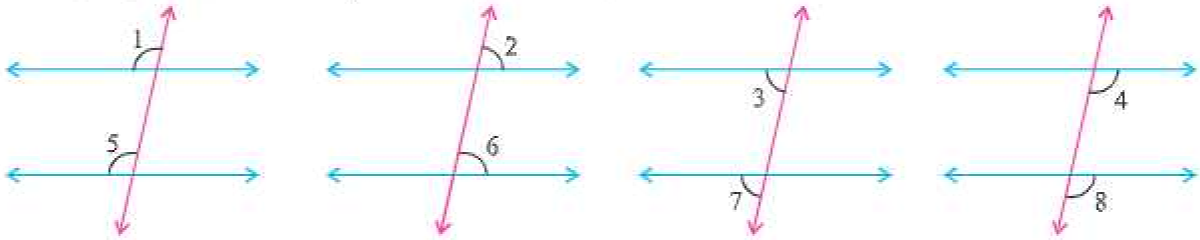



| | |
|---|---|
| अंत: कोण (Interior angles) | $\angle 3, \angle 4$ |
| | $\angle 5, \angle 6$ |
| बाह्य कोण (Exterior angles) | $\angle 1, \angle 2$ |
| | $\angle 7, \angle 8$ |
| संगत कोणों के युग्म (Pairs of corresponding angles) | $\angle 1$ and $\angle 5$ |
| | $\angle 2$ और $\angle 6$ |
| | $\angle 3$ और $\angle 7$ |
| | $\angle 4$ और $\angle 8$ |
| एकांतर अंत: कोणों के युग्म (Pairs of alternate interior angles) | $\angle 3$ और $\angle 6$ |
| | $\angle 4$ और $\angle 5$ |
| एकांतर बाह्य कोण (Pairs of alternate exterior angles) | $\angle 1$ और $\angle 8$ |
| | $\angle 2$ और $\angle 7$ |
| तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ बने अंत: कोणों के युग्म (Pairs of Co-interior angles) | $\angle 3$ और $\angle 5$ |
| | $\angle 4$ और $\angle 6$ |

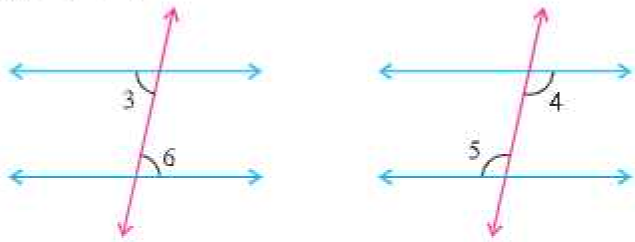
**समातंर रेखाओं और तिर्यक छेदी रेखा :** समांतर रेखाओं और तिर्यक छेदी रेखा द्वारा निर्मित कोण से बहुत ही रुचिकर परिणाम प्राप्त होते हैं।



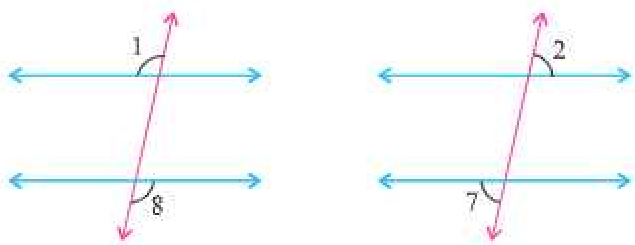
1. यदि दो समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटी जाती है, तो संगत कोणों के प्रत्येक युग्म का माप समान होता है। अर्थात $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$.



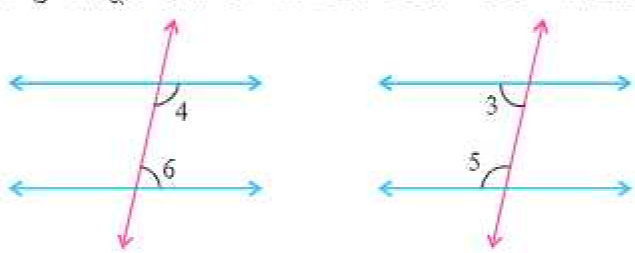

2. यदि दो समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटी जाती हैं, तो अत: एकांतर कोणों का प्रत्येक युग्म समान होता है।
अर्थात $\angle 3 = \angle 6$ और $\angle 4 = \angle 5$



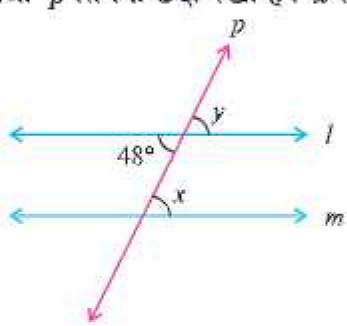

3. यदि दो समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक छेदी रेखी द्वारा काटी जाती हैं, तो बाह्य एकांतर कोणों का प्रत्येक युग्म समान होता है। अर्थात $\angle 1 = \angle 8$ और $\angle 2 = \angle 7$




4. यदि दो समांतर रेखाएं किसी तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटी जाती हैं, तो तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ को बने अंत: कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है। अर्थात $\angle 4 + \angle 6 = 180°$ और $\angle 3 + \angle 5 = 180°$




**उदाहरण-1 : आकृति में, $l \parallel m$ तथा $p$ तिर्यक छेदी रेखा है। $x$ तथा $y$ का मान ज्ञात कीजिए।**



**हल :** यहां $l \parallel m$ है और $p$ तिर्यक छेदी रेखा है।

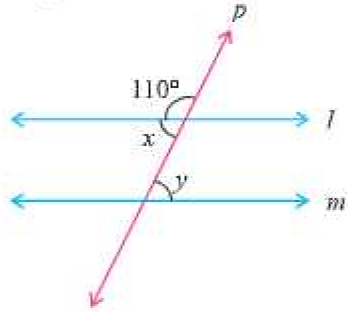
तो 48° और $\angle x$ एकातंर अंत: कोण है।

$\therefore \quad \angle x = 48°$

तथा $\angle x$ और $\angle y$ संगत कोण है। $\quad \angle y = \angle x$

$\therefore \quad \angle y = 48°$

**उदाहरण-2 : आकृति में, $l \parallel m$ और $p$ तिर्यक छेदी रेखा है तो $x, y$ का मान ज्ञात कीजिए।**




**हल :** $p$ एक सरल रेखा है।

तो,

$110° + \angle x = 180°$ [रैखिक युग्म]

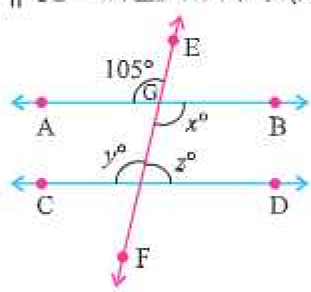
$\angle x = 180° - 110°$

$\angle x = 70°$

$\angle y = \angle x$ [एकातंर अंत: कोण]

$\angle y = 70°$

**उदाहरण-3 : दी हुई आकृति में, AB || CD और EF तिर्यक छेदी रेखा है। यदि $\angle AGE = 105°$ हो तो $\angle x$, $\angle y$ तथा $\angle z$ का मान ज्ञात करो।**




**हल :** हमें पता है–

$\angle x = \angle AGE = 105°$ [उर्ध्वाधर सम्मुख कोण]

$\angle y = \angle x$ [एकातंर अंत: कोण]

$\angle y = 105°$

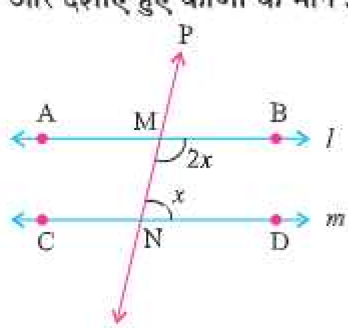
$\angle y + \angle z = 180°$ [रैखिक युग्म]

$105° + \angle z = 180°$

$\angle z = 180° - 105°$

$\angle z = 75°$

**उदाहरण-4 : दी हुई आकृति में $x$ और दर्शाए हुए कोणों के मान ज्ञात कीजिए।**

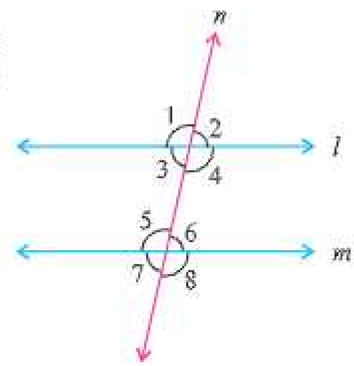


हल : $\angle BMN + \angle DNM = 180°$ (तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ बने अंत: कोणों के युग्म)

$$2x + x = 180°$$
$$3x = 180°$$
$$x = 60°$$
$$\angle BMN = 2x = 2 \times 60 = 120°$$
$$\angle DNM = x = 60°$$

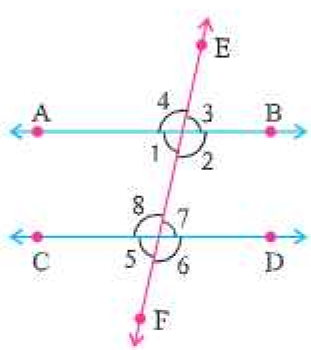
## प्रश्नावली - 5.2

1. दी हुई आकृति में, संगत कोण, एकातंर अंत: कोण, एकांतर बाह्य कोण, आसन्न कोण, उर्ध्वाधर सम्मुख कोण, तिर्यक छेदी रेखी के एक ही तरफ बने कोण, रैखिक युग्म को पहचानो।




(*i*) $\angle 3$ और $\angle 6$
(*ii*) $\angle 3$ और $\angle 7$
(*iii*) $\angle 2$ और $\angle 4$
(*iv*) $\angle 2$ और $\angle 7$
(*v*) $\angle 1$ और $\angle 8$
(*vi*) $\angle 4$ और $\angle 6$
(*vii*) $\angle 1$ और $\angle 5$
(*viii*) $\angle 1$ और $\angle 4$
(*ix*) $\angle 5$ और $\angle 7$

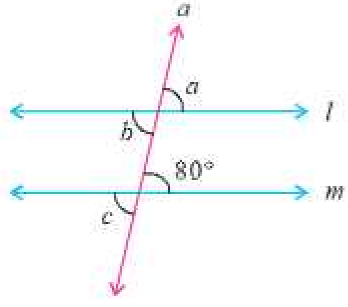
2. आकृति में, निम्नलिखित की पहचान कीजिए।



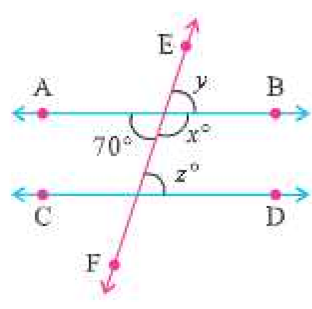

(*i*) संगत कोणों के युग्म
(*ii*) अंत: एकांतर कोणों के युग्म
(*iii*) तिर्यक छेदी रेखा के एक तरफ बने अंत: कोणों के युग्म
(*iv*) उर्ध्वाधर सम्मुख कोण

3. दी हुई आकृति में, समांतर रेखाएँ दी गई हैं। दर्शाए गए अज्ञात कोण ज्ञात कीजिए।

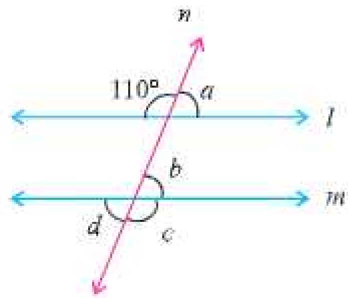
(*i*)



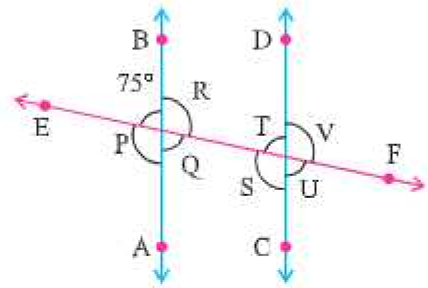

(*ii*)



(*iii*)

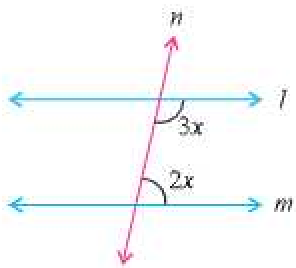



(*iv*)

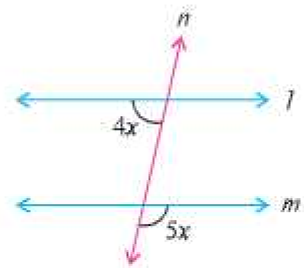



**4.** दी हुई आकृति में, यदि $l \parallel m$ है तो $x$ ज्ञात कीजिए।

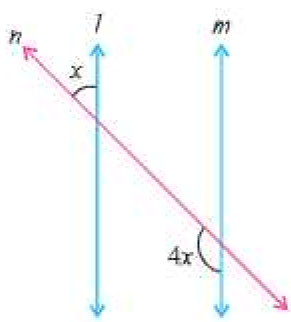
(*i*)



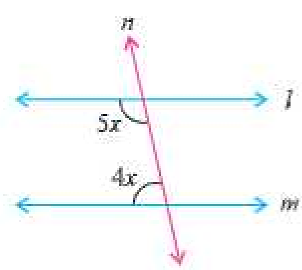

(*ii*)




(*iii*)



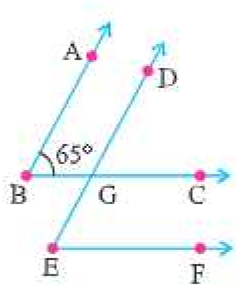

(*iv*)

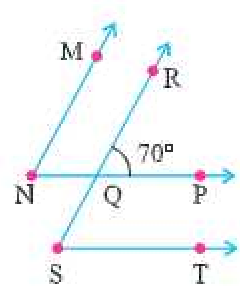



**5.** दी हुई आकृति में, दो कोणों की भुजाएँ समांतर है। तो ज्ञात कीजिए।

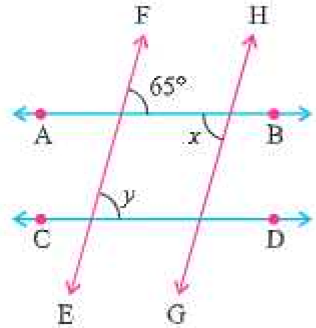
(*a*) (*i*) $\angle$DGC   (*b*) (*i*) $\angle$MNP

(*ii*) $\angle$DEF   (*ii*) $\angle$RST

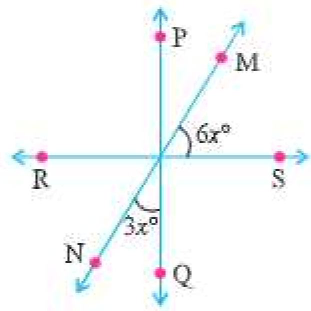


**6.** नीचे दी हुई आकृति में, AB ∥ CD और EF ∥ GH है तो $\angle x$ तथा $\angle y$ का मान ज्ञात कीजिए।

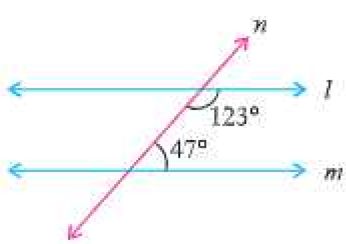



**7.** दी आकृति में, PQ ⊥ RS है तो $x$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

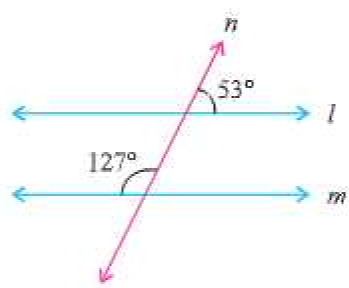



**8.** नीचे दी हुई आकृतियों में निर्णय लीजिए कि क्या $l \parallel m$ है या नहीं।

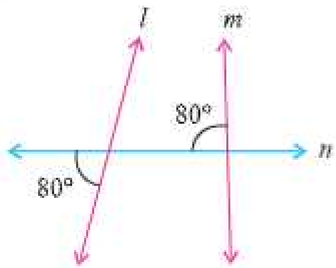
(i)



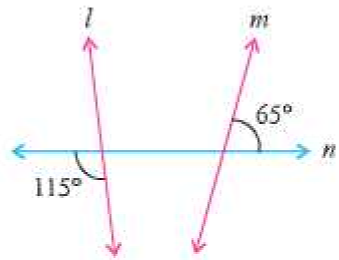

(ii)




(iii)




(iv)




**9.** **बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(i) पूरक कोणों का युग्म ............. है।

(a) 130°, 50° (b) 35°, 55°

(c) 25°, 75° (d) 27°, 53°

(*ii*) संपूरक कोणों का युग्म ............. है।

(*a*) 55°, 115° (*b*) 65°, 125°

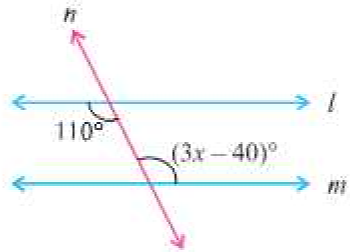
(*c*) 47°, 133° (*d*) 40°, 50°

(*iii*) यदि रैखिक युग्म का एक कोण न्यून कोण हो तो दूसरा कोण .............. होता है।

(*a*) न्यून कोण (*b*) अधिक कोण

(*c*) समकोण (*d*) सरल कोण

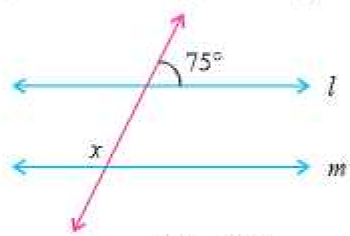
(*iv*) दी आकृति में, $l \parallel m$ है तो $x$ का मान ज्ञात कीजिए।




(*a*) 50° (*b*) 60°

(*c*) 70° (*d*) 45°

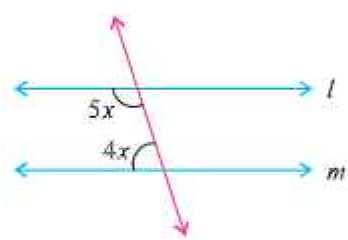
(*v*) दी आकृति में, यदि $l \parallel m$ है तो $x$ का मान ज्ञात कीजिए।




(*a*) 75° (*b*) 95°

(*c*) 105° (*d*) 115°

(*vi*) दी आकृति में, $x$ का वह मान ज्ञात कीजिए जिससे $l \parallel m$ हो जाए।




(*a*) 20 (*b*) 30

(*c*) 60 (*d*) 80

**मूल उद्देश्य : समांतर रेखाओं और तिर्यक छेदी रेखा द्वारा निर्मित कोणों को दर्शाना।**

**उद्देश्य :** समांतर रेखाओं और तिर्यक छेदी रेखा द्वारा निर्मित संगत कोण और एकांतर अंत: कोणों को पेपर कटिंग द्वारा दर्शाना।

**पूर्व ज्ञान :**

(*i*) एकांतर अंत: कोण, संगत कोण और उर्ध्वाधर सम्मुख कोण की जानकारी।

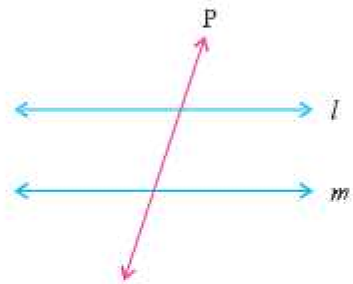
(*ii*) समांतर रेखाओं के बारे में जानकारी।

**आवश्यक सामग्री :**

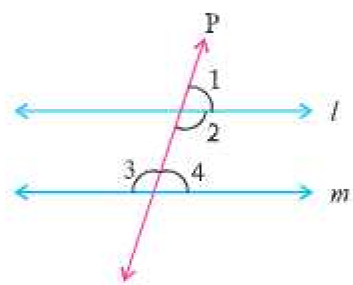
| | |
|---|---|
| (*i*) सफेद चार्ट | (*ii*) कैंची |
| (*iii*) ज्यामिति बॉक्स | (*iv*) रंगीन पेन |
| (*v*) रंगीन कागज़ | (*vi*) गोंद |

**विधि :**

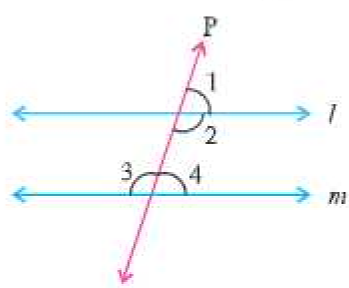
1. एक सफेद चार्ट लीजिए और उस पर दो समांतर रेखाएँ $l$ तथा $m$ और तिर्यक छेदी रेखा P बनाओ।



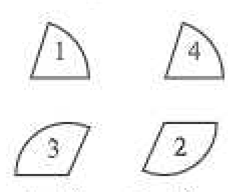

2. आकृति में दर्शाए अनुसार, कोणों के नाम $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ तथा $\angle 4$ लिखो।



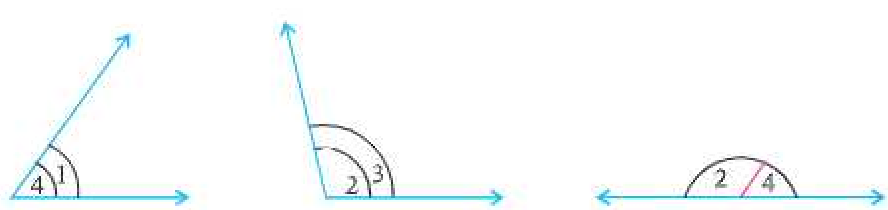

3. इनमें भिन्न-भिन्न रंग भरो और फिर उन्हें काट लीजिए।




4. चित्र 4 में दर्शाए अनुसार कोणों को काटिए।




5. अब, $\angle 1$ और $\angle 4$, $\angle 2$ और $\angle 3$ और $\angle 2$ और $\angle 4$ को दर्शाए अनुसार क्रम में लगाएँ।



**निरीक्षण :** हम देख सकते है कि

(*i*) $\angle 1$ तथा $\angle 4$ को पूरी तरह से ढक रहा है।

(*ii*) $\angle 2$ तथा $\angle 3$ को पूरी तरह से ढक रहा है।

(*iii*) $\angle 2$ तथा $\angle 4$ मिल कर एक सरल रेखा बना रहे हैं।

**परिणाम :**

1 संगत कोण : $\angle 1$ तथा $\angle 4$ संगत कोण है और $\angle 1 = \angle 4$

2. एकांतर अंत: कोण : $\angle 2$ तथा $\angle 3$ एकांतर अंत: कोण है और $\angle 2 = \angle 3$

3. तिर्यक छेदी रेखा के एक तरह के अंत: कोण : $\angle 2$ तथा $\angle 4$ एक तरफ के अंत: कोण हैं और $\angle 2 + \angle 4 = 180°$

## मौखिक प्रश्न

**प्रश्न 1. समांतर रेखाएँ किसे कहते हैं ?**

उत्तर— वे रेखाएँ जो सदैव एक दूसरे से निश्चित दूरी पर होती हैं और कभी प्रतिच्छेद नहीं करतीं।

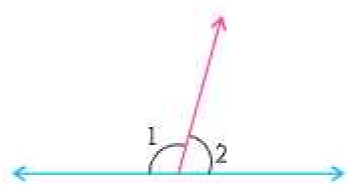
**प्रश्न 2. तिर्यक छेदी रेखा के एक तरफ के अंत: कोणों का योग बताओ ?**

उत्तर— 180°

**प्रश्न 3. यदि दो रेखाऐं प्रतिच्छेद करती हों तो उस समय बने उर्ध्वाधर सम्मुख कोणों के बीच क्या संबंध होता है ?**

उत्तर— बराबर (समान) होते हैं।

**प्रश्न 4. दर्शाए गए कोणों के प्रकार बताओ।**




उत्तर— $\angle 1$ और $\angle 2$ रेखिक युग्म बन रहे हैं।

## हमने क्या चर्चा की ?

**1.** दो किरणें जिनका एक उभयनिष्ठ बिंदु हो, एक कोण की रचना करती है।

**2.** (*i*) दो कोण एक दूसरे के पूरक होते हैं यदि उनका योग 90° हो।

(*ii*) दो कोण एक दूसरे के संपूरक होते हैं, यदि उनका योग 180° हो।

**3.** रैखिक युग्म का योग 180° होता है।

**4.** एक बिंदु के इर्द-गिर्द बने सभी कोणों का योग 360° होता है।

**5.** एक रेखा जो एक तल पर दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर काटती है, उसे तिर्यक छेदी रेखा कहते हैं।

**6.** यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक छेदी रेखा प्रतिच्छेद करती है तो,

(*i*) एकांतर अंत: कोणों के युग्म समान होते हैं।

(*ii*) एकांतर बाह्य कोणों के युग्म समान होते हैं।

(*iii*) संगत कोणों के युग्म समान होते हैं।

(*iv*) तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ बने अंत: कोणों का योग 180° होता है।

**सीखने के परिणाम**

**इस अध्याय के पूर्ण होने पर विद्यार्थी :**

1. रेखा, रेखा-खंड, किरणों और कोणों की पहचान करने के योग्य हो जाएंगे।
2. भिन्न-भिन्न कोणों के युग्म जैसे रैखिक युग्म, पूरक कोण, संपूरक कोण, आसन्न कोण तथा उर्ध्वाधर सम्मुख कोण आदि की जानकारी को प्रश्नों में प्रयोग करने के योग्य हो जाएंगे।
3. कोणों के नाम और उनकी रचना करने के योग्य हो जाएंगे।
4. जब रेखाओं के युग्म को एक तिर्यक छेदी रेखा काटती है तो भिन्न-भिन्न बनाने वाले कोणों की पहचान करने के योग्य हो जाएंगे।
5. अपने आस-पास की वस्तुओं, इमारतों तथा ढाँचों में कोणों के प्रयोग को समझने के योग्य हो जाएंगे।

# उत्तरमाला

## प्रश्नावली 5.1

**1.** (*i*) समकोण (*ii*) अधिक कोण
(*iii*) सरल कोण (*iv*) बृहत्कोण
(*v*) अधिक कोण (*vi*) न्यून कोण

**2.** (*i*) $37°$ (*ii*) $0°$
(*iii*) $5°$ (*iv*) $50°$
(*v*) $90°$

**3.** (*i*) $125°$ (*ii*) $75°$
(*iii*) $80°$ (*iv*) $120°$
(*v*) $90°$

**4.** (*i*) संपूरक कोण (*ii*) संपूरक कोण
(*iii*) पूरक कोण (*iv*) पूरक कोण
(*v*) संपूरक कोण

**5.** $40°$ और $50°$

**6.** $50°, 130°$

**7.** $45°$

**8.** $90°$

**9.** $130°$

**10.** (*i*) $80°$ (*ii*) $100°$

**11.** (*i*) $x = 100°, y = 80°$ (*ii*) $x = 120°, y = 120°, z = 60°$

**12.** (*i*) $x = 100°, y = 45°, z = 135°$ (*ii*) $x = 55°, y = 65°, z = 60°, p = 60°$

**13.** (*i*) $90°$ (*ii*) $180°$
(*iii*) रैखिक युग्म (*iv*) समान

## प्रश्नावली 5.2

**1.** (*i*) एकांतर अंत: कोण (*ii*) संगत कोण
(*iii*) आसन्न कोण (*iv*) एकांतर बाह्य कोण
(*v*) एकांतर बाह्य कोण (*vi*) एक तरफ के अंत: कोण
(*vii*) संगत कोण (*viii*) शीर्ष सम्मुख कोण
(*ix*) रैखिक युग्म

**2.** (*i*) $\angle 1$ और $\angle 5$, $\angle 2$ और $\angle 6$, $\angle 3$ और $\angle 7$, $\angle 4$ और $\angle 8$

(*ii*) $\angle 1$ और $\angle 7$, $\angle 2$ और $\angle 8$,

(*iii*) $\angle 1$ और $\angle 8$, $\angle 2$ और $\angle 7$

(*iv*) $\angle 1$ और $\angle 3$, $\angle 2$ और $\angle 4$, $\angle 5$ और $\angle 7$, $\angle 6$ और $\angle 8$

**3.** (*i*) $a = 80° \; b = 80° \; c = 80°$

(*ii*) $x = 110° \; y = 70° \; z = 70°$

(*iii*) $a = 70 \; b = 70° \; c = 110° \; d = 70°$

(*iv*) $\mathrm{P} = 105° \; \mathrm{Q} = 75° \; \mathrm{R} = 105° \; \mathrm{S} = 105° \; \mathrm{T} = 75° \; \mathrm{U} = 75° \; \mathrm{V} = 105°$

**4.** (*i*) $x = 36$ (*ii*) $x = 20$

(*iii*) $x = 36$ (*iv*) $x = 20$

**5.** (*a*) (*i*) 65° (*ii*) 65°

(*b*) (*i*) 70° (*ii*) 70°

**6.** $x = 65° \; y = 65°$ 7. $x = 10$

**8.** (*i*) नहीं (*ii*) हां

(*iii*) नहीं (*iv*) हां

**9.** (*i*) (*b*) (*ii*) (*c*) (*iii*) (*b*)

(*iv*) (*a*) (*v*) (*c*) (*vi*) (*a*)

अध्याय

# 6

P8M3Q5

# त्रिभुज

## उद्देश्य :-

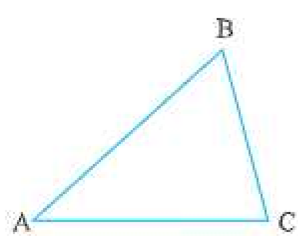
**इस अध्याय में आप सीखेंगे :-**

1. त्रिभुज के भिन्न-भिन्न भागों की पहचान करना।
2. त्रिभुज के बाह्य तथा अंत: कोणों के बीच संबंध को समझना।
3. त्रिभुज के अंत: कोणों के आंतरिक संबंध को समझना।
4. समकोण त्रिभुज के आंतरिक संबंध को समझना।
5. त्रिभुज के लिए कोणों का योग गुण, बाह्य कोण गुण तथा पाइथागोरस गुण का प्रयोग करना।

## हमारे देश का गर्व (Our Nations's Pride)

**बौद्धायन (लगभग 800 बी. सी-740 बी. सी.) :** बौद्धायन को सब से पहले लिखे गये सुलभसूत्र, जिनको बौद्धायन सूत्र भी कहा जाता है, के लेखक के रूप में जाना जाता है। बौंद्धायन सुलभसूत्र बहुत सारे महत्वपूर्ण गणित परिणामों का संग्रह है। ऐसे गणित के कई संकल्प हैं, जिन पर पहुँचने वाले बौद्धायन सर्वप्रथम थे और जिनको बाद में पश्चिमी जगत में खोजा गया। आप को यह जानकर हैरानी (आश्चर्य) होगा कि जो आज पाइथागोरस सिद्धांत के नाम से जाना जाता है, उसको पाइथागोरस के समय से कई वर्षों पूर्व ही बौद्धायन के सुलभसूत्रों में लिखा जा चुका था। पाई ($\pi$) के मूल्य की गणना भी सर्वप्रथम बौद्धायन ने ही की थी।

## भूमिका

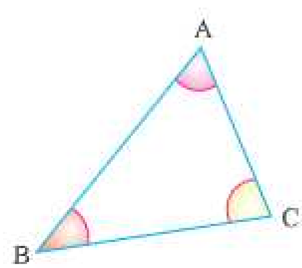



**त्रिभुज :** त्रिभुज तीन रेखा खण्डों से बनी एक बंद सरल आकृति है। इसके तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ तथा तीन कोण होते हैं। चित्र में ABC एक त्रिभुज है। इसकी

(*i*) तीन भुजाएँ AB, BC, CA है।

(*ii*) तीन कोण $\angle BCA$, $\angle BAC$ और $\angle ABC$ जिनको क्रमश: $\angle C$, $\angle A$, $\angle B$ क्रमानुसार से भी लिखा जा सकता है।

(*iii*) तीन शीर्ष A, B, C है।
यहाँ A भुजा BC के सामने वाला शीर्ष है। B भुजा CA के सम्मुख शीर्ष तथा C भुजा AB के सम्मुख शीर्ष है।

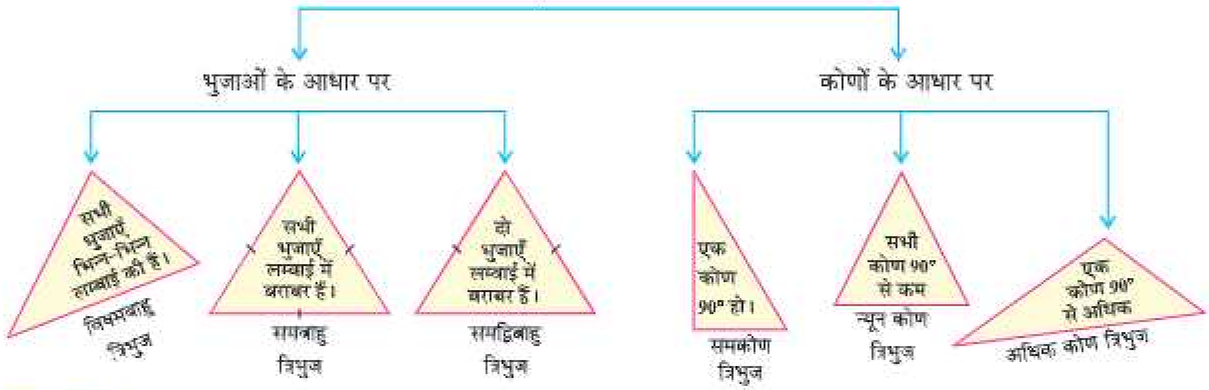



**अंत: कोण :** $\Delta ABC$ में, $\angle BAC$, $\angle ABC$ तथा $\angle ACB$ को अंत: कोण कहते हैं, क्योंकि यह कोण त्रिभुज के अंदर स्थित है। आकृति में छाया कोण अंत: कोण हैं।

## त्रिभुज का वर्गीकरण (Classification of Triangles)

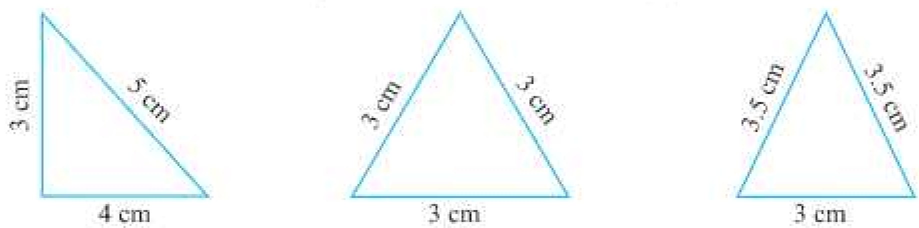
त्रिभुज का वर्गीकरण भुजाओं तथा कोणों के आधार पर इस प्रकार किया जाता है।

**त्रिभुज का वर्गीकरण**




**उदाहरण-1 : निम्न दिए गये त्रिभुजों की भुजाओं के आधार पर वर्गीकृत करो।**

*(i)* *(ii)* *(iii)*



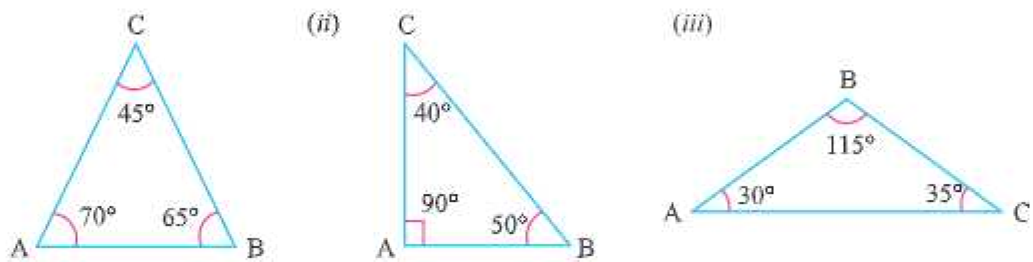

हल : *(i)* सारी भुजाएँ अलग-अलग लम्बाई की हैं। इसलिए यह विषमबाहु त्रिभुज है।

*(ii)* सारी भुजाएँ समान हैं। इसलिए समबाहु त्रिभुज है।

*(iii)* दो भुजाएँ समान है, इसलिए यह समद्विबाहु त्रिभुज है।

**उदाहरण-2 : नीचे दी गई त्रिभुजों को कोणों के आधार पर वर्गीकृत करो।**

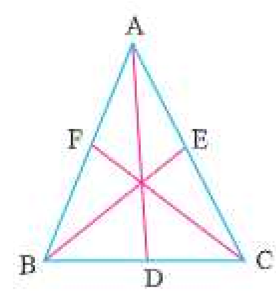
*(i)* *(ii)* *(iii)*




हल : *(i)* त्रिभुज ABC में, सबी कोण 90° से कम हैं, इसलिए यह त्रिभुज न्यून कोण त्रिभुज है।

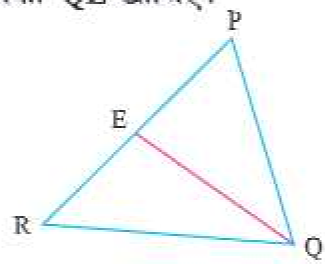
*(ii)* त्रिभुज ABC में, $\angle A = 90°$ है, इसलिए यह त्रिभुज समकोण त्रिभुज है।

*(iii)* त्रिभुज ABC में $\angle B = 115°$ है, जो कि 90° से अधिक है, इसलिए यह त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज है।




**त्रिभुज की माध्यिका (Median):** माध्यिका, त्रिभुज के एक शीर्ष को, (विपरीत) सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलती है, आकृति में, $\Delta ABC$ में D, E तथा F भुजा BC, भुजा CA, भुजा AB के क्रमानुसार मध्य बिंदू हैं और AD, BE और CF माध्यिकाएं हैं।

**उदाहरण-3 : एक त्रिभुज PQR बनाओ, इसके साथ ΔPQR ही एक माध्यिका QE खीचिए।**




हल : ΔPQR बनाएं, माध्यिका QE के लिए हमें PR के मध्य बिन्दु E की आवश्यकता है। फिर QE को मिलाएं।

**ध्यान दीजिए :-**

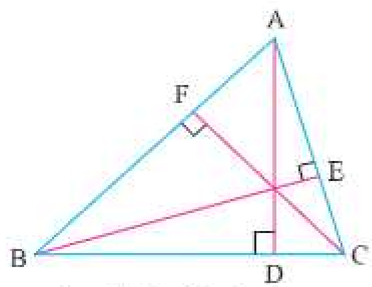
(*i*) एक त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ हैं सभी एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं, उस बिंदु को केन्द्रक कहते हैं।

(*ii*) माध्यिकाएं पूर्ण रूप से त्रिभुज के अंदर स्थित हैं।

(*iii*) माध्यिका त्रिभुज के क्षेत्रफल को दो समान भागों में बाँटती है।

(*iv*) एक समबाहु त्रिभुज में सारी माध्याकाओं की लम्बाई सदा समान होती है।

**त्रिभुज के शीर्षलंब (Altitude) :** त्रिभुज के शीर्ष से सम्मुख भुजा पर खींचा गया लंब शीर्षलंब कहलाता है।

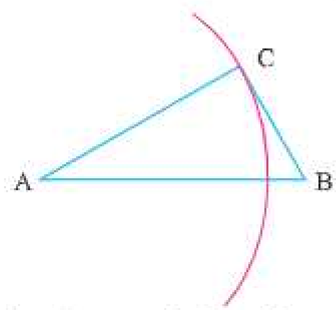



दी गई आकृति में, AD, BE और CF, ΔABC के शीर्षलंब हैं, जो कि क्रमश: शीर्ष A, B और C क्रमानुसार उनकी सम्मुख भुजाओं पर खींचे गए हैं।

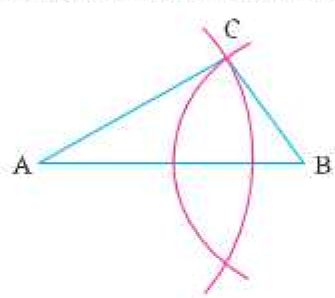
**क्रिया द्वारा शीर्षलंब बनाना-**

**दी हुई एक त्रिभुज ABC :-**

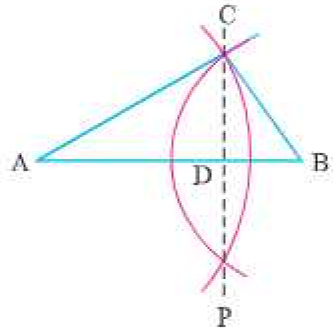
**1.** A को केन्द्र और रेखाखंड AC को त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए।



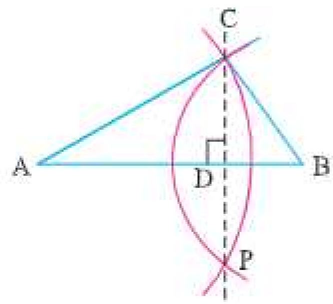

**2.** दूसरी चाप B को केन्द्र लेकर तथा रेखाखंड BC को त्रिज्या लेकर खींचिए।



3. दो चापें दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हैं। एक प्रतिच्छेदी बिन्दु शीर्ष C है और मान लो कि दूसरा प्रतिच्छेदी बिन्दु P है।




4. C और P बिन्दुओं को मिलाओ।
5. PC, AB को एक बिन्दु D पर काटती हैं।
6. अब CD दिए हुए त्रिभुज का लंब है।




**ध्यान दें :**

(*i*) त्रिभुज के तीन शीर्षलंब होते हैं।

(*ii*) शीर्षलंब को त्रिभुज की ऊँचाई भी कहा जाता है।

(*iii*) न्यून कोण त्रिभुज के सभी शीर्षलंब त्रिभुज के भीतर स्थित हैं।

(*iv*) एक अधिक कोण त्रिभुज में, शीर्षलंब जो कि अधिक कोण के परस्पर संलग्न की शीर्ष पर है, त्रिभुज के भीतर स्थित है, जबकि दूसरे दो शीर्षलंब त्रिभुज के बाहर स्थित हैं।

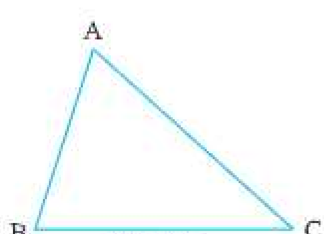
(*v*) एक समकोण त्रिभुज में दो लंब वास्तव में त्रिभुज के लंब और आधार होते हैं, जबकि तीसरी भुजा पर बना लंब त्रिभुज के अंदर स्थित होता है।

(*vi*) समबाहु त्रिभुज में सभी शीर्षलंब एक जैसी लम्बाई में होते हैं।

(*vii*) त्रिभुज के शीर्षलंब एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं, जिसको लंब केंद्र (Orthocentre) कहते हैं।

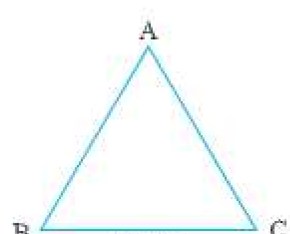
**उदाहरण-4 : A से BC पर दिए गए त्रिभुजों पर शीर्ष लंब खींचिए।**

(*i*)



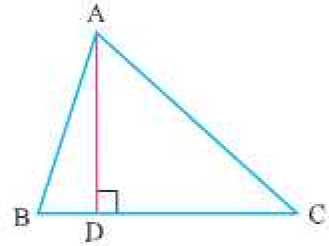

विषमबाहु

(*ii*)

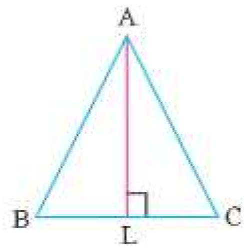



समबाहु

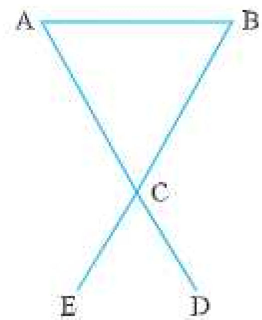
हल : (*a*) दी गई आकृति में, AD, A से BC पर शीर्ष लंब है।




(*b*) दी गई आकृति में, AL, बिंदु A से BC पर खींचा हुआ शीर्षलंब है।



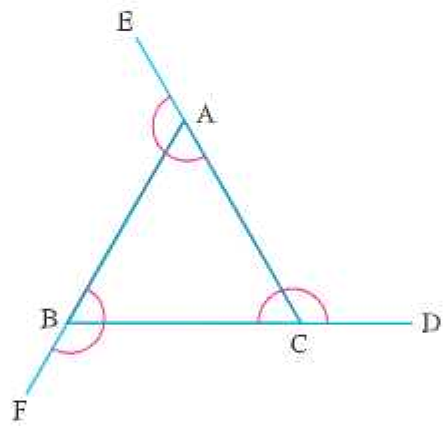

**त्रिभुज का बाह्य कोण (Exterior Angle) :** जब त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाई जाती है तो एक बाह्य कोण बनता है। दी गई त्रिभुज $\Delta ABC$, में, अगर भुजा AC को बिन्दु D तक बढ़ाया जाता है तो $\angle BCD$ एक बाह्य कोण है और यदि BC को बिन्दु E तक बढ़ाया जाता है तो $\angle ACE$ बाह्य कोण होगा।




त्रिभुज के दो अंत: कोण, जो कि बाह्य कोण के सम्मुख हैं, उन्हें अंत: सम्मुख कोण कहा जाता है, जबकि तीसरे अंत: कोण को अंत: आसन्न कोण कहा जाता है।

दिए गए त्रिभुज में यदि $\angle ACE$ बाह्य कोण है तो $\angle BCA$, $\angle ACE$ का आसन्न कोण है। बाकी दोनों कोण $\angle CAB$ और $\angle CBA$ अंत: सम्मुख कोण कहलाते हैं।

**ध्यान दीजिए :** एक त्रिभुज में बाह्य कोण तथा अंत: आसन्न (सलंग्न) कोणों का योग सदैव 180° होता है, क्योंकि बाह्य कोण तथा इसके अंत: आसन्न कोणों का युग्म रैखिक युग्म बनता है।




$\therefore$ दी गई आकृति $\Delta ABC$ में,

$\angle BAC + \angle BAE = 180°$

$\angle CBA + \angle CBF = 180°$

$\angle ACB + \angle ACD = 180°$

## त्रिभुज का बाह्य कोण तथा इसके गुण (Exterior angle property of a triangle)

त्रिभुज का बाह्य कोण उसके दो अंत: सम्मुख कोणों के योग के समान होता है।

**उदाहरण-5 : आकृति में $x$ का मूल्य ज्ञात करो।**

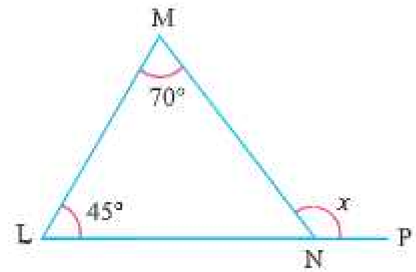
हल : दिए गए चित्र में $\angle LMN = 70^\circ$

और $\angle MLN = 45^\circ$

त्रिभुज के बाह्य कोण के गुण अनुसार

$$\angle LMN + \angle MLN = \angle MNP$$
$$70^\circ + 45^\circ = x$$
$$115^\circ = x$$

अर्थात $x = 115^\circ$

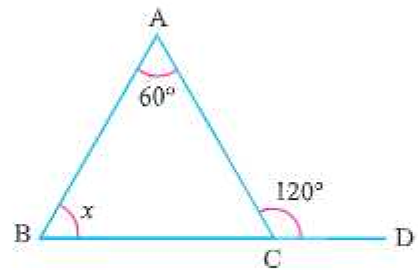



**उदाहरण-6 : त्रिभुज ABC में कोण $x$ ज्ञात करो।**

हल : $\Delta ABC$ में $\angle A = 60^\circ$, बाह्य कोण $\angle ACD = 120^\circ$

त्रिभुज के बाह्य कोण के गुण अनुसार

$$60^\circ + x = 120^\circ$$
$$x = 120^\circ - 60^\circ$$
$$x = 60^\circ$$




**उदाहरण-7 : दी हुई आकृति में $\angle ABC$ तथा $\angle BCA$ का मूल्य ज्ञात करो।**

हल : दी हुई आकृति में $\angle ACB = 5x$, $\angle CBA = 6x$

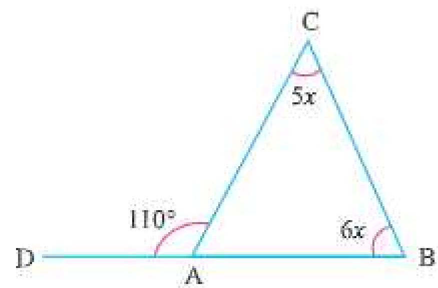
और $\angle CAD = 110^\circ$

त्रिभुज के बाह्य कोण के गुण अनुसार

$$\angle ACB + \angle CBA = \angle CAD$$
$$5x + 6x = 110^\circ$$
$$11x = 110^\circ$$
$$x = \frac{110^\circ}{11}$$
$$x = 10^\circ$$

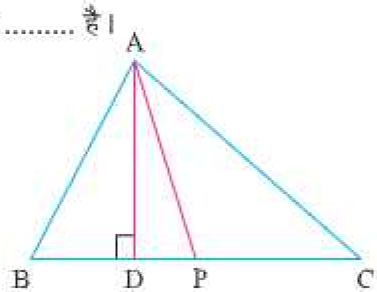
$\therefore$ $\angle CBA = 6 \times 10^\circ = 60^\circ$

$\angle ACB = 5 \times 10^\circ = 50^\circ$




## प्रश्नावली - 6.1

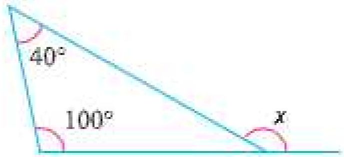
1. एक त्रिभुज ABC में P भुजा BC का मध्य बिन्दु हैं तो AP, $\Delta ABC$ का ......... है।
   (*i*) BP = ................
   (*ii*) $\angle ADC$ = ..............
   (*iii*) BD = BC (सही/गलत)
   (*iv*) AD, $\Delta ABC$ का ................. है।
   (*v*) AP, $\Delta ABC$ का ................. है।



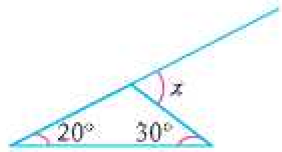

2. (*a*) एक $\Delta ABC$ की तीन माध्यिकाएँ AD, BE और CF खींचिए।
   (*b*) एक समभुजी त्रिभुज तथा इसकी माध्यिकाएँ खींचिए। इन माध्यिकाएँ द्वारा लम्बाइयों की तुलना कीजिए।
   (*c*) एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC खींचिए, जिस पर AB = BC है। इसका शीर्षलंब भी खींचिए।

**3.** दिए गए त्रिभुजों में बाह्य कोण $x$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

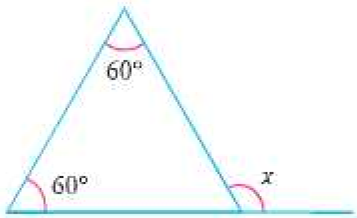
(*i*)



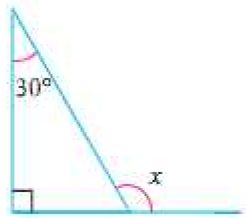

(*ii*)




(*iii*)

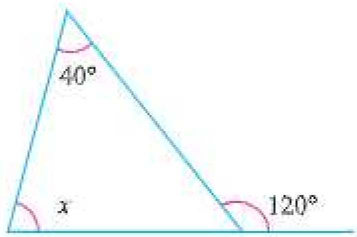



(*iv*)

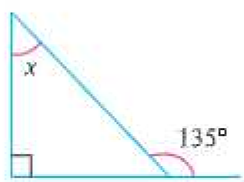



**4.** आकृतियों में $x$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

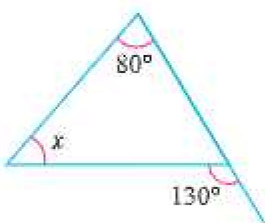
(*i*)




(*ii*)



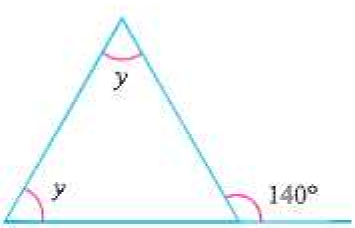

(*iii*)




(*iv*)

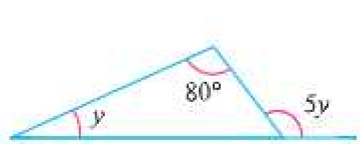
**5.** निम्न दर्शायी गई आकृतियों में $y$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(*i*)




(*ii*)

(*iii*)



**त्रिभुज के अंतः कोणों का योग गुण :** $\Delta ABC$ में, $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$.

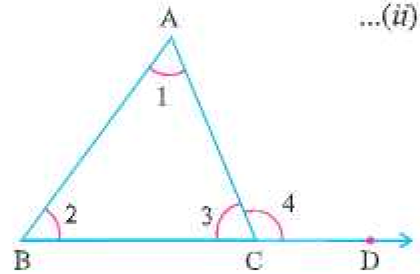
इस को प्रमाणित करने के लिए त्रिभुज के बाह्य कोण के गुण का प्रयोग करते हैं।

यहाँ $\angle 1$, $\angle 2$ तथा $\angle 3$, $\Delta ABC$ के अंत कोण हैं और $\angle 4$ बाह्य कोण है।

हम जानते हैं $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ [त्रिभुज के बाह्य कोण के गुण] ...(*i*)

(*i*) में $\angle 3$ को दोनों तरफ जोड़ने पर

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3 \quad ...(ii)$$




परन्तु $\angle 4$ और $\angle 3$ एक रैखिक युग्म बनाते हैं।

$\therefore$ $\angle 4 + \angle 3 = 180°$

(*ii*) से

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$$

या $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$

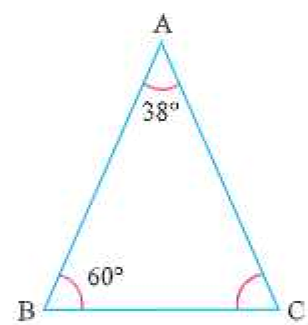
**उदाहरण-1 : क्या एक त्रिभुज के 50°, 70°, 90° कोण हो सकते हैं ?**

हल : $50° + 70° + 90° = 210°$

क्योंकि हम जानते हैं कि त्रिभुज के अंतः कोणों का योग हमेशा 180° होता है। (कोणों का योग गुण)

$\therefore$ त्रिभुज के 50°, 70° तथा 90° कोण नहीं हो सकते।

**उदाहरण-2 : दी गई आकृति में $\angle C$ ज्ञात करो।**




हल : त्रिभुज के अंतः कोणों के योग गुण अनुसार

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

नां $38° + 60° + \angle C = 180°$

$$98° + \angle C = 180°$$

$$\angle C = 180° - 98°$$

$$\angle C = 82°$$

**उदाहरण-3 : त्रिभुज के तीन कोण $(3x + 4)°$, $(2x + 8)°$ तथा $(3x + 8)°$ हैं। कोण ज्ञात करें।**

हल : हम जानते हैं कि त्रिभुज के अंतः कोणों का योग हमेशा 180° होता है।

$$(3x + 4)° + (2x + 8)° + (3x + 8)° = 180°$$

$$(8x + 20)° = 180°$$

$$(8x)° = 180° - 20°$$

$$(8x)° = 160°$$

$$x = \frac{160}{8} = 20$$

$\therefore$ $x = 20°$

$\therefore$ वांछित कोण $= (3x + 4)°, (2x + 8)°$ और $(3x + 8)°$

$= (3 \times 20 + 4)°, (2 \times 20 + 8)°$ और $(3 \times 20 + 8)°$

$= 64°, 48°, 68°$

**उदाहरण-4 : त्रिभुज के कोणों का अनुपात 3 : 4 : 5 है। त्रिभुज के प्रत्येक कोण का परिमाप ज्ञात कीजिए।**

**हल :** मान लीजिए, प्रत्येक कोण का परिमाप $3x$, $4x$ तथा $5x$ है।

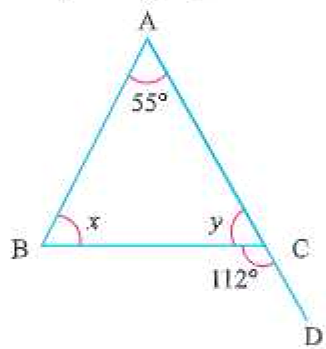
कोणों के योग गुण अनुसार

$$(3x) + (4x) + (5x) = 180^\circ$$
$$12x = 180^\circ$$
$$x = \frac{180^\circ}{12}$$
$$x = 15^\circ$$

वांछित कोण $= 3 \times 15^\circ, 4 \times 15^\circ, 5 \times 15^\circ$

$\therefore \quad = 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$

**उदाहरण-5 : दी गई आकृति में $x$ और $y$ का मूल्य ज्ञात करें।**




**हल :** $\Delta ABC$ में, AC को बिन्दु D तक बढ़ाया/विस्तारित किया गया है।

$\therefore \quad 55^\circ + x = 112^\circ$ [बाह्य कोण गुण अनुसार]

या $\quad x = 112^\circ - 55^\circ$

$x = 57^\circ$ ...(1)

त्रिभुज ABC में

$55^\circ + x + y = 180^\circ$ (कोणों का योग गुण)

$55^\circ + 57^\circ + y = 180^\circ$ (1 का प्रयोग करने पर)

$$112^\circ + y = 180^\circ$$
$$y = 180^\circ - 112^\circ$$
$$y = 68^\circ$$

## प्रश्नावली - 6.2

**1.** ज्ञात करो कि नीचे दिए हुए कोणों से त्रिभुज संभव है।

(*a*) 35°, 70°, 65°

(*b*) 70°. 50°, 60°

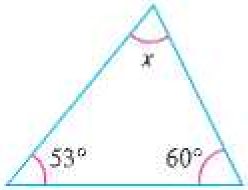
(*c*) 90°, 80°, 20°

(*d*) 60°, 60°, 60°

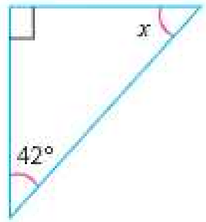
(*e*) 90°, 90°, 90°

**2.** नीचे दी गई आकृतियों में $x$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

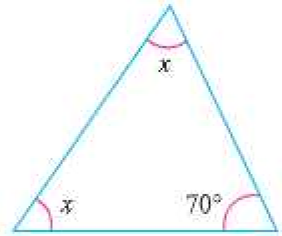
(*i*)



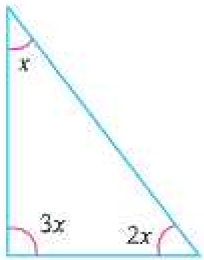

(*ii*)



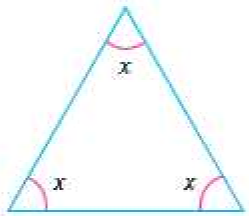

(*iii*)



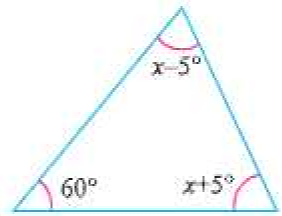

(*iv*)




(*v*)

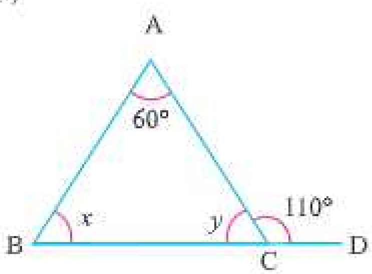



(*vi*)

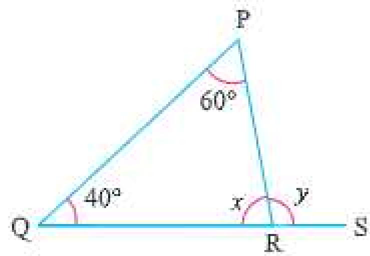



**3.** नीचे दी गई आकृतियों में से $x$ और $y$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

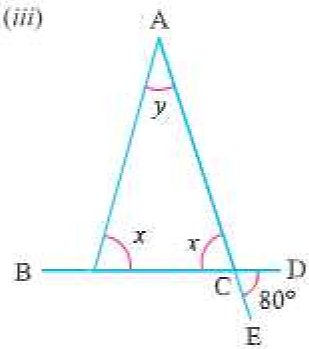
(*i*)



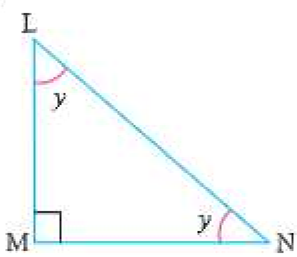

(*ii*)



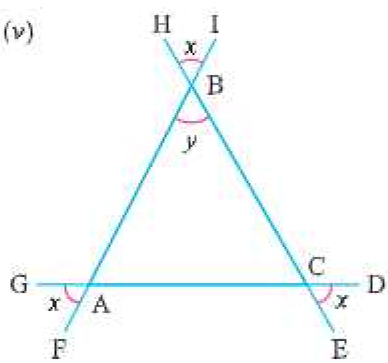

(*iii*)



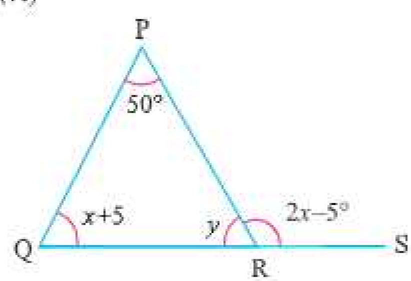

(*iv*)




(*v*)




(*vi*)




**4.** त्रिभुज के कोणों का अनुपात $5 : 6 : 7$ है। प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए।

**5.** त्रिभुज के एक कोण का माप $60°$ है। अन्य दोनों कोणों का अनुपात $4 : 8$ है। कोण ज्ञात कीजिए।

**6.** त्रिभुज ABC में, $\angle B = 50°$, $\angle C = 62°$ है, तो $\angle A$ ज्ञात कीजिए।

**7.** एक समकोण त्रिभुज में दो न्यून कोणों का अनुपात $2 : 3$ है। कोण ज्ञात कीजिए।

**8.** त्रिभुज के तीन कोण $(2x + 20)°$, $(x + 30)°$ तथा $(2x – 10)°$ हैं। कोण ज्ञात कीजिए।

**9. बहुवैकल्पिक प्रश्न**

(*i*) त्रिभुज के दो ............ होते हैं।

(*a*) न्यून कोण (*b*) अधिक कोण

(*c*) समकोण (*d*) इनसे कोई भी नहीं

(*ii*) नीचे दिए गए कोणों के माप से त्रिभुज संभव है?

(*a*) 30°, 40°, 100° (*b*) 60°, 60°, 70°

(*c*) 60°, 50°, 70° (d) 90°, 89°, 92°

(*iii*) एक समद्विबाहु त्रिभुज का आधार कोण 45° है तो इसका तीसरा कोण है।

(*a*) 45° (*b*) 60°

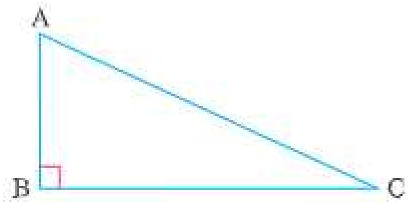
(*c*) 100° (*d*) 90°

(*iv*) एक त्रिभुज में अधिक कोणों की संख्या ............... हो सकती है।

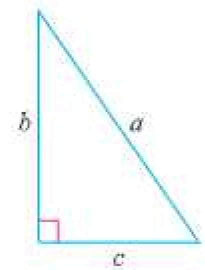
(*a*) 2 (*b*) 1

(*c*) 3 (*d*) 4

## समकोण त्रिभुज और पाइथागोरस गुण




ईसा की छठी शताब्दी से पूर्व, एक यूनानी दार्शनिक पाइथागोरस ने समकोण त्रिभुज से सम्बन्धित एक बहुपयोगी एवं महत्वपूर्ण गुण के बारे में पता लगाया, जैसे कि इस गुण को उसके नाम से ही जाना जाता है। वास्तव में इस गुण का ज्ञान कुछ अन्य देशों के लोगों को भी था। भारतीय गणितज्ञ बौद्धायन ने भी इस गुण के बारे एक गुण की जानकारी दी थी।

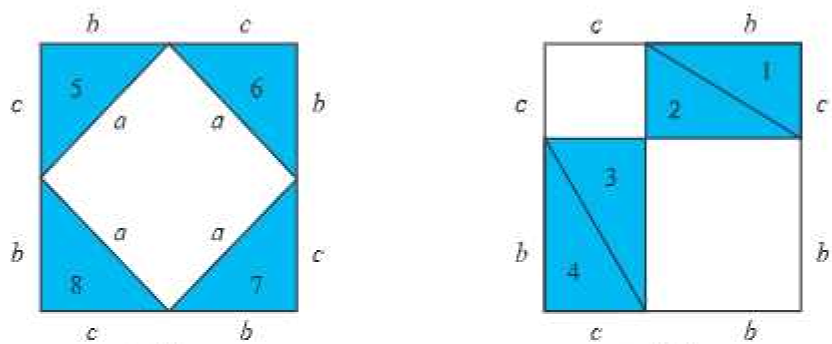



अब हम पाइथागोरस गुण का विस्तार से अध्ययन करते हैं। समकोण त्रिभुज में उसकी भुजाओं को विशेष नाम दिए जाते हैं। समकोण के सामने वाली भुजा को 'कर्ण' कहते हैं तथा दो भुजाओं को समकोण त्रिभुज के पाद (Legs) कहते हैं।

ΔABC में, शीर्ष B पर समकोण बना है। इसलिए, AC इस का कर्ण है। $\overline{AB}$ और $\overline{BC}$ समकोण त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ हैं।

किसी भी माप का एक समकोण लेकर उसके आठ प्रतिरूप बनाओ। उदाहरण के लिए एक समकोण त्रिभुज लेते हैं जिसके कर्ण का माप *a* इकाई और उसके दो यदि पादों का *b* इकाई तथा *c* इकाई है।

एक कागज़ पर एक समान माप वाले दो वर्ग बनाएं, जिसकी भुजाओं का माप *b* + *c* के समान हो। अब अपने आठ त्रिभुजों में से चार त्रिभुजों को वर्ग A तथा चार त्रिभुजों को B में स्थापित करो जैसे कि निम्न वर्णित आकृति में दर्शाया गया है।

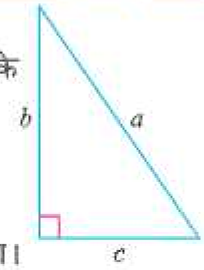



वर्ग A वर्ग B

आप जानते हैं कि दोनों वर्ग एक रूप हैं अर्थात एक समान हैं तथा दर्शाए गए आठ त्रिभुज भी एक समान हैं।

अंत में वर्ग A का ढका हुआ क्षेत्रफल = वर्ग B का ढका हुआ क्षेत्रफल

या वर्ग A के आंतरिक वर्ग का क्षेत्रफल = वर्ग B के आंतरिक दोनों बिना ढके हुए वर्गों के क्षेत्रफल का योग

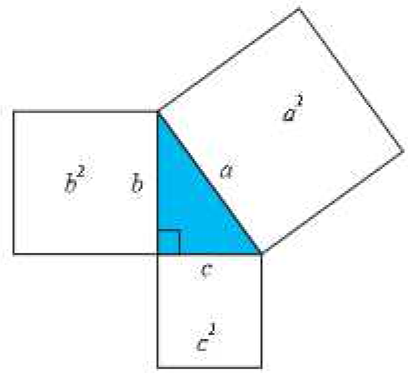



भाव, $a^2 = b^2 + c^2$

यह पाइथागोरस गुण है। इसको इस प्रकार कहा जा सकता है :

एक समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग = त्रिभुज के दो पादों पर बने हुए दोनों वर्गों का योग।

पाइथागोरस गुण, गणित में एक बहुत ही महत्वपूर्ण गुण है। इसके अनुसार किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल पादों पर बने वर्गों के क्षेत्रफल के योग के बराबर होता है।




एक वर्गकार कागज़ लेकर उस पर एक समकोण त्रिभुज बनाओ। इसकी भुजाओं पर वर्गों का क्षेत्रफल ज्ञात करो तथा इस प्रमाणित किए गए रूप की व्यावहारिक जांच करो।

यदि कोई त्रिभुज समकोण त्रिभुज है तो उस पर पाइथागोरस गुण लागू होता है। यदि अब किसी त्रिभुज पर पाइथागोरस गुण सत्य है तो क्या यह एक समकोण त्रिभुज होगा ?

ऐसी समस्या को हम विपरीत समस्या कहते हैं। अब हम दिखाएंगे कि यदि किसी त्रिभुज में कोई दो भुजाओं के वर्गों का योग, तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर है तो वह एक समकोण त्रिभुज होना चाहिए।

## पाइथागोरस प्रमेय (Pythagoras Theorem)

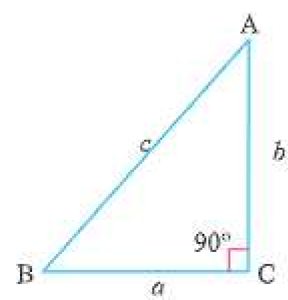
उपरोक्त परिणाम एक निचली क्रिया के द्वारा बताया जा सकता है।

अब समकोण $\Delta ABC$ में, $\angle C = 90^\circ$

$$\therefore \quad AB^2 = BC^2 + AC^2$$

यदि $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$

तब $$c^2 = a^2 + b^2$$

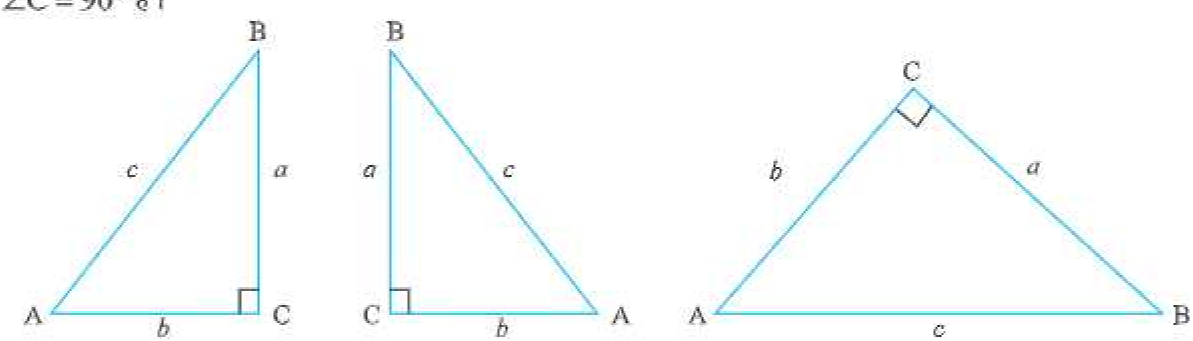



समकोण $\Delta ABC$ में कर्ण AB सब से बड़ी भुजा है बाकी दो भुजाओं को समकोण त्रिभुज की भुजाएँ कहते हैं।

## पाइथागोरस प्रमेय की जाँच

उपरोक्त परिणाम एक निचली क्रिया के द्वारा बताया जा सकता है।

**क्रिया :** मान लीजिए तीन समकोण त्रिभुज $T_1$, $T_2$ तथा $T_3$ नीचे दर्शायी गयी हैं। प्रत्येक का नाम $\Delta ABC$ जिसमें $\angle C = 90^\circ$ है।




प्रत्येक अवस्था/स्थिति में त्रिभुज की भुजा $a$, $b$ और कर्ण $c$ को मापें $a^2$, $b^2$ तथा $c^2$ की गणना करके निम्न परिणाम ज्ञात करें।

| समकोण त्रिभुज | माप | | | गणना | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $c$ | $a^2$ | $b^2$ | $c^2$ | $a^2+b^2$ | $c^2-(a^2+b)$ |
| $T_1$ | | | | | | | | |
| $T_2$ | | | | | | | | |
| $T_3$ | | | | | | | | |

हम देखते हैं कि प्रत्येक बार, $c^2-(a^2+b^2)=0$

इसलिए $c^2=a^2+b^2$.

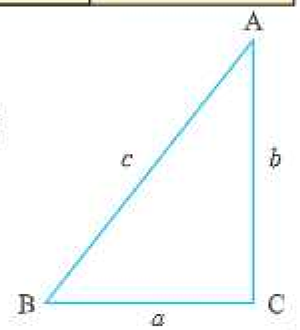
एक समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लम्बी भुजा है। यदि समकोण त्रिभुज ABC में

$c^2=a^2+b^2$ [पाइथागोरस सिद्धांत द्वारा]

$\Rightarrow$ $c^2>a^2$ तथा $c^2>b^2$

$\Rightarrow$ $c>a$ तथा $c>b$

इसलिए एक समकोण त्रिभुज में कर्ण अन्य दो भुजाओं में से सबसे बड़ी भुजा है।




एक त्रिभुज में अगर एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर हो तो त्रिभुज समकोण त्रिभुज होती है। $\Delta ABC$ में, यदि $AB^2=BC^2+AC^2$ तो $\Delta ABC$, C पर समकोण है।

**पाइथागोरस त्रिगुट का उदाहरण (Pythagorean triplets) :** तीन धनात्मक पूर्णांक $a, b, c$ (इसी क्रम में) हों और $c^2=a^2+b^2$ हो तो $a, b, c$ पाइथागोरस त्रिगट कहलाते हैं। उदाहरण के लिए तीन संख्याएं 3, 4, 5 लीजिए, मान लो

$$a = 3$$
$$b = 4$$
$$c = 5$$
$$a^2+b^2 = 3^2+4^2=9+16=25$$
$$c2 = 5^2=25$$
$$\therefore \quad c2 = a^2+b^2$$

$\therefore$ 3, 4, 5 पाइथागोरस त्रिगुट हैं।

पाइथागोरस त्रिगुट का उदाहरण (3, 4, 5) (5, 12, 13) (6, 8, 10) (7, 24, 25), (8, 15, 17) आदि।

**उदाहरण-1 : दो त्रिभुज की लम्बाइयां निम्नानुसार है। ज्ञात करें कि त्रिभुज समकोण हैं।**

**(i) 6 cm, 8 cm, 10 cm (ii) 5 cm, 8 cm, 11 cm**

हल : (i) $\Delta ABC$ में लंबी भुजा AB = 10 cm

$\therefore$ $(BC)^2+(AC)^2 = 6^2+8^2 = 36+64$

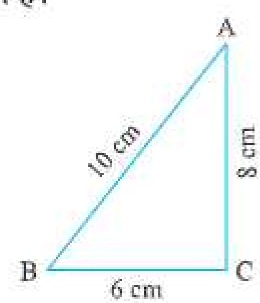
$= 100 = 10^2$

$\Rightarrow$ $(BC^2)+(AC^2) = (10)^2$ ....(1)

तथा $(AB)^2 = (10)^2$ ....(2)

(1) और (2) से $(AB)^2 = (BC)^2+(AC)^2$

इसलिए त्रिभुज, जिसकी भुजाएं 6 cm, 8 cm तथा 10 cm हैं, समकोण त्रिभुज है।




(ii) लम्बी भुजा AB = 11 cm

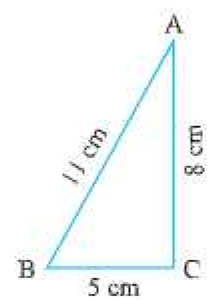
अब $(AB)^2=(11)^2 = 121$

$(BC)^2+(AC)^2 = 5^2+8^2=25+64$

तथा $(BC)^2+(AC)^2 = 89$

परंतु $89 \neq 121$

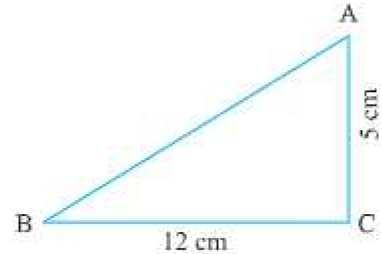
$\therefore$ त्रिभुज जिसकी भुजाएं 5 cm, 8 cm तथा 11 cm से. मी. हैं, समकोण त्रिभुज नहीं है।



**उदाहरण-2 : $\Delta ABC$ में बिन्दु $\angle C = 90^\circ$ पर समकोणिक है। यदि $AC = 5$ cm तथा $BC = 12$ cm हो तो AB की लम्बाई ज्ञात कीजिए।**

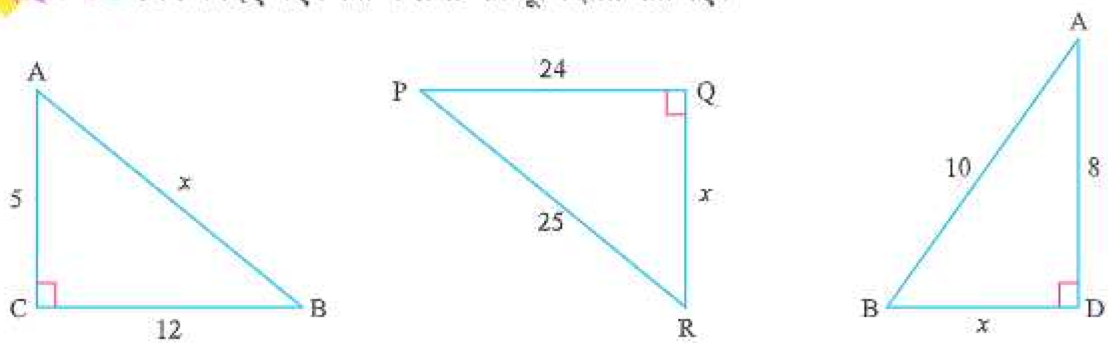
हल : $AC = 5$ cm, $BC = 12$ cm

पाइथागोरस गुण से




$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$= 5^2 + 12^2$$
$$= 25 + 144$$
$$= 169 = 13^2$$
$$\Rightarrow \quad AB = 13 \text{ cm}$$

**उदाहरण-3 : निम्न दिए गए चित्रों में से $x$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।**




हल : (*i*) $\Delta ABC$ में, $\angle C = 90^\circ$, पाइथागोरस गुण से

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$
$$x^2 = 12^2 + 5^2$$
$$x^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$$
$$\Rightarrow \quad x = 13 \text{ cm}$$

(*ii*) $\Delta PQR$ में $\angle Q = 90^\circ$, पाइथागोरस गुण से

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$
$$25^2 = 24^2 + x^2$$
$$625 = 576 + x^2 \Rightarrow x^2 = 625 - 576$$
$$x^2 = 49 = 7^2$$
$$\Rightarrow \quad x = 7 \text{ cm}$$

(*iii*) $\Delta ABD$ में $\angle ADB = 90^\circ$, पाइथागोरस गुण से

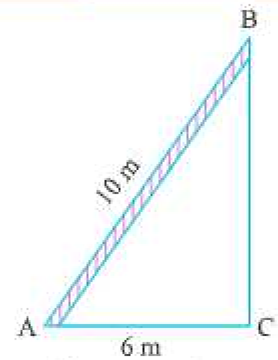
$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$
$$10^2 = x^2 + 8^2$$
$$100 = x^2 + 64 \Rightarrow x^2 = 100 - 64$$
$$\Rightarrow \quad x^2 = 36 = 6^2$$
$$\Rightarrow \quad x = 6 \text{ cm}$$

**उदाहरण-4 : एक 10 m मीटर लंबी सीढ़ी एक दीवार के साथ इस प्रकार रखी गई है कि सीढ़ी का नीचे वाला भाग दीवार से 6 m मीटर की दूरी पर है। सीढ़ी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।**

हल : AB एक सीढ़ी है तथा BC इसकी ऊँचाई है $AB = 10$ m, $AC = 6$ m

पाइथागोरस गुण अनुसार

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$BC^2 = AB^2 - AC^2$$
$$= 10^2 - 6^2$$
$$= 100 - 36$$
$$= 64$$
$$BC^2 = 8^2$$
$$BC = 8$$




इसलिए ऊँचाई $= 8$ m

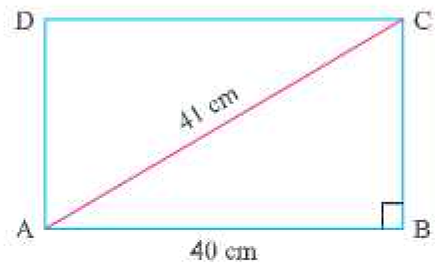
**उदाहरण-5 : एक आयत की लम्बाई 40 cm है तथा उसका एक विकर्ण 41 cm है, इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।**

हल : ABCD एक आयत है, जिसमें

AB = 40 cm तथा विकर्ण AC = 41 cm

$\Delta ABC$ में $\angle B = 90^\circ$ (आयत का प्रत्येक कोण $90^\circ$ का होता है)

पाइथागोरस नियम अनुसार



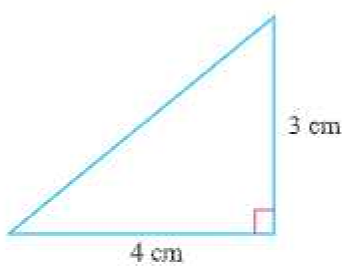

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$\Rightarrow \quad 41^2 = 40^2 + BC^2$$
$$BC^2 = 41^2 - 40^2$$
$$= 1681 - 1600 = 81 = 9^2$$
$$BC = 9 \text{ cm}$$

आयत ABCD का परिमाप $= 2(AB + BC) = 2(40 + 9)$ cm $= (2 \times 49) = 98$ cm

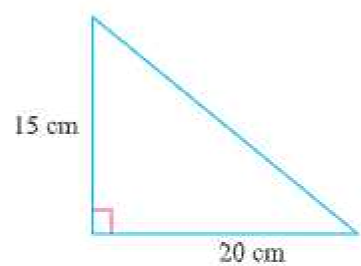
## प्रश्नावली - 6.3

**1.** नीचे दी गई आकृतियों में से अज्ञात भुजा की लम्बाई ज्ञात करें।

(*i*)




(*ii*)




**2.** नीचे दिए गए में से कौन सी समकोण त्रिभुज की भुजाएँ हो सकती हैं।

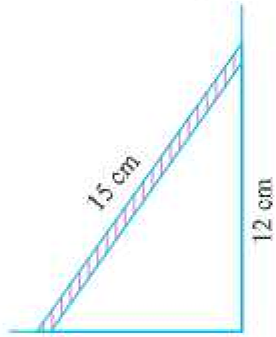
(*i*) $4cm, 5cm, 7cm$

(*ii*) $1.5cm, 2cm, 2.5cm$

(*iii*) $2cm, 2cm, 5cm$

**3.** एक आयत का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात करें, जिसकी लम्बाई 15 cm है और एक विकर्ण की लम्बाई 17 cm है।

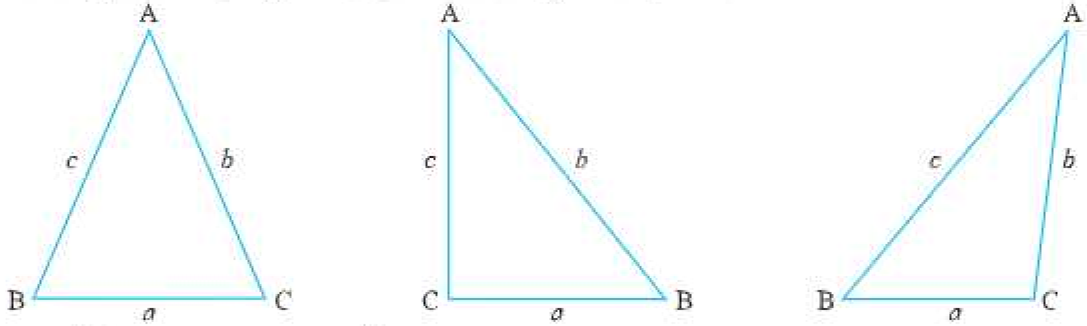
4. दीवार के सहारे उसके पांव कुछ दूरी पर रखकर 15 m लंबी एक सीढ़ी धरती से 12 m ऊँचाई पर स्थित खिड़की तक पहुँच जाती है। दीवार से सीढ़ी के पैर की दूरी ज्ञात कीजिए।




5. एक समचतुर्भुज की भुजा 5 cm है। यदि समचतुर्भुज के एक कर्ण की लम्बाई 8 cm है तो दूसरे कर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
6. एक समकोण त्रिभुज समदिबाहु है। यदि कर्ण का वर्ग 50 m हो तो इसके प्रत्येक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
7. $\Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है $\angle C = 90°$ है तथा यदि $AC = 8$ cm और $BC = 6$ cm हो तो AB ज्ञात कीजिए।
8. बताएं कि निम्न दिए गए पाइथागोरस त्रिगुट हैं अथवा नहीं ?
   (*i*) (5, 7, 12) (*ii*) (3, 4, 5)
   (*iii*) (8, 9, 10) (*iv*) (5, 12, 13)
9. बहुवैकल्पिक प्रश्न
   (*i*) $\Delta ABC$ में यदि $\angle A = 40°$ तथा $\angle B = 55°$ तो $\angle C$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।
      (*a*) 75° (*b*) 80°
      (c) 95° (*d*) 85°
   (*ii*) यदि त्रिभुज के कोण 35°, 35° तथा 110° हों तो यह है-
      (*a*) समद्विबाहु त्रिभुज (*b*) समबाहु त्रिभुज
      (*c*) विषमबाहु त्रिभुज (*d*) समकोण त्रिभुज
   (*iii*) त्रिभुज के दो हो सकते हैं
      (*a*) समकोण (*b*) अधिक कोण
      (*c*) न्यून कोण (*d*) सरल कोण
   (*iv*) एक त्रिभुज जिसके कोणों का माप 35°, 55° तथा 90° है। वह कौन सी त्रिभुज है-
      (*a*) न्यून कोण (*b*) समकोण
      (*d*) अधिक कोण (*d*) समद्विबाहु
   (*v*) एक त्रिभुज संभव नहीं है जिसके कोण निम्न हैं।
      (*a*) 40°, 65°, 75° (*b*) 50°, 56°, 74°
      (*c*) 72°, 63°, 45° (*d*) 67°, 42°, 81°
   (*vi*) एक समकोण त्रिभुज संभव नहीं है जिसकी भुजाओं की लम्बाई निम्न है।
      (*a*) 6, 4, 10 (*b*) 5, 3, 7
      (*c*) 7, 8, 9 (*d*) 3.6, 5.4, 8
   (*vii*) एक समकोण त्रिभुज में दो भुजाओं की लम्बाई 6 cm तथा 8 cm है। कर्ण की लम्बाई है।
      (*a*) 14 cm (b) 10 cm
      (c) 11 cm (d) 12 cm

## त्रिभुज में असमानता (Triangle In equality)

तीन त्रिभुज खींचें-एक न्यून कोण, एक समकोण त्रिभुज तथा एक अधिक कोण




मान लीजिए BC = $a$, AC = $b$ और AB = C

अब इन त्रिभुजों की भुजाएं मापें

आप देखेंगे कि

$a + b > c, b + c > a, c + a > b$

इस प्रकार हमें ज्ञात होता है कि

किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के माप का योग तीसरी भुजा के माप से बड़ा होता है।

**उदाहरण-1 : निम्न दी गई भुजाओं के माप से कोई त्रिभुज संभव है ?**

(*a*) **8, 10, 15** (*b*) **18, 10, 6**

(*c*) **6, 2, 8**

हल : (*a*) क्योंकि $8 + 10 > 15, 10 + 15 > 8, 15 + 8 > 10$

इसलिए, 8, 10, 15 त्रिभुज की भुजाएँ हैं।

(*b*) क्योंकि $10 + 6 < 18$ इसलिए 10, 6, 18 त्रिभुज की भुजाएँ नहीं हो सकतीं।

(*c*) क्योंकि $6 + 2 = 8$ के समान है जो कि तीसरी भुजा के समान है। इसलिए 6, 2, 8 त्रिभुज की भुजाएँ नहीं हो सकतीं।

**उदाहरण-2 : ΔABC का बाहरी बिंदु O है, दिखाएँ कि–**

(*i*) **OA + OB > AB** (*ii*) **OB + OC > BC**

(*iii*) **OC + OA > AC** (*iv*) **2 (OA + OB + OC) > AB + BC + CA**

हल : (*i*) OA, OB तथा AB, ΔOAB की भुजाएँ हैं।

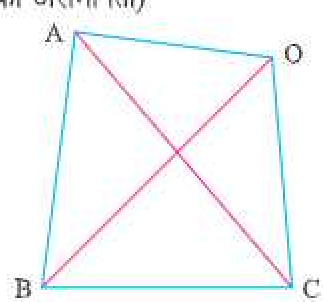
∴ OA + OB > AB (त्रिभुज की असमानता)

(*ii*) OB, OC तथा BC, ΔOBC की भुजाएँ हैं।

∴ OB + OC > BC (त्रिभुज की असमानता)

(*iii*) OC, OA तथा AC, ΔOAC की भुजाएँ हैं

∴ OC + OA > AC (त्रिभुज की असमानता)

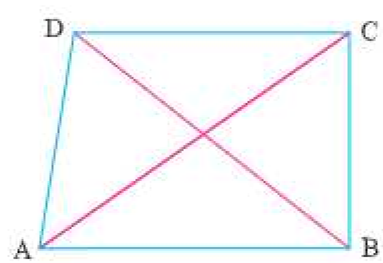


(*i*), (*ii*) तथा (*iii*) को जोड़ करने पर

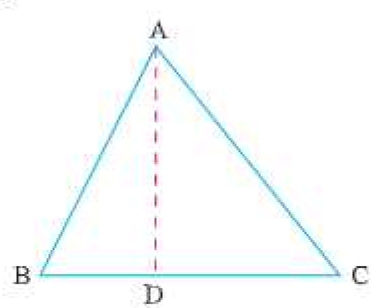
$$OA + OB + OB + OC + OC + OA > AB + BC + AC$$
$$2OA + 2OB + 2OC > AB + BC + AC$$
$$2(OA + OB + OC) > AB + BC + AC$$

## प्रश्नावली - 6.4

1. निम्नलिखित में से कौन सी, त्रिभुज की भुजाएँ हो सकती हैं ?
   (*a*) 8 cm, 10 cm, 18 cm
   (b) 6 cm, 4 cm, 8 cm
   (c) 35 cm, 38 cm, 40 cm
   (d) 3 cm, 4 cm, 10 cm
2. एक बिन्दु O, ΔABC के अन्दर की ओर स्थित है। चिह्न >, < तथा = चुनिए जबकि नीचे लिखे समीकरण ठीक/उचित हो।
   (*a*) OA + OB ☐ AB
   (*b*) OB + OC ☐ BC
   (*c*) OA + OC ☐ AC
3. ABCD एक चतुर्भुज है।
   क्या AB + BC + CD + DA > AC + BD ?




4. AD, ∠ABC की माध्यिका है
   क्या AB + BC + CA > 2AD ?




5. एक त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाई 4 cm तथा 6 cm है। कौन सी दो माप के बीच तीसरी भुजा होगी ?

## क्रिया

**प्रमाणित करें कि त्रिभुज की माध्यिकाएं एक ही बिन्दु पर मिलती हैं।**

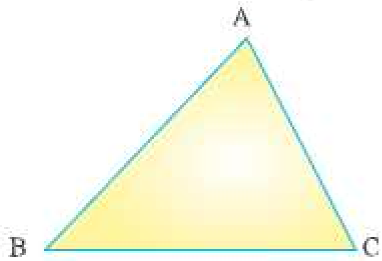
**उद्देश्य :** माध्यिका तथा केंद्रक के बारे में वर्णन करना।

**पूर्व ज्ञान :** शीर्ष, कोण एवं त्रिभुज की भुजा, कागज़ मोड़ने का ज्ञान, मध्य बिन्दु तथा माध्यिका के बारे।

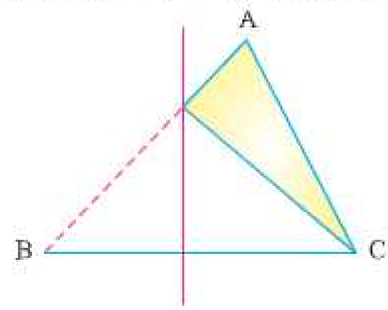
**आवश्यक सामग्री :** एक सफेद चार्ट पेपर कैंची, रंगदार पेंसिल, रूलर

**विधि :**

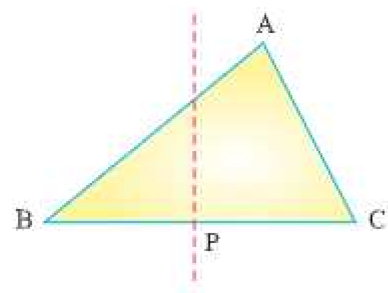
1. एक त्रिभुज सफेद कागज़ पर खींचें तथा शीट में से त्रिभुज काटें। अपनी पसंद के रंग भरें।



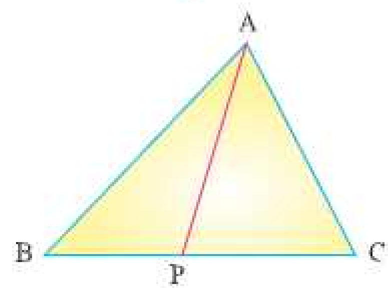

2. $\Delta ABC$ को इस प्रकार मोड़ें कि शीर्ष B, C पर आए तथा भुजा BC के दो भाग एक दूसरे को ढकें।



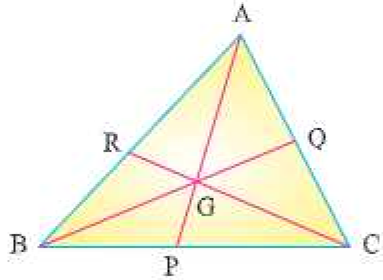

3. कागज़ पर बनी रेखा को मोड़ कर प्राप्त हुए काट बिंदु P से दर्शाएं।




4. AP को मिलाएं।



5. रेखाखंड AP शीर्ष A, से भुजा BC पर माध्यिका है।
6. इसी तरह ही शीर्ष B तथा C से माध्यिका BQ तथा CR प्राप्त करें।




**निरीक्षण :** माध्यिकाएं AP, BQ तथा CR आपस में बिन्दु G पर काटती हैं।

**परिणाम :** सारी माध्यिकाएं एक बिन्दु G से गुज़रती हैं, जिसको त्रिभुज का केंद्रक कहते हैं।

## मौखिक प्रश्न

**प्रश्न 1.** **एक त्रिभुज की कितनी माध्यिकाएं हो सकती है ?**

उत्तर— 3 माध्यिकाएं

**प्रश्न 2.** **त्रिभुज की माध्यिकाएं कौन-से बिन्दु पर मिलती हैं, उसको क्या कहते हैं ?**

उत्तर— केंद्रक

**प्रश्न 3.** **क्या एक माध्यिका जिस रेखाखंड पर बनती है, उसको दो बराबर भागों में बाँटती है?**

उत्तर— हाँ

## क्रिया

### त्रिभुज के कोण योग गुण

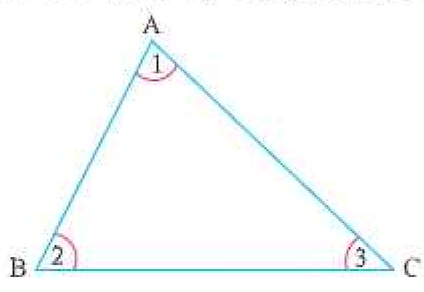
**उद्देश्य :** प्रमाणित करना कि त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180° होता है।

**आवश्यक पूर्व ज्ञान :** सरल रेखा का ज्ञान तथा अंत: कोण

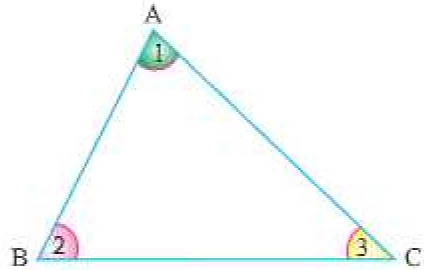
**आवश्यक सामग्री :** सफेद रंग की शीट कैंची, गोंद, रंगदार पेन तथा रूलर

**विधि :**

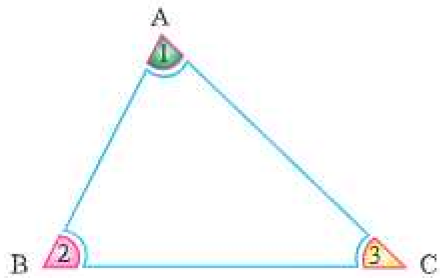
1. एक त्रिभुज $\Delta ABC$ सफेद रंग के कागज़ पर, $\angle 1, \angle 2$ तथा $\angle 3$ कोण बनाओ।



2. त्रिभुज को काटें तथा तीन कोणों में अलग-अलग रंग भरें।




3. तीनों कोणों को काटें।




4. एक सरल रेखा खींचें तथा O बिन्दु से निशान लगाएं।

5. काटे हुए कोण इस प्रकार चिपकाएं कि इसके शीर्ष O बिन्दु पर नीचे दी आकृति अनुसार स्थित हों।

**निरीक्षण :** तीन कोण, $\angle 1$, $\angle 2$ तथा $\angle 3$ आकृति में एक सरल रेखा बनाते हैं।

**परिणाम :** त्रिभुज के अंत: कोणों का जोड़ $180^\circ$ होता है।

## मौखिक प्रश्न

**प्रश्न 1.** **कोण योग गुण क्या है ?**

**उत्तर—** त्रिभुज के अंत: कोणों का योग $180^\circ$ होता है।

**प्रश्न 2.** **क्या एक त्रिभुज $60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ कोणों से संभव है ?**

**उत्तर—** नहीं, क्योंकि $60^\circ + 70^\circ + 80^\circ = 210^\circ$ है।

## क्रिया

**त्रिभुज का बाह्य कोण अंत: सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है।**

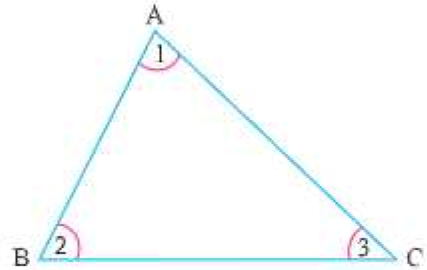
**उद्देश्य :** प्रमाणित करना कि त्रिभुज का बाह्य कोण अंत: सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है।

**आवश्यक पूर्व ज्ञान :** बाह्य कोण तथा अंत: सम्मुख कोणों की जानकारी।

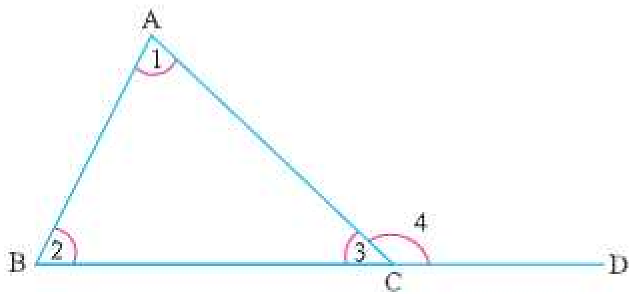
**आवश्यक सामग्री :** सफेद रंग का कागज, कैंची, गोंद, स्कैच पेन।

**विधि :**

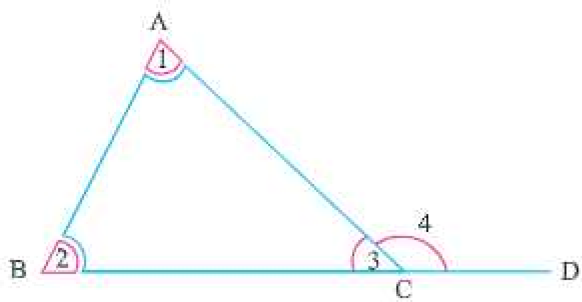
1. एक सफेद रंग का पेपर लें और $\Delta ABC$ खींचें। कोण $\angle 1, \angle 2$ तथा $\angle 3$ का निम्न आकृति अनुसार नाम दें।



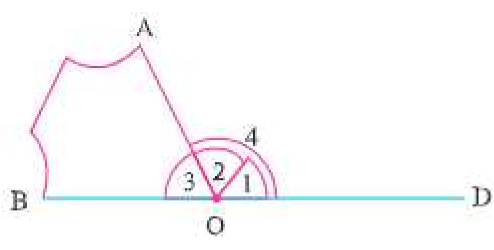

2. त्रिभुज के आधार को आकृति अनुसार D विस्तारित करें। बाह्य कोण $\angle ACD$ बना है।




3. कोण 1 तथा 2 को काटें।




4. $\angle ACD$ के साथ 1 तथा 2 को चिपकाएँ।




**निरीक्षण :** कोण 1 तथा 2 जो कि पूरी तरह काट कर $\angle ACD$ में फिट किए गए हैं। यह दर्शाता है कि $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

**परिणाम :** त्रिभुज का बाह्य कोण उसके अंत: सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है।

## मौखिक प्रश्न

**प्रश्न 1.** **त्रिभुज के बाह्य कोण का क्या गुण है ?**

**उत्तर—** एक त्रिभुज में किसी त्रिभुज का बाह्य कोण उसके दो अंत: सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है।

**प्रश्न 2.** **समबाहु त्रिभुज में बाह्य कोण का क्या माप है ?**

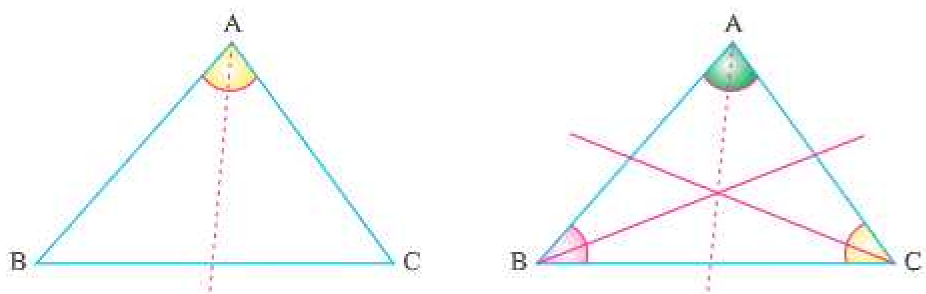
**उत्तर—** 120°

## क्रिया

**बताइए कि त्रिभुज के अंत: कोण समद्विभाजक एक बिन्दु पर मिलते हैं।**

**आवश्यक पूर्व ज्ञान :** विद्यार्थी को कोण समद्विभाजक के बारे में ज्ञान होना चाहिए।

**आवश्यक सामग्री :** एक कागज़ पर त्रिभुज ABC काटो। त्रिभुज के शीर्ष A के समद्विभाजक की बनी हुई क्रीज़ नीचे दिए गए चित्र अनुसार है।




**निरीक्षण :** हम देखते हैं कि तीन कोण समद्विभाजक एक बिन्दु पर मिलते हैं, उसको 'अंत: केन्द्र' (Incentre) कहा जाता है तथा त्रिभुज का अंत: केन्द्र हमेशा त्रिभुज के अंदर होता है।

**सीखने के परिणाम :** हम सीखते हैं कि त्रिभुज के अंत: कोणों के एक बिन्दु पर मिलते हैं तथा एक सांझे बिन्दु पर मिलते हैं, जिसको त्रिभुज का अंत: केन्द्र कहा जाता है।

## मौखिक प्रश्न

**प्रश्न 1.** **कोण समद्विभाजक क्या है ?**

**उत्तर—** एक रेखा जो कि कोण को दो बराबर भागों में बाँटती है, उसको दिए हुए कोण का कोण समद्विभाजक कहते हैं।

**प्रश्न 2.** **त्रिभुज में कितने कोण समद्विभाजक हैं ?**

**उत्तर—** त्रिभुज में तीन कोण द्विभाजक होते हैं।

### हमने क्या चर्चा की ?

1. एक त्रिभुज तीन भुजाओं से बनी हुई बंद आकृति है।
2. त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180° होता है। (त्रिभुज का कोण योग गुण)
3. त्रिभुज का बाह्य कोण उसके दो अंत: सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है।
4. त्रिभुज की दो भुजाओं का योग हमेशा तीसरी भुजा से बड़ा होता हैं।

5. एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के योग के बराबर होता है। (पाइथागोरस प्रमेय)
6. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से उसकी सम्मुख भुजा पर खींचे गए लंब को त्रिभुज का शीर्षलंब कहते हैं, एक त्रिभुज के तीन शीर्षलंब होते हैं।
7. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष को उसके सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाने वाले रेखाखंड को त्रिभुज की माध्यिका करते हैं। एक त्रिभुज की तीन माध्यिकाएं होती हैं।
8. एक त्रिभुज की माध्यिकाएं एक बिन्दु पर मिलती हैं, जिसको केंद्रक कहते हैं।
9. एक त्रिभुज के सभी शीर्षलंब एक बिन्दु पर मिलते हैं, उसको 'लंब केंद्र' कहते हैं।

### सीखने के परिणाम

**इस अध्याय के पूर्ण होने पर विद्यार्थी :**

1. एक त्रिभुज की माध्यिकाएँ तथा शीर्षलंब को परिभाषित करने एवं खींचने के योग्य हैं।
2. एक त्रिभुज के अंत: तथा बाह्य कोणों के मध्य सम्बंध को समझने के योग्य हैं।
3. एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं के मध्य संबंध को समझने के योग्य हैं।
4. त्रिभुज से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए कोणों के योग गुण, बाह्य कोण गुण तथा पाइथागोरस गुण का प्रयोग करने के योग्य हैं।
5. किसी त्रिभुज के तीसरे अज्ञात कोण का मूल्य ज्ञात करने के योग्य हैं, जबकि उसके दो कोणों का मूल्य दिया हो।

## उत्तरमाला

### प्रश्नावली 6.1

1. (*i*) PC (*ii*) 90°
   (*iii*) गलत (*iv*) शीर्षलंब
   (*v*) माध्यिका
2. (*b*) सभी समाध्यिकाओं की लम्बाई समान होती है।
3. (*i*) 140° (*ii*) 50°
   (*iii*) 120° (*iv*) 120°
4. (*i*) 80° (*ii*) 45°
   (*iii*) 50° (*iv*) 130°
5. (*i*) 70° (*ii*) 70°
   (*iii*) 20°

### प्रश्नावली 6.2

1. (*i*) नहीं (*ii*) हाँ
   (*iii*) नहीं (*iv*) हाँ
   (*v*) नहीं
2. (*i*) 67° (*ii*) 48

(*iii*) 55° (*iv*) 30°

(*v*) 60° (*vi*) 60°

**3.** (*i*) $x = 50°, y = 70°$ (*ii*) $x = 80°, y = 100°$

(*iii*) $x = 80°, y = 20°$ (*iv*) $y = 45°$

(*v*) $x = 60°, y = 60°$ (*vi*) $x = 60°, y = 65°$

**4.** 50°, 60°, 70° **5.** 40°, 80°

**6.** 68° **7.** 36°, 54°

**8.** 76°, 58°, 46°

**9.** (*i*) *a* (*ii*) *c*

(*iii*) *d* (*iv*) *b*

## प्रश्नावली 6.3

**1.** (*i*) 5 cm (*ii*) 25 cm

**2.** (*i*) समकोण त्रिभुज नहीं है।

(*ii*) समकोण त्रिभुज, भुजा 2.5 cm का सम्मुख कोण

(*iii*) समकोण त्रिभुज नहीं है।

**3.** 9 m **4.** 9 cm

**5.** 6 cm **6.** 5 m प्रत्येक

**7.** 10 cm

**8.** (*i*) नहीं (*ii*) हाँ

(*iii*) नहीं (*iv*) हाँ

**9.** (*i*) *d* (*ii*) *a*

(*iii*) *c* (*iv*) *b*

(*v*) d (*vi*) *a*

(*vii*) *b*

## प्रश्नावली 6.4

**1.** (*b*) और (*c*) **2.** (*a*) > (*b*) > (c) >

**3.** हाँ **4.** हाँ

**5.** 3 cm और 9 cm के बीच में

अध्याय 7

Q2M9L7

# त्रिभुजों की सर्वांगसमता

## उद्देश्य :-

**इस अध्याय में आप सीखेंगे :**

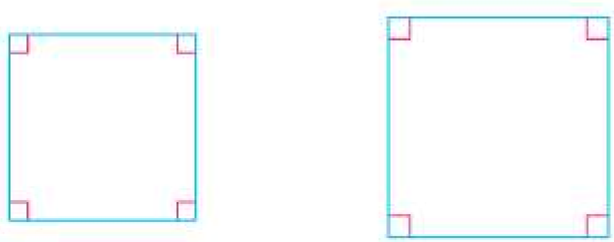
1. दिए गए दो चित्र सर्वांगसम हैं या नहीं।
2. दी गई दो त्रिभुजें नियमों SSS, SAS, ASA या RHS में से किस के अनुसार सर्वांगसम है।
3. सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग कौन से हैं और उनको कैसे लिखना है।

## भूमिका

पिछले अध्याय में आप त्रिभुजों से संबंधित अलग-अलग नियमों और गुणों के बारे में विस्तार में पढ़ चुके हैं। जैसे : त्रिभुजों के कोणों का योग $180^\circ$ होता है, त्रिभुज के बाह्य कोण का माप, उसके दो अंत सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है, पाइथागोरस प्रमेय इत्यादि.....। अब हम एक बहुत ही महत्वपूर्ण ज्यामितीय संकल्पना ''सर्वांगसमता को सीखने के लिए तैयार हैं''। इस अध्याय में त्रिभुजों की सर्वांगसमता के संदर्भ में पढ़ोगे।

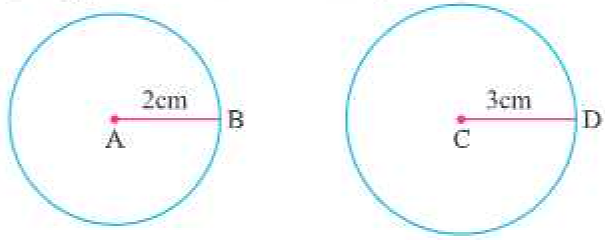
**सर्वांगसमता (Congruence) :** दैनिक जीवन में बहुत सी किस्म की आकृतियों और तस्वीरों को देखते है। हम यह भी देखते हैं कि बहुत सी आकृतियां तो बिलकुल एक जैसी होती हैं। आइए देखते हैं कि आगे दी गई आकृतियां आकार माप और एक ही शक्ल वाले हैं या नहीं ?

(*a*) आगे दिए गए दो वर्ग हैं जिन के माप भिन्न-भिन्न हैं पर आकृति एक जैसी है।



(*b*) आगे दो डाक टिकटें हैं जिन के माप और आकृतियां दोनों एक जैसी हैं।

(*c*) ये वृत एक ही रूप के है परंतु इनका आकार भिन्न–भिन्न है।

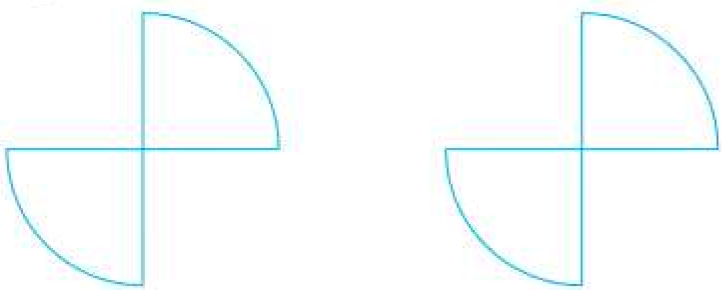



$C_1$ $C_2$

हमने देखा है डाक टिकटों के माप और रूप दोनों समान हैं, इसलिए ये दोनों सर्वांगसम हैं। सरल शब्दों में कहा जा सकता है कि दो वस्तुएँ यां आकृतियां उस समय सर्वांगसम होती हैं जब उन दोनों का आकार और शकलें (रूप) बिल्कुल एक समान हों। दो वस्तुओं के आकार और रूप के एक समान होने के गुण को ही सर्वांगसमता कहा जाता है। सर्वांगसमता का गुण द्विविमीय (2-D) और त्रिविमीय (3-D) दोनों किस्म की आकृतियों और वस्तुएँ पर लागू होता है, परन्तु इस अध्याय में हम केवल द्विविमीय (2-D) आकृतियों की सर्वांगसमता के बारे में पढ़ेंगे।

## समतल आकृतियों की सर्वांगसमता (Congruence of plane figures)

दोनो आकृतियों $F_1$ और $F_2$ की शकल एक जैसी है। क्या ये सर्वांगसम हैं ?



$F_1$ $F_2$

बच्चो ! आप इस कथन की जाँच अद्यारोपण विधि (superimposition) से कर सकते हो। इस उद्देश्य के लिए हम आकृति $F_1$ को पारदर्शक पेपर (tracing paper) के ऊपर ट्रेस कर लेंगे और इसको आकृति $F_2$ पर स्थापित करेंगे। यदि दोनों आकृतियां $F_1$ और $F_2$ एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेती हैं तो ये दोनों सर्वांगसम होंगी।

यदि $F_1$ और $F_2$ सर्वांगसम हैं तो हम लिखेंगे $F_1 \cong F_2$.

सर्वांगसमता को दर्शाने के लिए चिह्न '$\cong$' का उपयोग किया जाता है।

## रेखाखंडों में सर्वांगसमता (Congruence among line segments)

दो रेखाखंड सर्वांगसम होते है यदि उनकी लंबाइयाँ एक समान हों। हम यह भी कह सकते हैं कि यदि दो रेखाखंड सर्वांगसम हों तो उनकी लंबाइयाँ भी समान होंगी।

आकृति में रेखाखंड AB की लंबाई = रेखाखंड CD की लंबाई = 3cm

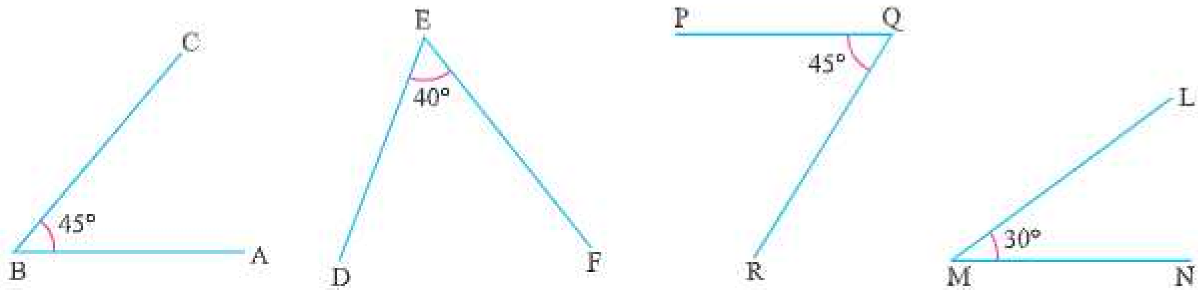
$\therefore$ $AB \cong CD$ परंतु AB की लंबाई $\neq$ PQ की लंबाई $3cm \neq 3.5cm$

$\therefore$ इसलिए AB रेखाखंड और PQ रेखाखंड सर्वांगसम नहीं हैं।

हम इसकी भी अध्यारोपण विधि से जाँच कर सकते हैं। इस के लिए AB की ट्रेस की गई कापी को CD और PQ के ऊपर रख कर देखा जाएगा। AB और CD एक दूसरे को अच्छी तरह से ढक लेंगे इस लिए ये सर्वांगसम हैं जबकि AB और PQ एक दूसरे को अच्छी तरह से ढक नहीं लेते, इस लिए ये सर्वांगसम नहीं है।

## कोणों की सर्वांगसमता : (Congruence of angles)

यदि दो कोणों का माप एक समान हो तो वे सर्वांगसम होते हैं और इस के उलट यदि दो कोण सर्वांगसम हों तो उन के माप एक समान होते हैं।

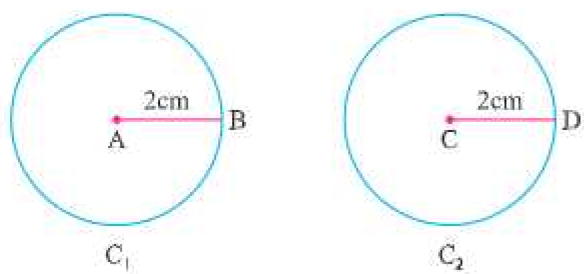



$\angle ABC$ की ट्रेस की हुई कापी को $\angle DEF$ के ऊपर स्थापित करने की कोशिश करते हैं कि बिंदु B, बिंदु E के ऊपर आ जाए और किरण BA किरण ED के ऊपर आ जाए। हम देखते हैं कि किरण BC किरण EF के ऊपर स्थापित नहीं हो रही इस लिए $\angle ABC$ और $\angle DEF$ सर्वांगसम नही हैं। अब आप खुद जाँच करो कि निम्न दिए हुए कोणों के जोड़े सर्वांगसम हैं या नहीं।

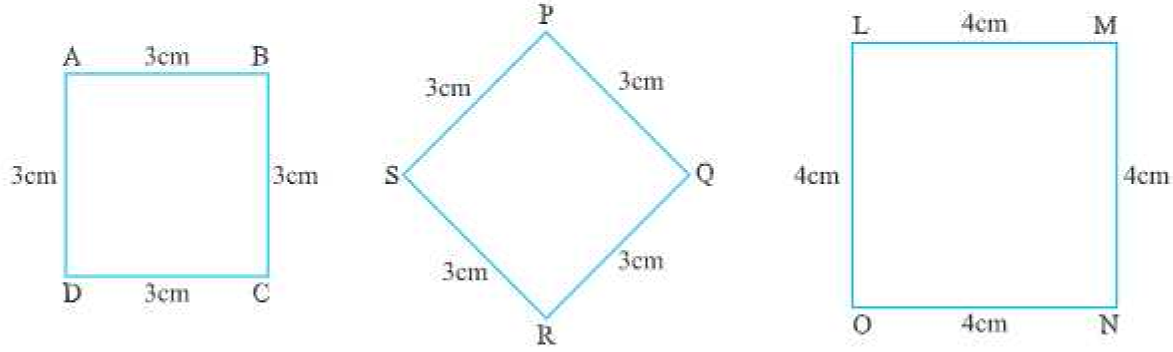
(*i*) $\angle PQR$ और $\angle LMN$ (*ii*) $\angle ABC$ और $\angle PQR$

## कुछ और चित्रों ( समतल आकृतियों की ) सर्वांगसमता (Congruence of some more plane figures)

(*i*) यदि दो वृतों की त्रिज्याएँ बराबर हों तो दोनो वृत्त सर्वांगसम होते हैं। यदि दो वृत सर्वांगसम हों तो उनकी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं। आकृति में वृत्त $C_1 \cong$ वृत्त $C_2$

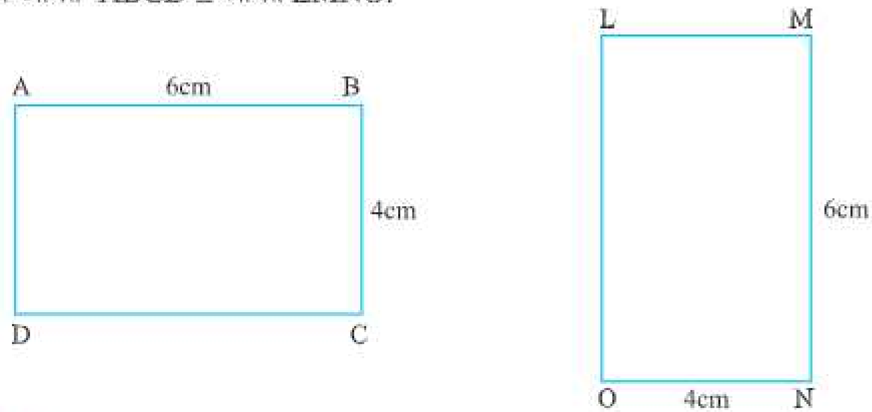



(*ii*) दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं यदि उन की भुजाएँ समान हो। इसी प्रकार सर्वांगसम वर्गों की भुजाएँ समान होती हैं। वर्ग ABCD $\cong$ वर्ग PQRS है परंतु वर्ग ABCD, वर्ग LMNO के सर्वांगसम नहीं है।



(*iii*) दो आयत सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी क्रमशः लंबाइयाँ और चौड़ाइयाँ समान हों। इसी प्रकार दो सर्वांगसम आयतों की क्रमशः लंबाइयाँ और चौड़ाइयाँ समान होंगी।

आकृति में आयत ABCD $\cong$ आयत LMNO.

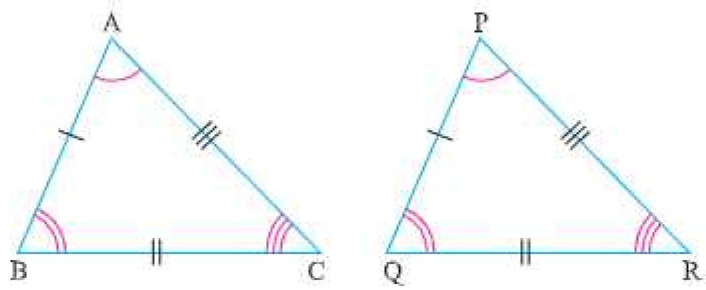



## त्रिभुजों की सर्वांगसमता : (Congruence of Triangles)

दो त्रिभुजों को सर्वांगसम कहा जाएगा यदि उनकी क्रमशः भुजाएँ और कोण समान हों और ऊपर स्थापित करने पर दोनों एक दूसरे को अच्छी तरह से ढक लें। सर्वांगसम त्रिभुजें हर पक्ष से समान होती हैं।

अर्थात

$$AB = PQ$$
$$CA = RP, BC = QR$$
$$\angle BAC = \angle QPR$$
$$\angle ABC = \angle PQR$$
$$\angle ACB = \angle PRQ$$




यहाँ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ इन त्रिभुजों को यदि एक दूसरे के ऊपर स्थापित किया जाए तो शीर्ष A शीर्ष Q के ऊपर, शीर्ष C, शीर्ष R के ऊपर स्थापित हो जाएगा। इसी प्रकार भुजाएं AB, BC और AC, $\Delta PQR$ ती भुजाएं PQ, QR और PR ऊपर स्थापित हो जाएगी।

त्रिभुजों के इन शीर्षों का आपसी संबंध चिह्न $\leftrightarrow$ द्वारा दर्शाया जाता है।

**संगत शीर्ष :** $A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow Q, C \leftrightarrow R$

**संगत भुजाएँ :** $AB = PQ, BC = QR, CA = RP$

**संगत कोण :** $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$

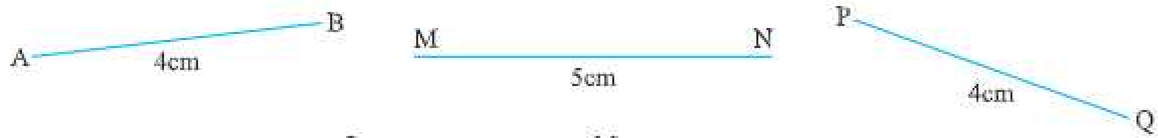
ऊपर दी गई सर्वांगसमता के लिए हम $\Delta BCA \cong \Delta QRP$ या $\Delta CAB \cong \Delta RPQ$ भी लिख सकते हैं परन्तु निम्न अनुसार लिखना बिल्कुल गलत होगा। $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ या $\Delta CAB \cong \Delta PQR$.

इस लिए जब हम दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की बात करते हैं तो केवल कोणों और भुजाओं की समानता ही नहीं बल्कि उन के शीर्षों का संगत होना ही जरूरी होता है।

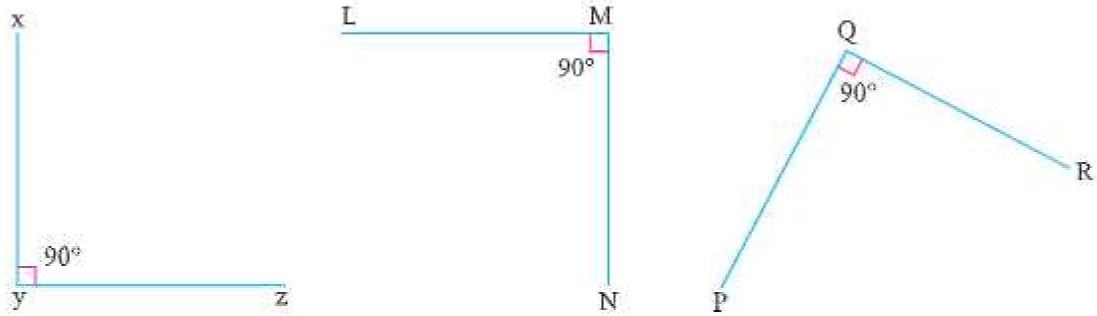
**नोट :** सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग समान होते हैं। इसको c.p.c.t भी लिखा जाता है जिसका पूरा अर्थ (corresponding parts of congruent triangles) है और जिसका हिन्दी अनुवाद, ''सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग ही हैं।''

**उदाहरण-1 : लंबाइयों और कोणों के माप निम्न चित्र अनुसार दिए गए हैं। बताओ कि इनमें से कौन-से चित्र आपस में सर्वांगसम हैं ?**

(*a*)




(*b*)




**हल :** (*a*) रेखाखंड AB की लंबाई = $4cm$

रेखाखंड MN की लंबाई = $5cm$

रेखाखंड PQ की लंबाई = $4cm$

रेखाखंड AB की लंबाई = रेखाखंड PQ की लंबाई

$\therefore$ $AB \cong PQ$

(*b*) आकृति में

$\angle XYZ = 90°$

$\angle LMN = 90°$

$\angle PQR = 90°$

अब $\angle XYZ = \angle LMN = \angle PQR = 90°$

$\therefore$ $\angle XYZ \cong \angle LMN \cong \angle PQR$

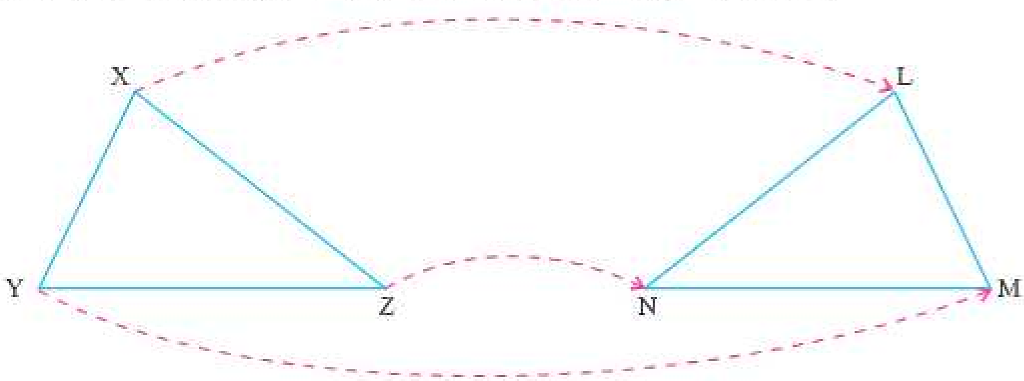
**उदाहरण-2 : ΔXYZ और ΔLMN सर्वांगसम हैं, जिनमें**

**XYZ ↔ LMN अर्थात $\Delta XYZ \cong \Delta LMN$**

**ΔXYZ के निम्न भागों के संगत भाग ΔLMN में से लिखो।**

**(*i*) YZ (*ii*) ∠Y (*iii*) ZX**

**हल :** सबसे पहले हम दोनों त्रिभुजों के संगत भागों को पहचानने के लिए चित्र बनाते है।



दिया गया है कि XYZ $\leftrightarrow$ LMN.

अर्थात X $\leftrightarrow$ L, Y $\leftrightarrow$ M, Z $\leftrightarrow$ N

इस लिए

(*i*) YZ = MN

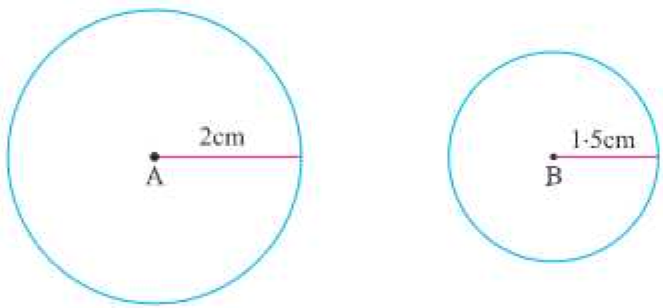
(*ii*) $\angle$Y = $\angle$M

(*iii*) ZX = NL

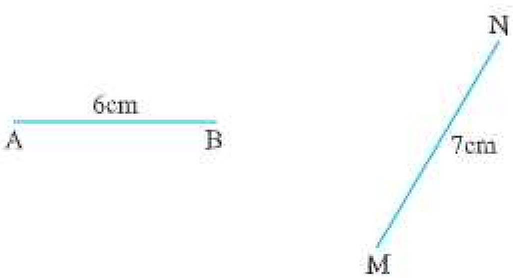
## प्रश्नावली - 7.1

**1.** दिए गए चित्रों (आकृतियों) में से सर्वांगसम आकृतियां पहचानो और उनको सर्वांगसम चिह्न अनुसार लिखो।

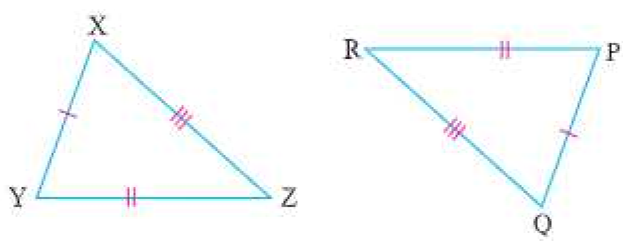
(*i*)



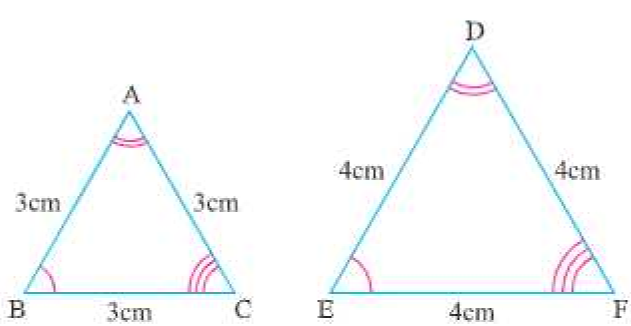

(*ii*)



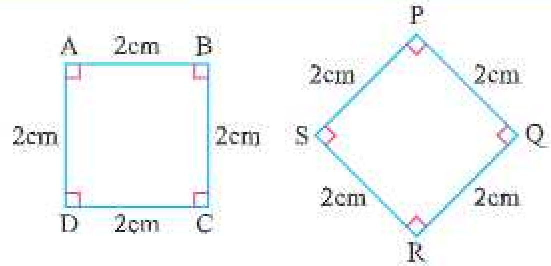

(*iii*)



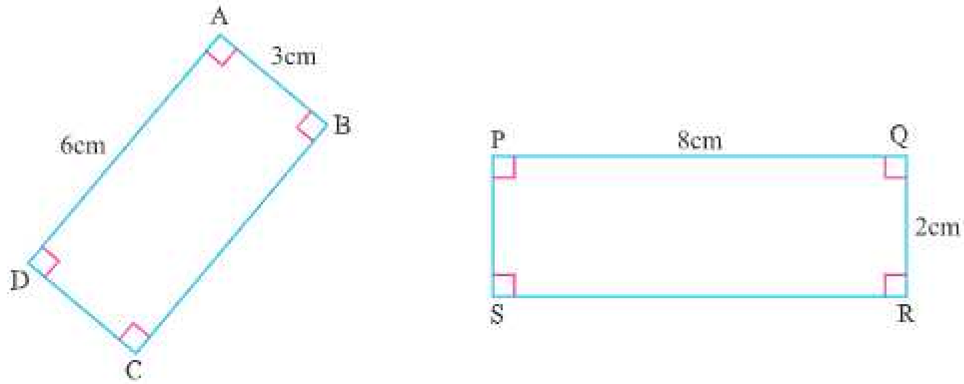

(*iv*)



(v)




(vi)




**2.** यदि सुमेलन PQR $\leftrightarrow$ OMN अंतर्गत $\Delta PQR \cong \Delta DMN$ हो तो सर्वांगसम संगत भाग लिखो।

**3.** सर्वांगसम त्रिभुजों के दो जोड़े बनाओ।

**4.** यदि $\Delta ABC \cong \Delta ZYX$ हो तो $\Delta ZYX$ के इन भागों को लिखो जो कि $\Delta ABC$ के संगत हैं।

(*i*) $\angle B$ (*ii*) CA

(*iii*) AB (*iv*) $\angle C$

**5.** **बहुवैकल्पिक प्रश्न**

(*i*) यदि सुमेलन $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ अंतर्गत ABC $\leftrightarrow$ XYZ हो तो :

(*a*) $\angle A = \angle Z$ (*b*) $\angle X = \angle B$

(*c*) $\angle A = \angle X$ (*d*) $\angle C = \angle X$

(*ii*) दो रेखाखंड सर्वांगसम होंगे, यदि

(*a*) वे समांतर है।

(*b*) वे एक दूसरे को काटते हों।

(*c*) वे एक ही रेखा के भाग हों।

(*d*) वे समान लंबाई के हों।

(*iii*) दो त्रिभुज $\Delta ABC$ और $\Delta LMN$ सर्वांगसम हों।

AB = LM, BC = MN और यदि AC = 5*cm* है तो LN = .......... होगी।

(*a*) 3*cm* (*b*) 15*cm*

(*c*) 5*cm* (*d*) ज्ञात नहीं किया जा सकता।

**6.** दो समकोण सदैव सर्वांगसम होते हैं। (सही/गलत)

**7.** आयत की दो सम्मुख भुजाएँ सर्वांगसम होती हैं। (सही / गलत)

## त्रिभुजों की सर्वांगसमता के नियम : (Criteria for congruence of triangles)

हम जानते हैं कि त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए त्रिभुजों के तीन कोण और तीन भुजाओं के द्वारा सुमेलन स्थापित होता है।

दो त्रिभुजें सर्वांगसम है या नहीं इसका निर्णय करने के लिए इनके 6 भागों में से विशेष तरतीब के अंतर्गत तीन भागों का बराबर होना आवश्यक है। इस बात की पुष्टि निम्न अनुसार की जा सकती है।

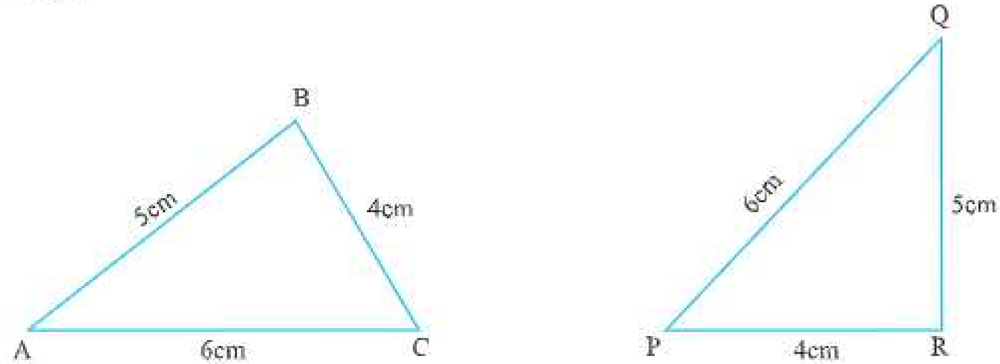
**SSS (भु-भु-भु) सर्वांगसमता नियम ( प्रतिबंध ) :** भु-भु-भु से भाव है : भुजा-भुजा-भुजा।

इस प्रतिबंध के अनुसार यदि दो त्रिभुजों के संगत भुजाओं के तीनों युग्म समान हों तो वे सर्वांगसम होंगे।

### क्रिया

एक त्रिभुज ABC की रचना करो जिस में AB = 5*cm*, BC = 4*cm* और CA = 6*cm* हो।

एक और त्रिभुज PQR बनाओ जिसमें PQ = 5*cm*, QR = 5*cm* और RP = 4*cm* हो, जैसे कि निम्न आकृति में दर्शाया गया है।




अब ΔABC को पारदर्शक कागज की सहायता से ट्रेस करो और फिर इसको ΔPQR के ऊपर इस तरह स्थापित करो कि बिंदु C बिंदु P के ऊपर आए और बिंदु A बिंदु Q के ऊपर आए। कि बिंदु B, बिंदु R के ऊपर आ जाए। हम देखेंगे कि ΔABC, त्रिभुज ΔPQR को पूरी तरह से ढक लेगी।

∴ $\Delta ABC \cong \Delta QRP$

> स्मरण रखिए कि शीर्षों को ऊपर स्थापित करना बहुत महत्वपूर्ण है।

**उदाहरण-1 : त्रिभुज ABC और त्रिभुज PQR में AB = 5*cm*, BC = 3*cm*, CA = 6*cm* और QR = 3*cm*, RP = 6*cm* और PQ = 5*cm* है। ज्ञात करें कि दोनों त्रिभुजें सर्वांगसम हैं या नहीं। यदि सर्वांगसम हैं तो इन के सर्वांगसमता प्रतिबंध ( नियम ) भी लिखो।**

हल : त्रिभुज ΔABC और ΔPQR में

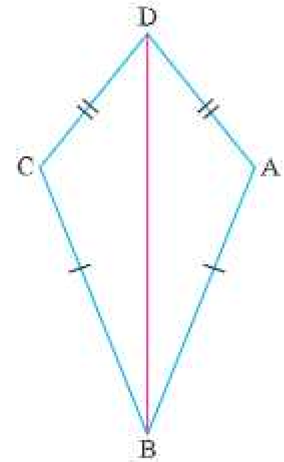
AB = PQ = 5cm

BC = QR = 3cm

CA = RP = 6cm

SSS (भु-भु-भु) सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत दोनों त्रिभुजें सर्वांगसम हैं। ऊपर दी गई आकृति के अनुसार $A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow Q$ और $C \leftrightarrow R$

$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta PQR.$




**उदाहरण-2 : आकृति में AD = CD है और AB = CB है। क्या $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ है ?**

हल : $\Delta ABD$ और $\Delta CBD$ में

AD = CD (दिया है)

AB = CB (दिया है)

DB = DB (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore$ भु-भु-भु (SSS) सर्वांगसमता प्रतिबंध के अनुसार दोनों त्रिभुजें सर्वांगसम हैं।

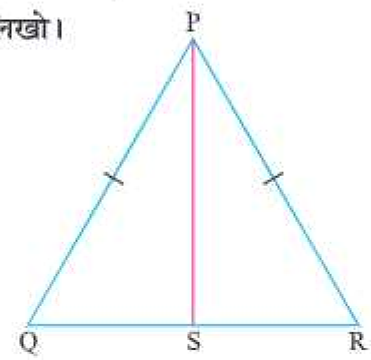
भाव $\Delta ABD \cong \Delta CBD$

**उदाहरण-3 : दी गई आकृति में PQ = PR है और बिंदु S भुजा QR का मध्य बिंदु है।**

**(i) $\Delta PSQ$ और $\Delta PSR$ में समान भुजाओं के तीन जोड़े ( युग्म ) लिखो।**

**(ii) क्या $\Delta PSQ \cong \Delta PSR$ है ? कारण बताओ।**

**(iii) क्या $\angle Q = \angle R$ ? क्यों ?**




हल : $\Delta PQR$ में

PQ = PR

और S, भुजा QR का मध्य बिंदु है।

(i) $\Delta PSQ$ और $\Delta PSR$ में

PQ = PR (दिया है।)

PS = PS (उभयनिष्ठ भुजा)

QS = RS [क्योंकि S, QR का मध्य बिंदु है]

(ii) हाँ, उपरोक्त (ऊपर दिए हुए) भाग (i) से स्पष्ट है कि

$\Delta PSQ \cong \Delta PSR$ (भु-भु-भु सर्वांगसमता प्रतिबंध)

(iii) हाँ,

$\because \quad \Delta PSQ \cong \Delta PSR$

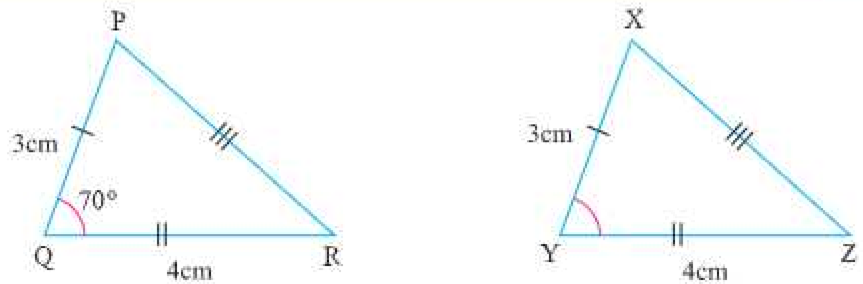
$\therefore \quad \angle Q = \angle R$ (c.p.c.t.)

**SAS (भुजा-कोण-भुजा) सर्वांगसमता नियम :** भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत दो त्रिभुजें सर्वांगसम होंगी यदि एक त्रिभुज की दो भुजाओं और उसके अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की संगत दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों।

## क्रिया

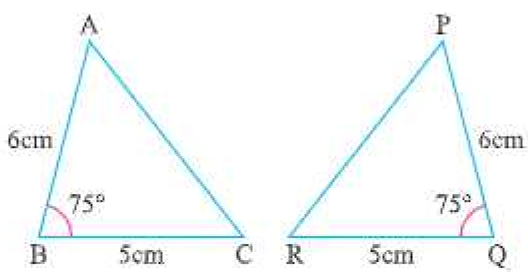
पैमाना और कोण मापक यंत्र D की सहायता से $\Delta PQR$ की रचना करो जिस में $PQ = 3cm$, $QR = 4cm$ और $\angle Q = 70°$ हो।

इसी प्रकार एक और त्रिभुज $\Delta XYZ$ बनाओ जिस मे XY = 3 cm, YZ = 4 cm और Y = 70° हो जैसे कि चित्र में दर्शाया गया है।

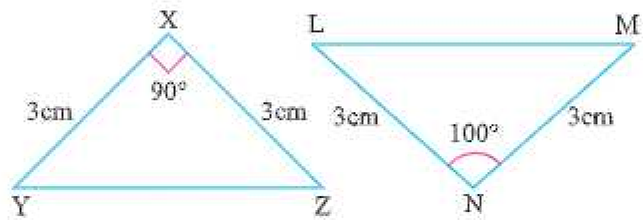



पारदर्शक कागज़ की सहायता से $\Delta PQR$ को ट्रेस करो और इसको $\Delta XYZ$ के ऊपर इस तरह स्थापित करो कि भुजा PQ, भुजा XY के संपाती हो जाए और भुजा QR भुजा YZ के संपाती हो जाए। ऐसे करते हुए कोण Q कोण Y के ऊपर आ जाए। हम देखेंगे कि भुजा PR, भुजा XZ के संपाती हो जाएगी। इस से स्पष्ट होता है कि $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ है।

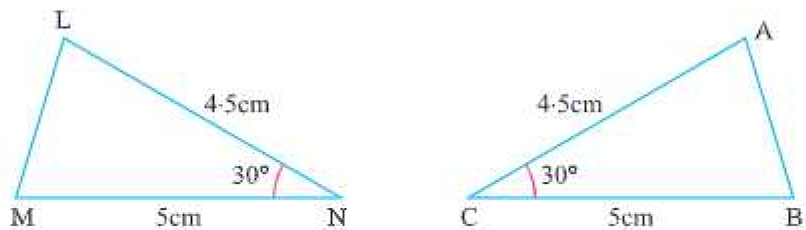
**उदाहरण-4 : निम्न आकृतियों में त्रिभुजों के कुछ भागों के माप दिए गए हैं। SAS ( भुजा-कोण-भुजा ) सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करते हुए सर्वांगसम त्रिभुजों के युग्म लिखो और जो भुजाएं परस्पर सर्वांगसम हों उनको सर्वांगसमता चिह्न में लिखें।**




(*i*)




(*ii*)




(*iii*)

**हल :** (*i*) $\Delta ABC$ और $\Delta PQR$ में

$$AB = PQ = 6cm$$
$$BC = QR = 5cm$$
$$\angle ABC = \angle PQR = 75^\circ$$

SAS नियम अनुसार त्रिभुज सर्वांगसम हैं। जिन में

$A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow Q$ और $C \leftrightarrow R$.

इस लिए $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ हैं।

(*ii*) $\Delta XYZ$ और $\Delta LMN$ में

$$XY = NL$$
$$XZ = NM$$

परंतु $\angle YXZ \neq \angle LNM$ ($\because 90° \neq 100°$)

इस लिए सर्वांगसमता नियम लागू नहीं होता।

$\therefore$ $\Delta XYZ$ और $\Delta LMN$ सर्वांगसम नहीं हैं।

(*iii*) $\Delta LMN$ और $\Delta ABC$ में

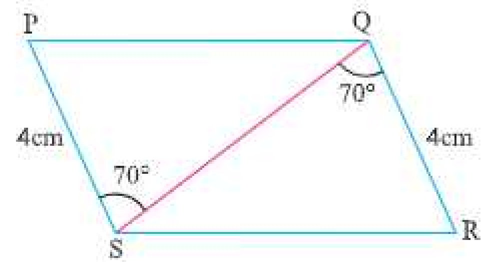
$$MN = BC = 5cm$$
$$LN = AC = 4.5cm$$
$$\angle LNM = \angle ACB = 30°$$

इस लिए SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

जिन में $L \leftrightarrow A, N \leftrightarrow C, M \leftrightarrow B$

इस लिए $\Delta LNM \cong \Delta ACB$ हैं।

**उदाहरण-5 : दिए गए चतुर्भुज PQRS में $PS = 4cm$, $QR = 4cm$, $\angle PSQ = 70°$, $\angle RQS = 70°$. दिखाएं कि $\Delta PSQ \cong \Delta RQS$ है, जहाँ SQ, चतुर्भुज PQRS का विकर्ण है।**




हल : स्पष्ट है कि विकर्ण SQ, चतुर्भुज PQRS के दो त्रिभुजों $\Delta PSQ$ और $\Delta RQS$ में विभाजित करता है।

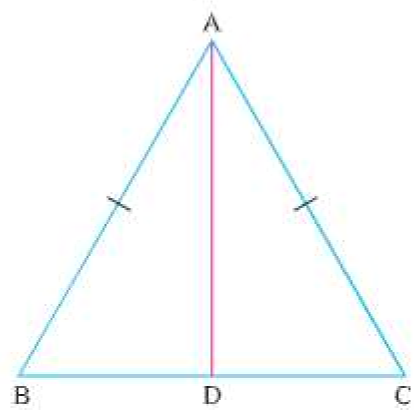
अब $\Delta PSQ$ और $\Delta RQS$ में

$$PS = RQ = 4cm \quad \text{(दिया गया है)}$$
$$SQ = QS \quad \text{(उभयनिष्ठ भुजा)}$$
$$\angle PSQ = \angle RQS = 70° \quad \text{(दिया गया है)}$$

इस लिए SAS सर्वांगसमता नियम द्वारा दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। जहाँ $P \leftrightarrow R, S \leftrightarrow Q$ और $Q \leftrightarrow S$ है।

$\therefore$ $\Delta PSQ \cong \Delta RQS$

**उदाहरण-6 : आकृति में $AB = AC$ है और AD, $\angle BAC$ का समद्विभाजक है।**




(*i*) **$\Delta ADB$ और $\Delta ADC$ में त्रिभुजों के बराबर भाग लिखें।**

(*ii*) **क्या $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ है ? कारण बताएं।**

(*iii*) **क्या $\angle B = \angle C$ है ? कारण बताएं।**

हल : (*i*) $\Delta ADB$ और $\Delta ADC$, में

$$AB = AC \quad \text{(दिया गया है)}$$
$$AD = AD \quad \text{(उभयनिष्ठ भुजा)}$$
$$\angle BAD = \angle CAD \quad (\because AD, \angle BAC \text{ का समद्विभाजक है})$$

(*ii*) हाँ, उपरोक्त भाग (*i*) से स्पष्ट है कि SAS सर्वांगसमता नियम के अनुसार $\Delta BAD \cong \Delta CAD$

अर्थात $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

(*iii*) क्योंकि $A \leftrightarrow A, D \leftrightarrow D$ और $B \leftrightarrow C$

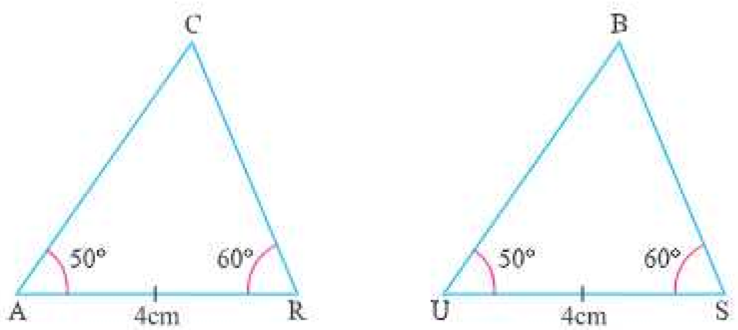
$\therefore \quad \angle B = \angle C$ (c. p. c. t.)

**ASA (कोण-भुजा-कोण) :** सर्वांगसमता नियम कोण-भुजा-कोण सर्वांगसमता नियमानुसार दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और बीच वाली भुजा दूसरी त्रिभुज के संगत के कोण और बीच वाली एक भुजा के बराबर हों।

## क्रिया

एक त्रिभुज $\Delta CAR$ बनाएं जिस में $AR = 4cm$, $\angle A = 50°$ और $\angle R = 60°$ हैं।

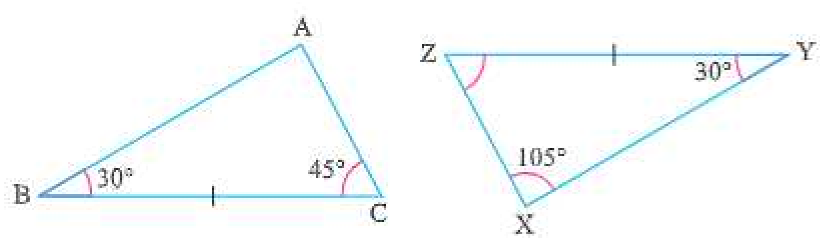
एक दूसरी त्रिभुज $\Delta BUS$ बनाएँ जिस में $US = 4cm$ $\angle U = 50°$ और $\angle S = 60°$ हैं जैसे कि निम्न आकृति में दिखाया गया है-




अब पारदर्शक कागज़ की सहायता से $\Delta CAR$ को ट्रेस करें और इसको $\Delta BUS$ के ऊपर इस प्रकार स्थापित करें कि भुजा AR भुजा US के संपाती हो जाए और कोण $\angle A$ कोण $\angle U$ के ऊपर स्थापित हो जाए। $\angle R$, $\angle S$ के ऊपर स्थापित हो जाए, हम देखेंगे कि $\Delta CAR$ पूर्णतया $\Delta BUS$ को ढक लेगी।

$\therefore \quad \Delta CAR \cong \Delta BUS$

**उदाहरण-7 : आकृति में $\angle B = 30°, \angle C = 45°, \angle Y = 30°$ है और $\angle X = 105°, BC = YZ$ है। सिद्ध करें कि $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$**




**हल :** दिया है- $\angle Y = 30°, \angle X = 105°$

$\Delta XYZ$ में,

$$\angle X + \angle Y + \angle Z = 180° \quad (\because \text{त्रिभुज के तीनों कोणों का योग } 180° \text{ होता है।})$$

$$105° + 30° + \angle Z = 180°$$

$$135° + \angle Z = 180°$$

$$\angle Z = 180° - 135°$$
$$\angle Z = 45°$$

अब $\Delta ABC$ और $\Delta XYZ$ में

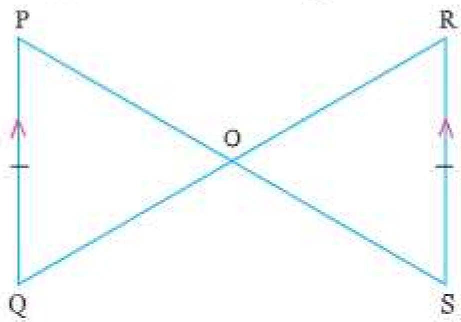
$$\angle B = \angle Y = 30°$$
$$\angle C = \angle Z = 45°$$
$$BC = YZ \text{ (दिया गया है)}$$

$\therefore$ ASA सर्वांगसमता निम्नानुसार

$$\Delta ABC \cong \Delta XYZ$$

**उदाहरण-8 : आकृति में $PQ \parallel RS$ और $PQ = RS$ हैं। सिद्ध कीजिए कि :**

**(i) $\Delta POQ \cong \Delta SOR$ (ii) $PO = OS$ और $QO = RO$**




हल : (i) $\Delta POQ$ और $\Delta SOR$ में,

$PQ = RS$ (दिया गया है)

$\angle PQO = \angle SRO$ (एकांतर अंत:कोण)

$\angle QPO = \angle RSO$ (एकांतर अंत:कोण)

$\therefore$ ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

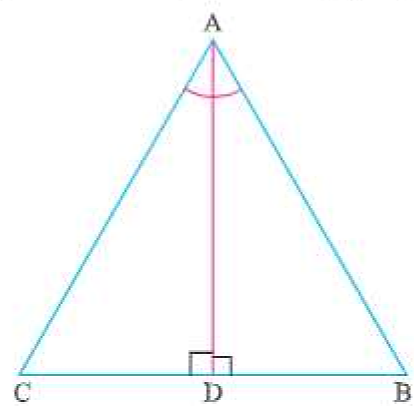
$\Delta POQ \cong \Delta SOR$

(ii) भाग (i) अनुसार, $\Delta POQ \cong \Delta SOR$

$\therefore$ $PO = OS$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) (c.p.c.t.)

$QO = RO$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) (c.p.c.t.)

**उदाहरण-9 : त्रिभुज $\Delta ABC$ में $\angle A$ का समद्विभाजक AD भुजा BC पर लंब है।**




**(i) त्रिभुज ADB और ADC के बराबर भुजाओं के युग्म लिखें।**

**(ii) क्या $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ है ? कारण बताएं।**

**(iii) क्या $AB = AC$ ? क्यों ?**

हल : (i) $\Delta ADB$ और $\Delta ADC$ में बराबर भाग के तीन जोड़े है :

$\angle ADB = \angle ADC$ (प्रत्येक 90°)

$\angle BAD = \angle CAD$ (क्योंकि AD, $\angle A$ का समद्विभाजक है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

(*ii*) $\therefore$ ASA सर्वांगमता नियमानुसार $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ है।

(*iii*) और $A \leftrightarrow A, D \leftrightarrow D, B \leftrightarrow C$ सुमेलन (संगत) शीर्ष है।

$\therefore$ $AB = AC$ (c.p.c.t.)

**टिप्पणी :** यदि एक त्रिभुज के दो कोण दिए हुए हों तो आप त्रिभुज के तीसरे कोण को त्रिभुज के कोणों का योग गुण का प्रयोग करके हमेशा ज्ञात कर सकते हैं। अत: जब किसी त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा किसी त्रिभुज के दो संगत कोणों और भुजा के बराबर हो तो तीसरा कोण बराबर सिद्ध करके आप इसे, दो कोणों और अंतर्गत भुजा वाली सर्वांगसमता रूपांतरित कर सकते हैं और तब सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग कर सकते हैं।

**समकोण त्रिभुजों की सर्वांगसमता (RHS सर्वांगसमता नियम प्रतिबंध) :-**

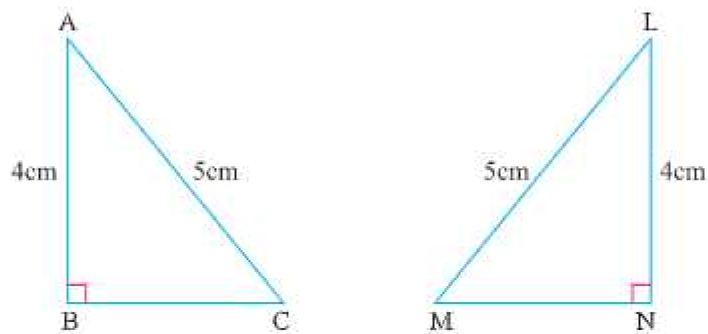
RHS अर्थात समकोण (Right Angle), कर्ण (Hypotenuse), भुजा (side) हैं।

RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत दो समकोण त्रिभुज तब सर्वांगसम होंगे जब किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमश: किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों।

## क्रिया

पैमाना और कोण मापक (डी) की सहायता से एक त्रिभुज $\Delta ABC$ बनाएं जिसमें $\angle C = 90°$. कर्ण $AC = 5cm$ और भुजा $AB = 4cm$ हो।

इस प्रकार एक और त्रिभुज LMN बनाएं जिसमें $\angle M = 90°$, कर्ण $LM = 5cm$ और भुजा $LN = 4cm$ हो, जैसे कि आकृति में दर्शाया गया है।




$\Delta ABC$ का ट्रेसिंग पेपर की सहायता से अक्स बनाएं और उसे $\Delta LMN$ के ऊपर एक इस प्रकार स्थापित करें कि भुजा AB भुजा LN के संपाती हो जाए। हम देखेंगे कि भुजा AC भुजा LM के संपाती हो जाए। भुजा BC भुजा MN के संपाती हो जाएगी।

इससे ज्ञात होता हैं कि $\Delta ABC \cong \Delta LNM$

**उदाहरण-10 : दो त्रिभुज $\Delta ABC$ और $\Delta PQR$ के कुछ भागों के माप निम्नानुसार दिए गए हैं। जाँच कीजिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं या नहीं। यदि सर्वांगसम हैं तो सर्वांगसमता के चिह्न अनुसार लिखें।**

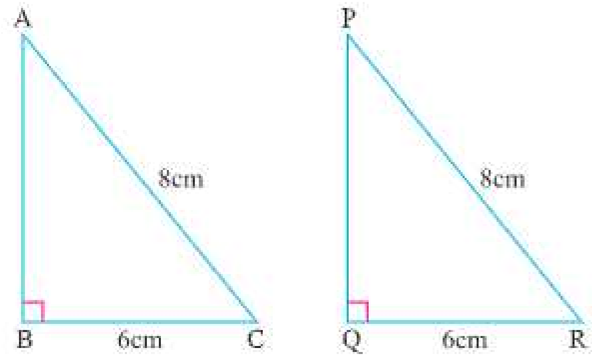
(*i*) $\angle B = 90°, AC = 8cm, BC = 6cm$
$\angle Q = 90°, PR = 8cm, QR = 6cm$

(*ii*) $\angle A = 90°, AC = 4cm, BC = 5cm$
$\angle Q = 90°, QP = 4cm, RP = 6cm$

**हल :** (*i*) $\Delta ABC$ और $\Delta PQR$ में,

$\angle B = \angle Q$ (प्रत्येक 90°)

कर्ण $AC$ = कर्ण $PR = 8cm$

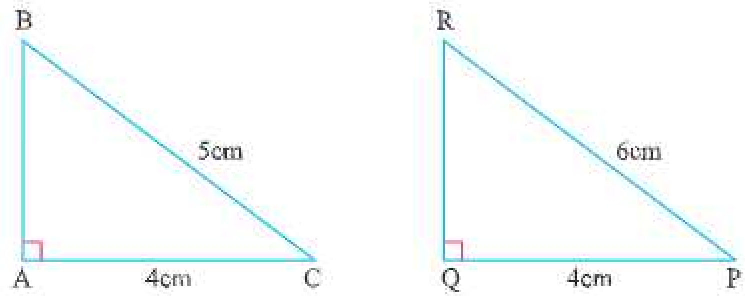



भुजा BC = भुजा QR = 6cm

∴ RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

(*ii*) $\Delta ABC$ और $\Delta PQR$ में $\angle A = \angle Q = 90°$ (दिया गया है)



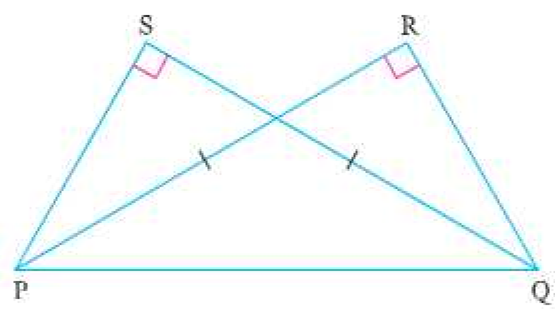

भुजा AC = भुजा QP = 4*cm*

परंतु कर्ण BC ≠ कर्ण RS

5*cm* ≠ 6*cm*

∴ त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।

**उदाहरण-11 : आकृति अनुसार $\Delta PQR$ और $\Delta PQS$ क्रमश: R और S पर समकोण हैं और PR = QS हैं। सिद्ध कीजिए कि $\Delta PQR$ और $\Delta PQS$ सर्वांगसम हैं। दिखाइए कि $\angle PQR = \angle QPS$ है।**




हल : दी गई त्रिभुज $\Delta PQR$ और $\Delta PQS$ में

$\angle R = \angle S$ = 90°

भुजा PR = भुजा QS (दिया गया है)

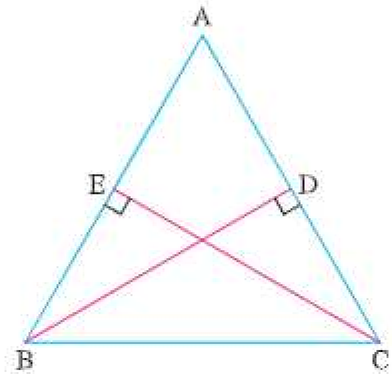
कर्ण PQ = कर्ण PQ (उभयनिष्ठ भुजा)

∴ RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$\Delta PQR \cong \Delta QPS$

∴ $\angle PQR = \angle QPS$ (c.p.c.t.)

**उदाहरण-12 :आकृति के अनुसार BD और CE, त्रिभुज ΔABC के शीर्षलंब हैं। जिस में BD = CE है।**




**(i) ΔBCE और ΔCBD के बराबर भाग लिखें।**

**(ii) क्या ΔBCE ≅ ΔCBD ? कारण बताएं।**

**(iii) क्या ∠EBC = ∠DCB ? कारण बताएं।**

हल : ΔBCE और ΔCBD, में

$\angle BEC = \angle BDC = 90°$

कर्ण BC = कर्ण CB

भुजा CE = भुजा BD (दिया गया है)

(ii) जी हाँ। भाग (i) के अनुसार ΔBCE ≅ ΔCBD (RHSसर्वांगसमता प्रतिबंध)

जिस में शीर्ष निम्न अनुसार संगत है :

$B \leftrightarrow C, C \leftrightarrow B, E \leftrightarrow D$

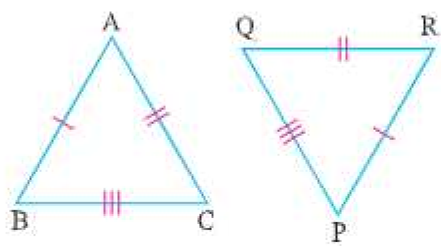
(iii) जी हाँ। भाग (ii) के अनुसार क्योंकि ΔBCE ≅ ΔCBD,

∴ $\angle EBC = \angle DCB$ (c.p.c.t.)

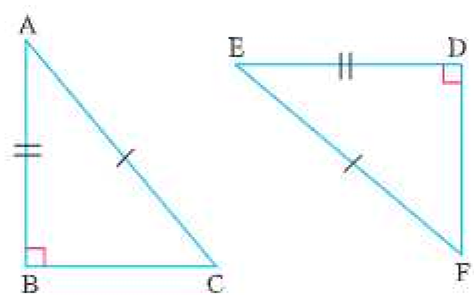
## प्रश्नावली - 7.2

1. त्रिभुज के निम्न युग्मों में जाँच करो कि त्रिभुज सर्वांगसम हैं या नहीं, यदि सर्वांगसम हैं तो उनके सर्वांगसमता नियम भी लिखें।

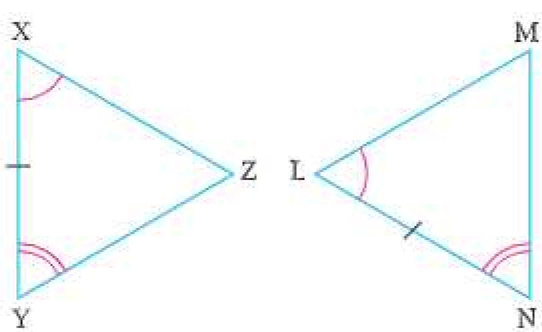
(i)



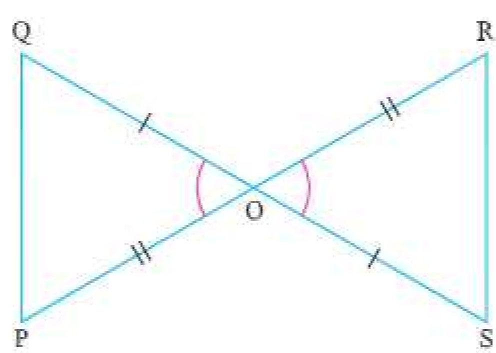

(ii)



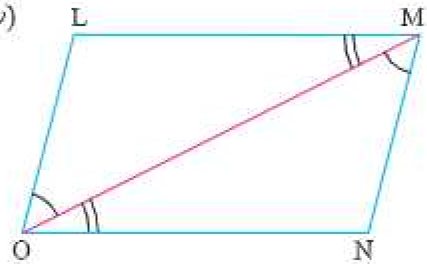

(iii)



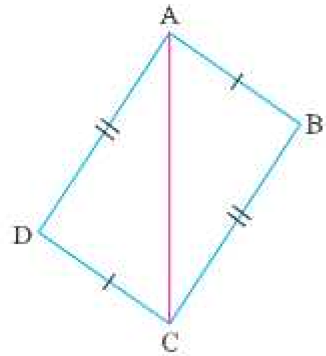

(iv)



(v)

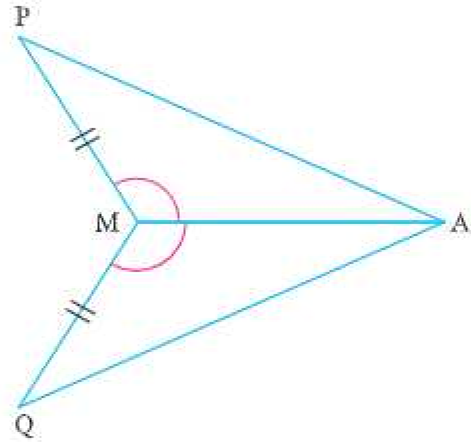



(vi)




**2.** आकृति में $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$ निम्नलिखित चरणों के लिए उपयुक्त कारण लिखें।

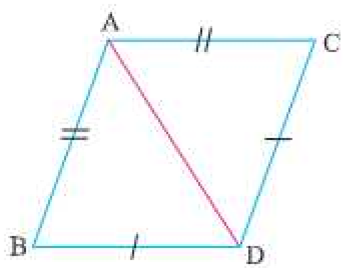
| चरण | कारण |
|---|---|
| (i) $PM = QM$ | ............... |
| (ii) $\angle PMA = \angle QMA$ | ............... |
| (iii) $AM = AM$ | ............... |
| (iv) $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$ | ............... |



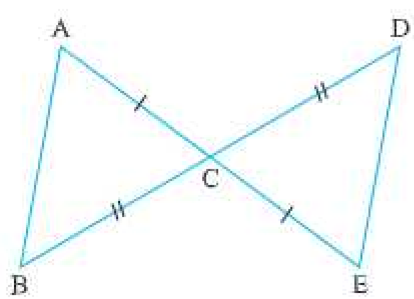

**3.** दी गई आकृति में $AB = AC$ और $BD = DC$. है। सिद्ध करो कि

(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

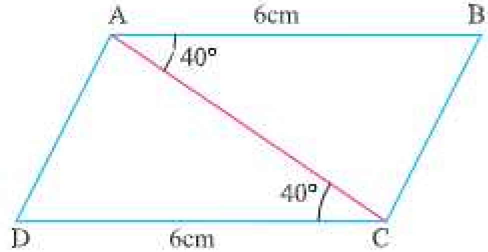
(ii) $\angle B = \angle C$




**4.** दी गई आकृति में $AC = CE$ और $BC = CD$. सिद्ध करो कि $\Delta ACB \cong \Delta ECD$.



**5.** आकृति में :



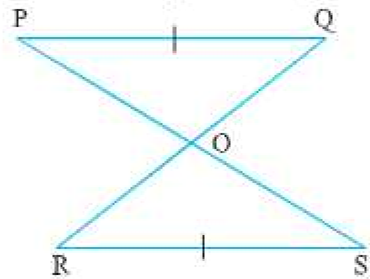

(*i*) $\Delta$ADC और $\Delta$CBA के बराबर भाग लिखें।

(*ii*) क्या $\Delta ADC \cong \Delta CBA$ है ? कारण बताएं।

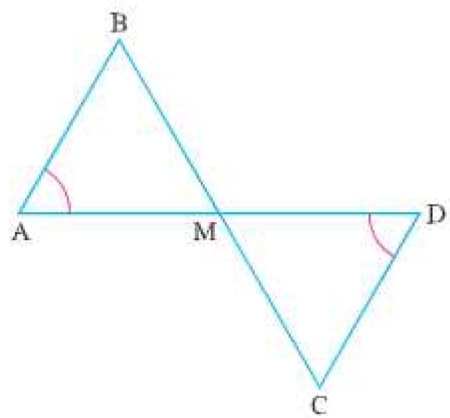
(*iii*) क्या AD = CB है ? कारण बताएं।

**6.** दी गई आकृति में PQ ‖ RS और PQ = RS है। सिद्ध कीजिए कि

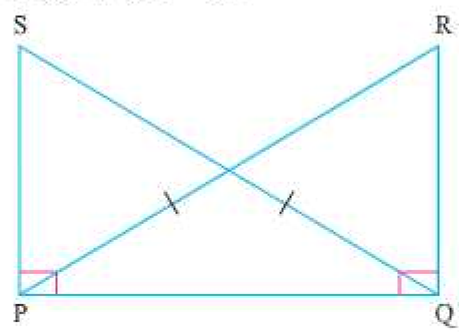
(*i*) $\Delta POQ \cong \Delta SOR$ (*ii*) $\angle POQ = \angle SOR$




**7.** दी गई आकृति में भुजा AD का मध्य बिंदु M है और $\angle A = \angle D$. है। सिद्ध कीजिए कि $\Delta AMB \cong \Delta DMC$




**8.** आकृति में $SP \perp PQ$, $RQ \perp PQ$ और PR = QS

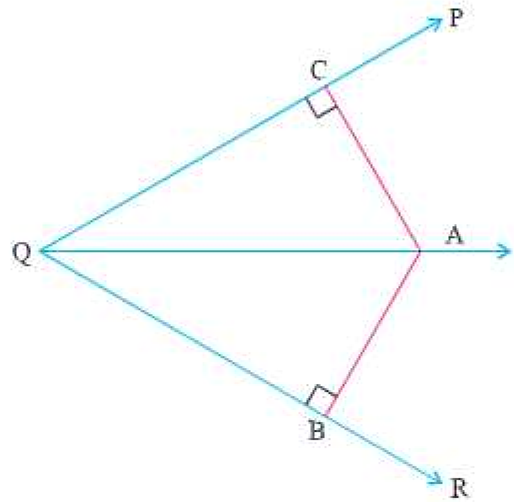



(*i*) $\Delta$PQR और $\Delta$SPQ के बराबर भाग लिखें।

(*ii*) सिद्ध कीजिए कि $\Delta PQR \cong \Delta QPS$

**9.** आकृति में AB ⊥ QR, AC ⊥ QP और QC = QB. है। सिद्ध कीजिए कि

(*i*) $\Delta QAB \cong \Delta QAC$ (*ii*) $\angle AQB = \angle AQC$




**10. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) निम्न में से कौन-सी सर्वांगसमता प्रतिबंध नहीं है ?

(*a*) ASA (*b*) SAS

(*c*) SSS (*d*) AAA

(*ii*) यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है तो सही कथन का चयन करें।

(*a*) $\angle A = \angle Q$ (*b*) $\angle A = \angle R$

(*c*) $\angle A = \angle P$ (*d*) AB = QR

(*iii*) यदि $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और AB = DE है, तो $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, के लिए सर्वांगसमता प्रतिबंध लिखें।

(*a*) SSS (*b*) ASA

(*c*) SAS (*d*) RHS

**11.** ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध और SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध दोनों एक ही है। **(सही / गलत)**

**12.** दो समकोण त्रिभुज सदैव सर्वांगसम होते हैं। **(सही / गलत)**

**13.** सर्वांगसमता दर्शाने के लिए '=' चिह्न का प्रयोग किया जाता है। **(सही / गलत)**

## क्रिया

**उद्देश्य :** समद्विबाहु त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं।

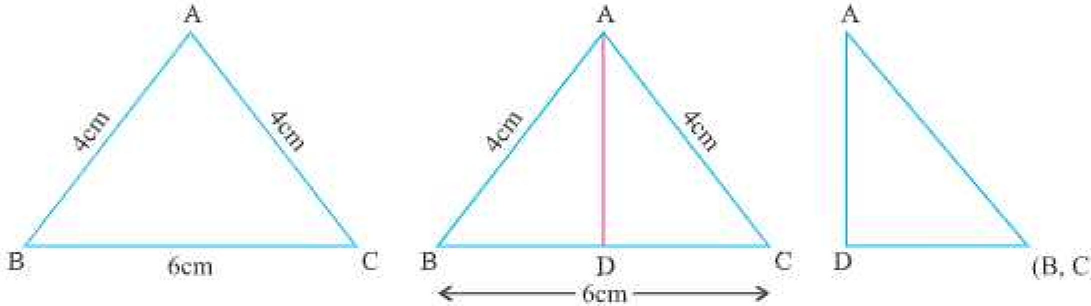
**पूर्व ज्ञान :** विद्यार्थी को समद्विबाहु त्रिभुज के बारे में जानकारी है।

**आवश्यक सामग्री :** रंगीन कागज, ज्यामिती बॉक्स, रंगीन पेंसिलें।

**विधि :**

1. किसी रंगीन कागज़ के ऊपर $\Delta ABC$ बनाएँ, जिस में AB = AC = 4 cm, BC = 6 cm.
2. $\Delta ABC$ काटें और इसे इस प्रकार मोड़ें कि AB भुजा और AC भुजा संपाती हो जाएँ। उंगलियों के दबाव द्वारा क्रीज़ बनाएं।

3. हम देखते है कि शीर्ष C, शीर्ष B के ऊपर आ जाता है और BC भुजा के दोनों भाग एक दूसरे पर सही प्रकार से आ जाते हैं।




**निरीक्षण :** हम देखेगें कि $\angle B$ और $\angle C$ एक दूसरे के ऊपर पूर्णतया आ जाते हैं और भुजा AB पूर्णतया भुजा AC के ऊपर आ जाती है।

**परिणाम :** $m\angle B = m\angle C$

∴ सभी समद्विबाहु त्रिभुजों में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण भी बराबर ही होते हैं।

## मौखिक प्रश्न

**प्रश्न 1.** **समद्विबाहु त्रिभुज की कितनी भुजाएं बराबर होती हैं ?**

उत्तर— 2

**प्रश्न 2.** **एक त्रिभुज के कितने कोण होते हैं ?**

उत्तर— 3

**प्रश्न 3.** **समद्विबाहु त्रिभुज के कितने कोण बराबर होते हैं ?**

उत्तर— 2

## हमने क्या चर्चा की?

1. एक ही अक्स और आकार की आकृतियां सर्वांगसम होती हैं।
2. दो आकृतियों की सर्वांगसमता को दर्शाने के लिए '≅' चिह्न का प्रयोग किया जाता है।
3. अध्यारोपण विधि आकृतियों की सर्वांगसमता की जाँच करती है।
4. समान लंबाई वाले रेखा-खंड सर्वांगसम होते हैं।
5. समान माप वाले कोण सर्वांगसम होते हैं।
6. सर्वांगसमता नियमों (प्रतिबंधों) के अनुरूप दो त्रिभुजों के तीन संगत भाग यदि बराबर हों तो त्रिभुजें सर्वांगसम होती हैं।
7. **भु-भु-भु (SSS) सर्वांगसम नियम :** एक त्रिभुज की तीन भुजाएं दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हों, तो त्रिभुजें सर्वांगसम होती हैं।
8. **भु-को-भु (SAS) सर्वांगसम नियम :** एक त्रिभुज की दो भुजाएं और उनके अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों तो त्रिभुजें सर्वांगसम होती हैं।
9. **को-भु-को (ASA) सर्वांगसम नियम :** एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा किसी दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हों, तो त्रिभुज सर्वांगसम होती हैं।
10. **RHS सर्वांगसम नियम :** समकोण (Right Angle), कर्ण (Hypotenuse), भुजा (side), यदि दो समकोण त्रिभुजों के संगत कर्ण और भुजाएं बराबर हों तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होती हैं।
11. को-को-को (AAA)और भु-भु-को (SSA) सर्वांगसमता के प्रतिबंध नहीं हैं।

## सीखने के परिणाम

**इस अध्याय के पूर्ण होने पर विद्यार्थी :**

1. अध्यारोपण विधि द्वारा सर्वांगसमता की जाँच करने के योग्य हैं।
2. प्रतिबंधों SSS, SAS, ASA, RHS का प्रयोग करके त्रिभुजों की सर्वांगसमता जाँच करने के योग्य हैं।
3. सर्वांगसमता त्रिभुजों के संगत भाग लिखने के योग्य है।

# उत्तरमाला

## प्रश्नावली 7.1

**1.** (*i*) सर्वांगसम नहीं (*ii*) सर्वांगसम नहीं
(*iii*) $\Delta XYZ \cong \Delta QPR$ (*iv*) सर्वांगसम नहीं
(*v*) $\square ABCD \cong \square PQRS$ (*vi*) सर्वांगसम नहीं

**2.** शीर्ष : $P \leftrightarrow O, Q \leftrightarrow M, R \leftrightarrow N$
भुजाएं : $PQ \leftrightarrow OM, QR \leftrightarrow MN, RP \leftrightarrow NO$
कोण : $\angle PQR \leftrightarrow \angle OMN, \angle QRP \leftrightarrow \angle MNO, \angle RPQ \leftrightarrow \angle NOM$

**4.** (*i*) $\angle Y$ (*ii*) XZ
(*iii*) ZY (*iv*) $\angle X$

**5.** (*i*) *c* (*ii*) *d*
(*iii*) *c*

**6.** सही **7.** सही

## प्रश्नावली 7.2

**1** (*i*) SSS (*ii*) RHS
(*iii*) ASA (*iv*) SAS
(*v*) ASA (*vi*) SSS

**2.** (*i*) दिया है (*ii*) दिया है
(*iii*) उभनिष्ठ (*iv*) SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध

**5.** (*i*) $AC = AC, DC = AB, \angle DCA = \angle BAC$
(*ii*) Yes. SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध
(*iii*) Yes, c.p.c.t.

**8.** (*i*) $PQ = QP, QR = SP, \angle PQR = \angle QPS$

**10.** (*i*) *d* (*ii*) *c* (*iii*) *b*

**11.** गलत **12.** गलत **13.** गलत

अध्याय 8

V9T8L7

# राशियों की तुलना

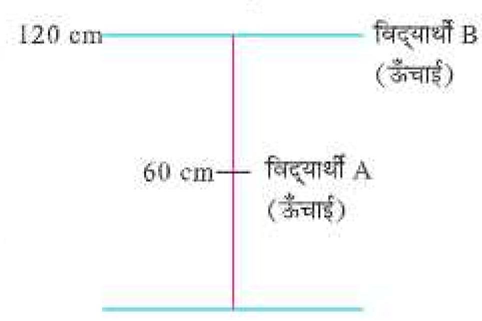
## उद्देश्य :-

**इस अध्याय में आप सीखेंगे :**

1. अपने दैनिक जीवन में दो या दो से अधिक राशियों की तुलना करना।
2. अनुपात को समान भिन्नों के रूप में बदलकर तुलना करना।
3. तुल्य भिन्नों का संकल्प।
4. समान अनुपात अर्थात् तुल्य अनुपात की समानता का संकल्प।
5. प्रतिशत का संकल्प।
6. प्रतिशत को भिन्न में, भिन्न को प्रतिशत में, प्रतिशत को दशमलव में, दशमलव को प्रतिशत में, प्रतिशत को अनुपात में, अनुपात को प्रतिशत में बदलना।
7. दी हुई राशि का प्रतिशत पता करना।
8. क्रय मूल्य, विक्रय मूल्य, लाभ, हानि, लाभ % और हानि % आदि जैसे कुछ नए शब्द।
9. एक विशेष समय के लिए, एक विशेष दर पर धन उधार लेना और उस पर साधारण, ब्याज का परिकलन का संकल्प।
10. साधारण ब्याज और राशियों से संबंधित मुश्किलों को हल करना।

## भूमिका

मान लीजिए, आप का बैंक आप की बचत पर दिए जाने वाले ब्याज की दर को बढ़ाता है और आप यह जानना चाहते हैं कि इस बदलाव से आपकी बचत में कितनी वृद्धि हो रही है या आप यह जानना चाहते हो कि किसी उत्पाद जैसे कार या वाशिंग मशीन के किसी विशेष मॉडल की कीमत में बदलाव से उसकी बिक्री कैसे प्रभावित होती है। इन सब को जानने के लिए आप को पहले उन संकल्पों की अच्छी तरह समझना होगा जिनमें राशियों की तुलना की जाती है जैसे- अनुपात, समान-अनुपात, या प्रतिशत आदि। इसलिए, एक बैंकर या एक अर्थशास्त्री की तरह अपने नज़रिये को विशाल करने के लिए आप को गणित का गहन अध्ययन और विशेष समझ और ज्ञान होना बहुत आवश्यक है। गणित आपको तर्कशील सोच वाला व्यक्ति बनाता है। एक अर्थशास्त्री बनने के लिए आपको गणित की भाषा और साधनों से लैस होना अति अनिवार्य है क्योंकि राशियों (कीमत, बिक्री, मज़दूरी, उत्पादन आदि) की गणना और तुलना करते समय एक अर्थशास्त्री को प्रतिशत, अनुपात और समानुपात के प्रयोग की आवश्यकता पड़ती है। प्रतिशत की ज़रूरत छूट, कर (टैक्स), आर्थिक वृद्धि आदि की गणना करने के लिए इसलिए, आइए, तुलना के संकल्प को समझें।




कई परिस्थितियों में हमें दो या दो से अधिक राशियों के मूल्यों की तुलना करने की ज़रूरत होती है। मान लीजिए, हमने दो विद्यार्थियों A और B की ऊँचाई की तुलना करनी है। यदि विद्यार्थी A की ऊँचाई

60 cm और विद्यार्थी B की ऊँचाई 120 cm है, तो हम कह सकते है कि विद्यार्थी B की ऊँचाई विद्यार्थी A की ऊँचाई से दुगुनी है या विद्यार्थी A की ऊँचाई विद्यार्थी B की ऊँचाई से आधी है।

**नोट :** दो राशियों की तुलना करते समय दोनों राशियों की इकाई समान होनी चाहिए।

## अनुपात और समानुपात (Ratio and Proportion)

**अनुपात :** दो समान इकाइयों वाली समान प्रकार की राशियों का अनुपात, उनका भिन्न रूप होता है।

$a$ का $b$ से अनुपात, भिन्न $\frac{a}{b}$ होता है और $a : b$ के रुप में लिखा जाता है।

जहाँ '$a$' पहला पद और '$b$' को दूसरा पद है।

अनुपात की कोई इकाई नहीं होती।

**उदाहरण-1 : 4 km का 300 m के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।**

**हल :** 4 km का 300 m के साथ अनुपात ज्ञात करने के लिए

पहले दोनों राशियों की इकाई समान करनी होगी।

$\because \quad 1km = 1000m \Rightarrow 4km = 4 \times 1000 = 4000m$

4000 m का 300 m के साथ अनुपात $= \frac{4000}{300} = 40 : 3$

वांछित अनुपात $= 40 : 3$

## सरलतम रूप ( न्यूनतम रूप ) (Simplest form)

अनुपात $a : b$ न्यूनतम रूप में है यदि $a$ और $b$ का म.स.व '1' हो, अर्थात $a$ और $b$ में '1' के अतिरिक्त कोई और सांझा गुणनखंड न हो। इसे न्यूनतम या सरलतम रूप भी कहते है।

## तुल्य अनुपात (Equivalent Rotio)

विभिन्न अनुपातों की तुलना करने के लिए, पहले दिए गए अनुपातों को भिन्नों के रूपों में लिखो। यदि ये भिन्नें समान है तब हम कहते हैं कि दिए हुए अनुपात तुल्य है।

**नोट :** यदि एक अनुपात के दोनों पदों को एक ही राशि शून्य (0) ना हो, से गुणा या भाग किया जाये तो अनुपात नहीं बदलता।

दो राशियों के अनुपात को अधिकतर उनके न्यूनतम रुप में ही दर्शाया जाता है।

उदाहरण के लिए अनुपात 1 : 3 और 2 : 9 की तुलना निम्नलिखित अनुसार की जा सकती है।

अनुपात 1 : 3 का भिन्न रूप $\frac{1}{3}$ और अनुपात 2 : 9 का भिन्न रूप $\frac{2}{9}$ है।

अब इन भिन्नों को तुल्य भिन्न में बदलने पर $\frac{1}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{9}$ और $\frac{2}{9} \times \frac{1}{1} = \frac{2}{9}$

तुल्य भिन्न है : $\frac{3}{9}$ और $\frac{2}{9}$ यहाँ $3 > 2$, इस लिए $\frac{3}{9} > \frac{2}{9}$.

इस लिए अनुपात 1 : 3 अनुपात 2 : 9 से बड़ा है।

**उदाहरण-2 : क्या अनुपात 1 : 5 और 2 : 15 तुल्य हैं ?**

**हल :** जाँच करने के लिए हमें यह देखना होगा कि क्या 1 : 5 और 2 : 15 समान है ?

पहले हम दिए अनुपात को भिन्न रूप में बदलेंगे। 1 : 5 को $\frac{1}{5}$ के रूप में और 2 : 15 को $\frac{2}{15}$ के रूप में लिखते हैं। इन्हें समान भिन्न बनाने के लिए, इनके हरों को समान बनाएंगे।

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{15} \text{ और } \frac{2}{15} = \frac{2}{15} \times \frac{1}{1} = \frac{2}{15}$$

इसलिए, $\frac{3}{15} < \frac{2}{15}$

इस तरह, 1 : 5 और 2 : 15 तुल्य अनुपात नहीं है।

**उदाहरण-3 : एक क्रिकेट टीम द्वारा खेले गए कुछ मैचों में प्रदर्शन निम्न प्रकार है :**

| वर्ष | जीत | हार |
|---|---|---|
| **पिछले वर्ष** | **8** | **2** |
| **इस वर्ष** | **4** | **2** |

**किस वर्ष में प्रदर्शन बेहतर था ? ऐसा आप किस आधार पर कह सकते हैं?**

**हल :** पिछले वर्ष, जीत : हार = 8 : 2 = 4 : 1

इस वर्ष, जीत : हार = 4 : 2 = 2 : 1

स्पष्ट है कि 4 : 1 > 2 : 1 (भिन्न रुप में $\frac{4}{1} > \frac{2}{1}$)

अत:, हम कह सकते हैं कि पिछले वर्ष टीम का प्रदर्शन बेहतर था।

**उदाहरण-4 : एक फर्नीचर की दुकान में 10 सोफा सेट, 8 डबल बैड और 16 डाइनिंग टेबल है। अनुपात ज्ञात कीजिए।**

**(i) डाइनिंग टेबल की गिनती का डबल बैड की गिनती से।**

**(ii) डबल बैड की गिनती का सोफा सैट की गिनती से।**

**हल :** (i) डाइनिंग टेबल की गिनती = 16

डबल बैड की गिनती = 8

∴ डाइनिंग टेबल की गिनती का डबल बैड की गिनती से अनुपात = 16 : 8 $= \frac{16}{8} = \frac{2}{1}$
= 2 : 1

(ii) डबल बैड की गिनती = 8

सोफा सैट की गिनती = 10

डबल बैड की गिनती का सोफा सैट की गिनती से अनुपात = 8 : 10 $= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ = 4 : 5

## समानुपात (Proportion)

हम जानते है कि दो अनुपातों की समानता को समानुपात कहते है, इसलिए इस में चार राशियाँ होती है। उदाहरण के लिए, यदि हम कहें 4, 5, 12 और 15 समानुपात में हैं इसका अर्थ है

4 : 5 : : 12 : 15 (चिहृन : : समानुपात को दर्शाता है)

अर्थात $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$

पहले और अन्तिम पद (4 और 15) को बाह्य पद और (12 और 5) को मध्य पद कहा जाता है।

×3 ( 4 : 5 / 12 : 15 ) ×3

4 : 5 12 : 15

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

यदि समानुपात के तीन पद दियें हो तो हम अज्ञात पद आसानी से पता कर सकते है। आओ, देखें, कि कैसे यह ऐसी समस्याओं को हल करने में सहायक होती है।

## समानुपात के प्रयोग से समस्याओं को हल करना

समानुपात के प्रयोग से किसी भी समस्या का हल करने से पहले हमें यह निर्धारित करना है कि समानुपात-प्रत्यक्ष है या प्रतिलोम है।

समानुपात में दी गई राशियाँ या तो प्रत्यक्ष समानुपात में या प्रतिलोम समानुपात में होती हैं।

**प्रत्यक्ष समानुपात :** यदि समानुपात में दी राशियों में एक की वृद्धि से या घटने से दूसरी राशि भी बढ़े या घटे तो राशियाँ प्रत्यक्ष समानुपात में होती है।

**प्रतिलोम समानुपात :** यदि समानुपात मे दी राशियों में एक की वृद्धि से दूसरी राशि घटे या एक के घटने से दूसरी राशि में वृद्धि हो तो राशियाँ प्रतिलोम समानुपात में होती हैं।

आइए, समानुपात के प्रकार को पहचाने के लिए कुछ समस्याओं का विश्लेषण करे और उन्हें हल करें।

**उदाहरण-5 : यदि 2 पैनों का मूल्य ₹15 है तो हम ₹90 में कितने पैर खरीद सकते है ?**

**हल :** अधिक पैन खरीदने के लिए अधिक धन खर्च होगा।

अधिक पैन → अधिक राशि खर्च होगी। इसलिए, पैनों की गिनती और व्यय किया धन में प्रत्यक्ष समानुपात है।

मान लो खरीदे गए पेनों की गिनती $= x$

$$\frac{2}{15} = \frac{x}{90}$$

इसलिए, $x = \frac{2\times 90}{15} = 12$

इस तरह, हम ₹ 90 में 12 पैन खरीद सकते हैं।

**उदाहरण-6 : यदि 4 व्यक्ति एक सड़क की मुरम्मत करने के लिए 6 दिन लगाते हैं तो 7 व्यक्ति इस काम को इसी दर से कितने समय में करेंगे ?**

**हल :** जितने अधिक व्यक्ति होंगे उतना ही उस काम को करने में समय कम लगेगा।

अधिक आदमी → काम पूरा करने के लिए कम समय लगेगा।

इसलिए, व्यक्तियों की संख्यां और काम करने में लगने वाला समय में प्रतिलोम समानुपात है।

मान लीजिए, वांछित दिनों की गिनती '$x$' है। $4 : 7 :: x : 6$

$$4\times 6 = 7\times x$$

इसलिए $x = \frac{4\times 6}{7} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$

इसलिए 7 आदमियों को सड़क मुरम्मत करने के लिए $3\frac{3}{7}$ दिन लगेंगे।

## प्रश्नावली - 8.1

1. अनुपात ज्ञात कीजिए :

   (*i*) ₹ 5 का 50 पैसे से (*ii*) 15 kg का 210 g से

   (*iii*) 4 m का 400 cm से (*iv*) 30 दिनों का 36 घंटों से

2. क्या अनुपात 1 : 2 और 2 : 3 तुल्य है ?

3. यदि 6 खिलौनों का मूल्य ₹ 240 है, तो 21 खिलौनों का मूल्य क्या होगा ?
4. मेरी कार 25 $l$ पैट्रोल में 150 km दूरी तय कर सकती है। 30 $l$ पैट्रोल में यह कितनी दूरी तय करेगी?
5. एक कंप्यूटर प्रयोगशाला में 6 विद्यार्थियों के लिए 3 कंप्यूटर होने चाहिए। ज्ञात कीजिए कि 24 विद्यार्थियों के लिए कितने कंप्यूटरों की आवश्यकता होगी ?

## प्रतिशतता-राशियों की तुलना करने की एक और विधि (Percentage – Another way of comparing quantities)

क्या आप को प्रतिशत के बारे में कुछ याद है ?

- एक भिन्न जिसका हर 100 हो, प्रतिशत कहलाती है।
- प्रतिशत को प्रदर्शित करने के लिए चिह्न % का प्रयोग किया जाता है।

$\frac{19}{100} = 19\%$, $\frac{7}{100} = 7\%$ प्रतिशत की कुछ उदाहरणें हैं।

**याद रखो :** प्रतिशत को

(*i*) भिन्न रुप में बदला जा सकता है।

(*ii*) अनुपात रुप में लिखा जा सकता है।

(*iii*) दशमलव रुप में लिखा जा सकता है।

**क्या आप जानते हो ?**

प्रतिशत (percent) शब्द, लेटिन (latin) भाषा के एक शब्द 'percentum' से लिया गया है जिसका अर्थ है प्रति एक सौ।

**उदाहरण के लिए,**

अमन ने 100 अंक में से 88 अंक प्राप्त किए, भाव उसने 88 प्रतिशत अंक प्राप्त किए। इसके विपरीत, एक विद्यार्थी ने 65 प्रतिशत अंक प्राप्त किए तो इसका अर्थ 100 अंक में से 65 अंक प्राप्त किए।

इस तरह, 25% का अर्थ है, 100 में से 25 = $\frac{25}{100}$,

62% का अर्थ है, 100 में से 62 = $\frac{62}{100}$

इस तरह % का अर्थ है, एक सौवें हिस्से को दर्शाना अर्थात $\frac{1}{100}$

प्रतिशत को समझने के लिए निम्न उदाहरण पर विचार करते है।

सुमन एक मेज़ के ऊपरी भाग को बनाने के लिए 100 भिन्न-भिन्न रंगों वाली टाइलें प्रयोग करती है। उसने पीले, हरे लाल और नीले रंग वाली टाइलें अलग-अलग गिनी और एक तालिका में निम्न प्रकार लिखा।

| रंग | टाइलों की संख्या | भिन्न | प्रतिशत | ऐसे लिखा जाता है |
|---|---|---|---|---|
| नीला | 16 | $\frac{16}{100}$ | 16 | 16% |
| लाल | 33 | $\frac{33}{100}$ | 33 | 33% |
| पीला | 23 | $\frac{23}{100}$ | 23 | 23% |
| हरा | 28 | $\frac{28}{100}$ | 28 | 28% |
| **योग** | **100** | | | |

इससे यह ज्ञात होता है कि :

एक भिन्न $\frac{r}{100}$ में, प्रतिशत '$r$' है जिसे $r$ % के रुप में लिखा जा सकता है। भिन्न के अंश भाव '$r$' को प्रतिशत की दर भी कहा जाता है। इसलिए, प्रतिशतता = प्रति सौ की दर

## प्रतिशतता ज्ञात करना जब योग '100' न हो (Percentage when the total is not hundred)

यदि वस्तुओं की कुल संख्या 100 न हो तो उसे ऐसी तुल्य भिन्न में बदलो जिसा हर '100' हो। निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए।

रीना के पास गले की ऐसी माला है जिसमें दो रंगो के 20 मोती हैं।

| रंग | मोतियों की संख्या | भिन्न | 100 हल वाली तुल्य भिन्न | प्रतिशतता |
|---|---|---|---|---|
| लाल | 12 | $\frac{12}{20}$ | $\frac{12}{20} \times \frac{5}{5} = \frac{60}{100}$ | 60% |
| हरा | 8 | $\frac{8}{20}$ | $\frac{8}{20} \times \frac{5}{5} = \frac{40}{100}$ | 40% |
| **योग** | **20** | | | |

**नोट :** प्रश्नावली में प्रतिशत और प्रतिशतता एक दूसरे के समानार्थिक शब्द हैं।

**उदाहरण-1 : एक कक्षा में कुल 25 विद्यार्थियों में से 16 लड़कियाँ है। लड़कियों की प्रतिशतता ज्ञात कीजिए।**

हल : 25 विद्यार्थियों में से 16 लड़कियाँ है।

$\therefore$ लड़कियों की प्रतिशतता $= \left(\frac{16}{25} \times 100\right)\% = 64\%$

**उदाहरण-2 : टीना ने 400 में से 320 अंक प्राप्त किए और रीना ने 360 में से 300 प्राप्त किए। किसने बेहतर प्रदर्शन किया है ?**

हल : टीना ने 400 में से 320 अंक प्राप्त किए।

$\therefore$ टीना द्वारा प्राप्त प्रतिशत अंक $= \left(\frac{320}{400} \times 100\right)\% = 80\%$

रीना ने 360 में से 300 अंक प्राप्त किऐ।

$\therefore$ रीना द्वारा प्राप्त प्रतिशत अंक $= \left(\frac{300}{360} \times 100\right)\%$

$= \frac{250}{3}\% = 83\frac{1}{3}\%$

$83\frac{1}{3} > 80$ इसलिए, रीना का प्रदर्शन टीना से बेहतर है।

**उदाहरण-3 : राधिका हर मास ₹350 व्यय करती है। यदि यह जेब खर्च का 70% है तो उसका कुल जेब खर्च ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लीजिए, राधिका का जेब खर्च प्रति मास = ₹ $x$

व्यय किया जेब खर्च = ₹ 350

व्यय किए पैसे = जेब खर्च का 70% है

$\therefore$ $x$ का 70% = 350

$$\Rightarrow \quad \frac{70}{100} \times x = 350$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{350 \times 100}{70} = 500, x = 500$$

इसलिए, राधिका का जेब खर्च ₹ 500 है।

## प्रतिशत को भिन्न में बदलना (Converting a percentage into a fraction)

**नियम :** प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिए, '%' को $\frac{1}{100}$ के साथ बदलो और फिर प्राप्त भिन्न को न्यूनतम रुप में व्यक्त कीजिए।

**उदाहरण-4 : निम्नलिखित प्रतिशत को भिन्न में बदलो :**

(*i*) **20%** (*ii*) **6.5%** (*iii*) $3\frac{1}{8}$ **%** (*iv*) **135%**

हल : (*i*) $20\% = \frac{200}{100} = \frac{1}{5}$

(*ii*) $6.5\% = \frac{65}{1000} = \frac{13}{200}$

(*iii*) $3\frac{1}{8}\% = \frac{25}{8}\% = \frac{\frac{25}{8}}{100} = \frac{25}{8} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{32}$

(*iv*) $135\% = \frac{135}{100} = \frac{27}{20} = 1\frac{7}{20}$

> '%' चिन्ह को $\frac{1}{100}$ से बदलो और सरल करो।

## भिन्न को प्रतिशत में बदलना (Converting a fraction into percentage)

**नियम :** भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिए, दी हुई भिन्न को 100 से गुणा कीजिए और न्यूनतम रुप मे लिखिए और उत्तर के साथ % का प्रयोग कीजिए।

**उदाहरण-5 : निम्नलिखित भिन्नों को प्रतिशत में बदलो :**

(*i*) $\frac{1}{2}$ (*ii*) $\frac{2}{3}$ (*iii*) $1\frac{5}{8}$

हल : (*i*) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 100 = 50$

इस तरह, $\frac{1}{2} = 50\%$

(*ii*) $\frac{2}{3} \times 100 = 66.67\%$

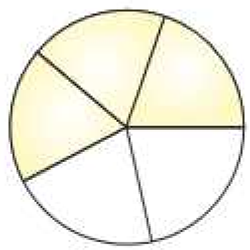
इस तरह, $\frac{2}{3} = 66.67\%$

> $\frac{1}{100}$ के साथ गुणा करो और '%' चिन्ह का प्रयोग करो।

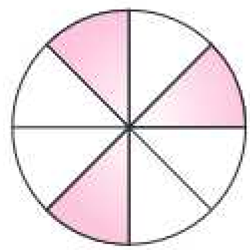
(*iii*) $1\frac{5}{8} = \frac{13}{8} \times 100\% = 13 \times \frac{25}{2} = \frac{325}{2}\% = 162.5\%$

इस तरह, $1\frac{5}{8} = 162.5\%$

**उदाहरण-6 :** आकृति का कितना भाग छायांकित है ज्ञात कीजिए। फिर, छायांकित भाग की प्रतिशतता ज्ञात कीजिए।



(*i*)



(*ii*)

**हल :**

(*i*) छायांकित भाग $= \frac{3}{5}$

छायांकित भाग की प्रतिशतता $= \left(\frac{3}{5} \times 100\right)\% = 60\%$

(*ii*) छायांकित भाग $= \frac{3}{8}$

छायांकित भाग की प्रतिशतता $= \left(\frac{3}{8} \times 100\right)\%$

$= \frac{75}{2}\% = 37.5\%$

## प्रतिशत को अनुपात में बदलना (Converting a percentage into a ratio)

**नियम :** प्रतिशत को अनुपात में बदलने के लिए, पहले प्रतिशत को सरलतम भिन्न के रूप में बदलिए और फिर, अनुपात में।

**उदाहरण-7 : निम्नलिखित प्रतिशतता को अनुपात में बदलिए :**

(*i*) **28%** (*ii*) **17.5%** (*iii*) $66\frac{2}{3}\%$

**हल :** (*i*) $28\% = \frac{28}{100} = \frac{7}{25} = 7 : 25$

(*ii*) $17.5\% = \frac{17.5}{100} = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40} = 7 : 40$

(*iii*) $66\frac{2}{3}\% = \frac{200}{3}\% = \frac{200}{3} \times \frac{1}{100} = \frac{2}{3} = 2 : 3$

प्रतिशत को भिन्न रूप के लिखकर सरल करो।

## अनुपात को प्रतिशत में बदलना (Converting a ratio into a percentage)

**नियम :** अनुपात को प्रतिशत में बदलने के लिए, पहले दिए अनुपात की भिन्न के रूप में बदलिए और फिर प्रतिशत में।

**उदाहरण-8 :** निम्नलिखित अनुपातों को प्रतिशत में बदलिए।

***(i)*** **1 : 2**   ***(ii)*** **7 : 6**

हल : (*i*) $1:2 = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\times 100\right)\% = 50\%$

(ii) $7:6 = \frac{7}{6} = \left(\frac{7}{6}\times 100\right)\% = \frac{350}{3}\%$

$= 116\frac{2}{3}\%$

पहले अनुपात को भिन्न में बदलिए

**उदाहरण-9 : रितु के माता जी से कहा, ''इडली बनाने के लिए तुम्हें 5 भाग चावल और 3 भाग उड़द दाल लेना आवश्यक है।'' ऐसे मिश्रण में कितने प्रतिशत चावल और कितने प्रतिशत दाल होगी ?**

हल : अनुपात के रूप में हम लिखेगें, चावल : उड़द = 5 : 3

कुल भाग = 5 + 3 = 8

इसका अर्थ है कि $\frac{5}{8}$ भाग चावल और $\frac{3}{8}$ भाग उड़द दाल

चावल की प्रतिशतता = $\left(\frac{5}{8}\times 100\right)\% = \frac{125}{2}\% = 62.5\%$

उड़द दाल की प्रतिशतता = $\left(\frac{3}{8}\times 100\right)\% = \frac{75}{2}\% = 37.5\%$

## प्रतिशत को दशमलव में बदलना (Converting a percentage into a decimal)

**नियम :** प्रतिशत को दशमलव में बदलने के लिए, पहले प्रतिशत को भिन्न रूप में बदलो (% के चिन्ह को $\frac{1}{100}$ में बदलो) फिर, प्राप्त भिन्न को दशमलव में बदलो।

**उदाहरण-10 : निम्नलिखित प्रतिशत को दशमलव में बदलिए।**

***(i)*** **25%**   ***(ii)*** **78.5%**   ***(iii)*** **150%**

हल : (*i*) $25\% = 25 \times \frac{1}{100} = \frac{25}{100} = 0.25$

(*ii*) $78.5\% = 78.5 \times \frac{1}{100} = \frac{78.5}{100} = 0.785$

(*iii*) $150\% = 150 \times \frac{1}{100} = \frac{15}{10} = 1.5$

**नोट :** उपरोक्त उदाहरण में हम देख सकते है कि प्रतिशत को दशमलव में बदलने के लिए % का चिह्न हटाए और दशमलव बिंदु को संख्या के बायीं ओर से दो अंक आगे लगाया जा सकता है।

## दशमलव संख्या को प्रतिशत में बदलना (Converting a decimal into a percentage)

**नियम :** दशमलव संख्या को प्रतिशत में बदलने के लिए, दशमलव संख्या को 100 से गुणा कीजिए और '%' चिह्न लगाऐं।

**उदाहरण-11 : निम्नलिखित दशमलव संख्याओं को प्रतिशत में बदलिए।**

*(i)* **0.75** *(ii)* **0.025** *(iii)* **0.4**

हल : *(i)* $0.75 = (0.75 \times 100)\% = 75\%$

*(ii)* $0.025 = (0.025 \times 100)\% = 2.5\%$

*(iii)* $0.4 = (0.4 \times 100)\% = 40\%$

**नोट :** उपरोक्त उदाहरण में हम देखते हैं कि दशमलव संख्या को प्रतिशत में बदलने के लिए, दशमलव बिंदु को दायीं ओर दो अंक खिसकाया जाता है और उत्तर में % का चिह्न लगाया जाता है।

## दी हुई राशि का प्रतिशत ज्ञात करना

**नियम :** दी हुई राशि का प्रतिशत ज्ञात करने के लिए, प्रतिशत को भिन्न रूप में लिखो और दी हुई राशि से गुणा करो।

**उदाहरण-12 : मान ज्ञात कीजिए।**

*(i)* **12 का 75%** *(ii)* **64 का $12\frac{1}{2}$ %**

हल : *(i)* 12 का $75\% = 12 \times \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \times 12 = 9$

*(ii)* 64 का $12\frac{1}{2}\% = 64 \times \frac{\frac{25}{2}}{100} = \frac{25}{2} \times \frac{16}{25} = 8$

**उदाहरण-13 : 50 बच्चों के सर्वेक्षण से पता चला कि 20% बच्चों को क्रिकेट पंसद है। ज्ञात कीजिए कि इनमें से कितने बच्चों को क्रिकेट खेलना पसंद है ?**

हल : बच्चों की कुल संख्या = 50

इनमें से 20% बच्चों को क्रिकेट खेलना पसंद है।

∴ क्रिकेट खेलना पंसद करने वाले बच्चों की गिनती

= 50 का 20%

$= 50 \times \frac{20}{100}$

$= 50 \times \frac{1}{5} = 10$

## एक राशि को दूसरी राशि के प्रतिशत रूप में दर्शाना (Expressing one quantity as percentage of another quantity)

**नियम :** एक राशि को दूसरी राशि के प्रतिशत रूप में दर्शाने के लिए,

$$\text{प्रतिशत} = \left(\frac{\text{पहली राशि}}{\text{दूसरी राशि}} \times 100\right)\%$$

नोट– दोनों राशियाँ एक जैसी और समान इकाई वाली होनी चाहिएं।

**उदाहरण-14 : एक आदमी ने फ्रिज़ में रखे 5 आइसक्रीम कप में से 3 कप खा लिये। उसके द्वारा कितने प्रतिशत आइसक्रीम खाई गई ?**

हल : वांछित प्रतिशतता = $\left(\frac{3}{5}\times 100\right)\% = 60\%$

**उदाहरण-15 : दर्शाओ :-**

(*i*) 15 को 45 के प्रतिशत की तरह

(*ii*) 20 पैसों को 5 को प्रतिशत की तरह

हल : (*i*) वांछित प्रतिशतता = $\left(\frac{15}{45}\times 100\right)\% = \frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$

(*ii*) 5 रुपये = 500 पैसे

वांछित प्रतिशतता = $\left(\frac{20}{500}\times 100\right)\% = 4\%$

**वृद्धि या घटत प्रतिशत ज्ञात करना**

**नियम :** प्रतिशत वृद्धि = $\left(\frac{\text{वृद्धि}}{\text{आरंभिक मूल्य}}\times 100\right)\%$

प्रतिशत घटत = $\left(\frac{\text{घटत}}{\text{आरंभिक मूल्य}}\times 100\right)\%$

**उदाहरण-16 : पिछली ऋतु में सेब ₹ 50 प्रतिकिलो ग्राम के मूल्य से बिक रहे थे और इस ऋतु में प्रति किलो ग्राम का मूल्य ₹ 55 है। सेबों के मूल्य में हुई वृद्धि/घटत प्रतिशत में ज्ञात कीजिए।**

हल : स्पष्ट है, मूल्य ₹ 50 से ₹ 55 बढ़ गया है।

आरंभिक मूल्य = ₹ 50

मूल्य में वृद्धि = ₹ 55 – ₹ 50

= ₹ 5

∴ प्रतिशत वृद्धि = $\left(\frac{\text{वृद्धि}}{\text{आरंभिक मूल्य}}\times 100\right)\%$

= $\left(\frac{5}{50}\times 100\right)\%$

इस लिए, सेबों की कीमत में 10% की वृद्धि हुई है।

**उदाहरण-17 : एक साल पहले मूल्य ₹ 60000 वाला एक कंप्यूटर ₹ 40000 में मिल रहा है। प्रतिशत वृद्धि या घटत ज्ञात कीजिए।**

हल : मूल्य ₹ 60000 से घट कर ₹ 40000 हो गया है।

आरंभिक मूल्य = ₹ 60000,

मूल्य में घटत = ₹60000 – ₹40000

= ₹ 20000

$\therefore$ घटत प्रतिशत $= \left(\frac{\text{मूल्य में घटत}}{\text{आरंभिक मूल्य}} \times 100\right)\%$

$$= \left(\frac{20000}{60,000} \times 100\right)\% = \frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$$

इस प्रकार, कीमत $33\frac{1}{3}\%$ घट गई है।

## प्रतिशत का प्रयोग (Use of percentage)

हम अब दैनिक जीवन की समस्याओं को प्रतिशत के आधार पर हल करेगें।

**उदाहरण-18 : 50 विद्यार्थियों की एक कक्षा में 20% विद्यार्थी ऐनक पहनते है। कितने प्रतिशत विद्यार्थी ऐनक नहीं पहनते ?**

हल : क्योंकि 20% ऐनक पहनते हैं, तो

$\therefore$ विद्यार्थियों की प्रतिशतता जो ऐनक नही पहनते

$$= (100 - 20)\% = 80\%$$

इसलिए, विद्यार्थियों की संख्या जो ऐनक नहीं पहनते

$$= 50 \text{ का } 80\% = 50 \times \frac{80}{100} = 40$$

**उदाहरण-19 : एक बारिश वाले दिन कक्षा में 48 विद्यार्थियों मे से 36 स्कूल आए। कितने प्रतिशत विद्यार्थी अनुपस्थित है ?**

हल : कक्षा में कुल विद्यार्थी $= 48$

कुल अनुपस्थित विद्यार्थी $= 48 - 36 = 12$

$\therefore$ अनुपस्थित विद्यार्थियों की प्रतिशत $= \left(\frac{12}{48} \times 100\right)\% = 25\%$

## प्रश्नावली - 8.2

1. निम्नलिखित भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए।

   (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{49}{50}$ (iii) $\frac{5}{4}$ (iv) $1\frac{3}{8}$

2. निम्नलिखित प्रतिशत को सरलतम भिन्न में बदलिए।

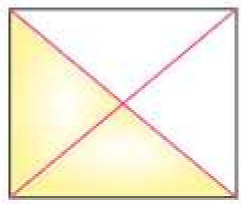
   (i) 25% (ii) 150% (iii) $7\frac{1}{2}\%$

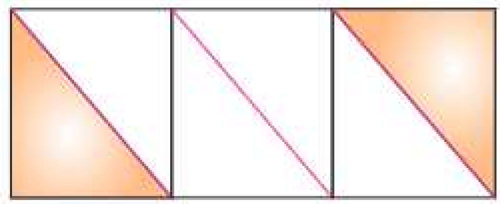
3. (i) अनीता ने 400 अंक में से 324 अंक प्राप्त किए। अनीता ने कितने प्रतिशत अंक प्राप्त किए ?

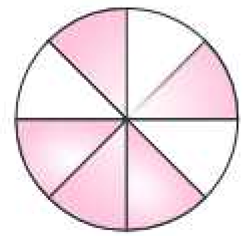
   (ii) 32 विद्यार्थियों की कक्षा में से 8 अनुपस्थित हैं। कितने प्रतिशत विद्यार्थी अनुपस्थित है ?

   (iii) 120 मतदाताओं में से 90 ने मतदान में भाग लिया। कितने प्रतिशत मतदाताओं ने मतदान में भाग नहीं लिया?

**4.** निम्नलिखित आकृतियों में छायांकित भाग पूरी आकृति का कितना प्रतिशत हैं ?


(*i*)


(*ii*)


(*iii*)

**5.** दिए हुए प्रतिशत को दशमलव भिन्न में बदलिए और उत्तर को सरल रुप में व्यक्त कीजिए।

(*i*) 14% (*ii*) $1\frac{3}{4}\%$ (*iii*) $33\frac{1}{3}\%$

**6.** निम्नलिखित अनुपातों को प्रतिशत में लिखिए।

(*i*) 5 : 4 (*ii*) 1 : 1 (*iii*) 2 : 3 (*iv*) 9 : 16

**7.** चाक पाउडर में कैल्शियम, कार्बन तथा ऑक्सीजन का अनुपात 12 : 3 : 10 है। इसमें कार्बन की प्रतिशत मात्रा ज्ञात कीजिए।

**8.** निम्नलिखित अनुपातों को प्रतिशत में बदलिए।

(*i*) 3 : 1 (*ii*) 1 : 4 (*iii*) 4 : 5 : 6

**9.** निम्नलिखित प्रतिशत को दशमलव भिन्न में बदलिए।

(*i*) 28% (*ii*) 3% (*iii*) $37\frac{1}{2}\%$

**10.** दिए गए दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदलिए।

(*i*) 0.65 (*ii*) 0.9

(*iii*) 2.1

**11.** (*i*) किसी कक्षा के विद्यार्थियों में से 65% के पास साइकिलें है। कितने प्रतिशत विद्यार्थियों के पास साइकिलें नहीं है ?

(*ii*) हमारे पास सेब, संतरों और आमों से भरी एक टोकरी है। यदि उसमें 50% सेब, 30% संतरे है तब आमों का प्रतिशत कितना है ?

**12.** एक शहर की जनसंख्या 25,000 सें 24,500 रह गई। कितने प्रतिशत जनसंख्या घट गई ?

**13.** अरुण ने एक प्लॉट 3,50,000 रूपये में खरीदा। अगले साल प्लॉट का मूल्य 3,70,000 रूपये हो गया ? कितने प्रतिशत मूल्य में वृद्धि हुई ?

**14.** ज्ञात कीजिए :

(*i*) 250 का 15% (*ii*) 120 का 25%

(*iii*) 12.5 का 4% (*iv*) ₹ 250 का 12%

**15.** **बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) अनुपात 2 : 3 को प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।

(*a*) 40% (*b*) 60% (*c*) $66\frac{2}{3}\%$ (*d*) $33\frac{1}{3}\%$

(*ii*) यदि $x$ का 30% = 72 हो तो $x$ का मान क्या होगा ?

(*a*) 120 (*b*) 240 (*c*) 360 (*d*) 480

(*iii*) 0.025 को प्रतिशत में बदलो।

(*a*) 250% (*b*) 25% (*c*) 4% (*d*) 2.5%

(*iv*) एक कक्षा में 45% विद्यार्थी, लड़कियाँ है। यदि कक्षा में 22 लड़के हों तो कक्षा में कुल कितने विद्यार्थी है?

(*a*) 30 (*b*) 36 (*c*) 40 (*d*) 44

(*v*) $\frac{1}{7}$ का कितने प्रतिशत $\frac{2}{35}$ होगा ?

(*a*) 20% (*b*) 25% (*c*) 30% (*d*) 40%

## लाभ तथा हानि (Profit and Loss)

एक दुकानदार अपनी दुकान की सभी वस्तुएं थोक व्यापारी से खरीदता है और ग्राहक को बेचता है। यदि वह अपनी वस्तुएं खरीदे मूल्य से अधिक मूल्य में बेचता है तो उसे लाभ होता है और यदि किसी कारण से वह अपनी वस्तुओं को कम मूल्य में बेचता है तो उसे हानि होती है।

**क्रय मूल्य (C.P.) →** कोई वस्तु जिस किसी मूल्य पर खरीदी जाती है उसे क्रय मूल्य कहा जाता है।

**विक्रय मूल्य (S.P.) →** कोई वस्तु जिस मूल्य पर बेची जाती है उसे विक्रय मूल्य कहा जाता है।

**लाभ →** यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य उसके क्रय मूल्य से अधिक हो तो दुकानदार को लाभ होता है।

लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

यदि विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य हो तो लाभ होता है।

**हानि →** यदि किसी वस्तु का क्रय मूल्य उसके विक्रय मूल्य से अधिक हो तो दुकानदार को हानि होती है।

हानि = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य

यदि, विक्रय मूल्य < क्रय मूल्य हो तो हानि होती है।

यदि, S.P = C.P हो तो न ही लाभ होता है और ना ही हानि।

**उदाहरण के लिए :**

यदि एक दुकानदार ने ₹ 11,000 में खरीदा और ₹ 12,100 में बेच दिया। तो उसे लाभ होगा।

लाभ = ₹ 12100 – ₹ 11000 = ₹ 1100

और यदि दुकानदार उसे 10,000 में बेचता तो उसे हानि होती है।

हानि = ₹11000 – ₹10000 = ₹1000

## लाभ या हानि प्रतिशत (Profit or loss percentage)

अक्सर व्यापार में, हम लाभ या हानि की बात न करने की बजाए लाभ या हानि प्रतिशत की बात करते है। लाभ या हानि प्रतिशत सदैव ही क्रय मूल्य पर परिकलित किया जाता है।

लाभ या हानि प्रतिशत हमेशा क्रय मूल्य पर होता है।

$$\text{लाभ प्रतिशत} = \left[\frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\right]\%$$

$$\text{हानि प्रतिशत} = \left[\frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\right]\%$$

**उदाहरण-1 : एक दुकानदार ने घड़ी ₹ 580 में खरीदी और ₹ 667 में बेच दी। लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।**

हल : घड़ी का क्रय मूल्य (C.P.) = ₹ 580

घड़ी का विक्रय मूल्य (S.P.) = ₹ 667

∴ लाभ = S.P. – C.P. = ₹ 667 – ₹ 580 = ₹ 87

$$\text{लाभ \%} = \left[\frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मल्य}} \times 100\right]\% = \left[\frac{87}{580} \times 100\right]\% = 15\%$$

**उदाहरण-2 : साक्षी ने एक सोने की अँगूठी ₹ 5500 मे खरीदी और दो साल बाद, उसने उसे ₹ 4,000 में बेच दिया। उसका लाभ या हानि ज्ञात कीजिए। साथ ही, लाभ या हानि प्रतिशत भी ज्ञात कीजिए।**

हल : अंगूँठी का क्रय मूल्य (C.P.) = ₹ 5500

अंगूँठी का विक्रय मूल्य (S.P.) = ₹ 4000

अगूँठी का विक्रय मूल्य उसके विक्रय मूल्य से अधिक है इसलिए साक्षी को हानि होगी।

हानि = C.P. – S.P. = ₹ 5500 – ₹ 4000

= ₹1,500

$$\text{हानि \%} = \left[\frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मल्य}} \times 100\right]\%$$

$$= \frac{1{,}500}{5{,}500} \times 100 = 27.27\%$$

**उदाहरण-3 : एक दुकानदार ने एक वस्तु ₹ 150 में खरीदी और 12% लाभ पर बेच दी। वस्तु का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।**

हल : क्रय मूल्य = ₹150

$$\text{लाभ} = \text{क्रय मूल्य का } 12\% = 150 \times \frac{12}{100}$$

$$= ₹\left[\frac{12}{100} \times 150\right] = ₹18$$

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ = ₹150 + ₹18

= ₹168

> **नोट :** हम विक्रय मूल्य को निम्नलिखित सूत्र की सहायता से भी निम्नलिखित ज्ञात कर सकते हैं :
>
> $$\text{विक्रय मूल्य (S.P.)} = \text{क्रय मूल्य (C.P.)} \times \left[\frac{100 + \text{लाभ \%}}{100}\right]$$

**उदाहरण-4 : एक वस्तु का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए जिसे ₹1240 का खरीद कर 7% हानि पर बेच दिया।**

हल : क्रय मूल्य = ₹12400

$$\text{हानि} = \text{क्रय मूल्य का } 7\% = ₹12400 \times \frac{7}{100} = ₹868$$

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य – हानि

∴ = ₹12400 ₹868 = ₹11532.

> **नोट :** हम विक्रय मूल्य को निम्नलिखित सूत्र की सहायता से भी ज्ञात कर सकते हैं।
>
> $$\text{विक्रय मूल्य (S.P.)} = \text{क्रय मूल्य (C.P.)} \times \left[\frac{100 - \text{हानि \%}}{100}\right]$$

**उदाहरण-5 : एक वस्तु ₹ 475 में खरीद कर राहुल को 5% हानि होती है। वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।**

**हल :** मान लीजिए, वस्तु का क्रय मूल्य= ₹100

हानि = ₹100 का 5%

$= 100 \times \frac{5}{100}$

= ₹5

वस्तु का विक्रय मूल्य = ₹(100 – 5)

= ₹95

यदि वस्तु का विक्रय मूल्य 95 है तो क्रय मूल्य = ₹100

यदि वस्तु का विक्रय मूल्य 1 है तो क्रय मूल्य = ₹ $\frac{100}{95}$

यदि वस्तु का विक्रय मूल्य 475 हैं तो क्रय मूल्य = ₹ $\left[\frac{100}{95} \times 475\right]$

= ₹500

नोट → हम क्रय मूल्य को निम्नलिखित सूत्र की सहायता से भी ज्ञात कर सकते है।

$$\text{क्रय मूल्य (C.P)} = \text{विक्रय मूल्य (S.P)} \times \left[\frac{100}{100 - \text{हानि\%}}\right]$$

## साधारण ब्याज (Simple Interest)

जब आपको किसी बैंक या व्यक्ति से धन उधार लेने पड़ते है तो आपको वह धन चुकाने के लिए कुछ अधिक राशि देनी पड़ती है। उस अधिक राशि को साधारण ब्याज कहा जाता है।

ब्याज की राशि नीचे दिए कथनों पर निर्भर होती है।

- धन जो आप उधार लेते हो, मूलधन (P) कहलाता है।
- प्रत्येक वर्ष की ब्याज की दर (R) ( प्रतिशत में)
- समय, (T) ( वर्षों में) के लिए धन उधार लिया हो।

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100} \quad \text{भाव} \quad S.I. = \frac{P \times R \times T}{100}$$

नोट → P, R, T और I पर ध्यान दीजिए कि इन चार राशियों में से कोई भी तीन ज्ञात होने पर चौथी ज्ञात की जा सकती है।

- **मिश्रधन :** एक निश्चित समय के बाद, आप को मूलधन और ब्याज दोनों को मिलाकर पूरा धन वापिस करना होता है जिसे मिश्रधन कहते हैं।

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

यदि P मूलधन हो, I ब्याज हो तो मिश्रधन A हो तो

$$A = P + I$$

**उदाहरण-1 : ₹ 1500 पर 6% की दर से 3 वर्ष का ब्याज ज्ञात कीजिए।**

हल : मूलधन (P) = ₹ 1500 दर (R) = 6% प्रतिवर्ष और समय (T) = 3 साल

$$\therefore \quad \text{साधारण ब्याज (I)} = \frac{P \times R \times T}{100} = ₹\frac{1500 \times 6 \times 3}{100}$$

$$= ₹270$$

$$\text{मिश्रधन (A)} = P + I = ₹1500 + ₹270 = ₹1770$$

**उदाहरण-2 : किसी निश्चित राशि पर 5% (सलाना) वार्षिक की दर से 3 वर्ष का ब्याज ₹450 दिया जाता है। राशि ज्ञात कीजिए।**

हल : I = ₹ 450, R = 5% प्रति वर्ष T = 3 साल

मान लीजिए, मूलधन = P

$$\text{ब्याज (I)} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

$$450 = \frac{P \times 5 \times 3}{100} \Rightarrow P = ₹\, 450 \times \frac{100}{5 \times 3}$$

$$P = ₹\, 3000$$

इसलिए, वांछित मूलधन (P) = ₹ 3000

**उदाहरण-3 : ज्योति 6000 रुपये का ऋण लेती है और 3 वर्ष बाद, ₹7080 रुपये वापिस दे देती है। उसकी ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।**

हल : साधारण ब्याज (S.I) ₹ (7,080 – 6,000) = ₹ 1,080

S.I. = ₹ 1,080, T = 3 वर्ष P = ₹ 6000

हमें R ज्ञात करना है

सूत्र में मूल्य भरने पर,

$$S.I. = \frac{P \times R \times T}{100}$$

इस लिए

$$R = \frac{SI \times 100}{P \times T}$$

सूत्र में मूल्य भरने पर,

$$R = \frac{1{,}080 \times 100}{6{,}000 \times 3} = 6$$

ज्योति ने 6% ब्याज की दर प्रत्येक वर्ष दी।

**उदाहरण-4 : तसवीर ने 7000 रुपये एक दुकानदार को 7% वार्षिक की दर से ब्याज पर दिए। उसने ₹ 8470 की राशि वापिस ली। उसने वह राशि कितने समय के लिए उधार दी ?**

हल :

$$\text{ब्याज} = (\text{मिश्रधन} - \text{मूलधन})$$

$$= ₹(8{,}470 - 7{,}000)$$

$$= ₹(1{,}470)$$

मूलधन (P) = ₹ 7,000, ब्याज (I) = ₹ 1,470 और दर (R) = 7% हमने समय (T) पता करना है।
साधारण ब्याज के सूत्र अनुसार

$$S.I. = \frac{P \times R \times T}{100}$$

इस लिए

$$T = \frac{S.I \times 100}{P \times R}$$

सूत्र में मूल्य भरने पर

$$T = \frac{1,4\,70 \times 100}{7,000 \times 7} = 3$$

इसलिए तनवीर ने 3 साल के लिए राशि उधार दी।

## प्रश्नावली - 8.3

1. लाभ या हानि ज्ञात कीजिए। लाभ % या हानि % भी ज्ञात कीजिए।
   (*i*) बगीचे में काम करने वाले औज़ार ₹250 रुपये में खरीदे और ₹325 रुपये में बेचे।
   (*ii*) एक फ्रिज़ ₹1200 रुपये मे खरीदा और ₹13,500 रुपये मे बेच दिया।
   (*iii*) एक अलमारी ₹2500 रुपये मे खरीदी और ₹3000 रुपये मे बेच दी।
   (*iv*) एक कमीज़ ₹250 रुपये में खरीदी और ₹150 रुपये में बेच दी।
2. एक दुकानदार ने एक वस्तु ₹735 रुपये में खरीदी और ₹850 रुपये मे बेच दी। लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।
3. कीर्ति ने एक साड़ी ₹2500 रुपये में खरीदी और ₹2300 रुपये में बेच दी। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
4. एक वस्तु ₹252 रुपये में बेच कर 5% लाभ हुआ। क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
5. अमृत ने एक किताब ₹275 रुपये में खरीदी और उसे 15% हानि पर बेच दिया। उसने वह कितने की बेची ?
6. जुही ने एक वांशिग मशीन ₹13500 में बेची। उसे इसमें 20% हानि हुई। ज्ञात कीजिए कि उसने इसे कितने मूल्य में खरीदा होगा।
7. अनीता ने ₹500 का ऋण 15% दर पर लिया। उसको 1 वर्ष बाद कितनी राशि देनी पड़ी ?
8. 3 वर्ष बाद, मिश्रधन ज्ञात कीजिए।
   (*i*) मूलधन = ₹1200 रुपये पर 12% वार्षिक दर हो
   (*ii*) मूलधन = ₹7500 रुपये पर 5% वार्षिक दर हो
9. समय ज्ञात कीजिए जबकि ₹2500 रुपये पर साधारण ब्याज 6% वार्षिक दर से ₹450 है।
10. ब्याज की दर ज्ञात कीजिए जबकि ₹1560 पर 3 वर्ष का साधारण ब्याज ₹585 है।
11. यदि नकुल एक वर्ष बाद 9% दर से प्रत्येक वर्ष ₹45 रुपये ब्याज देता है तो उस द्वारा कितनी राशि उधार ली गई?
12. यदि ₹14000, 4% वार्षिक दर से निवेश किए गये हों तो इसका मिश्रधन कितने समय में ₹16240 होगा ?
13. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-
   (*i*) यदि एक व्यक्ति एक वस्तु ₹80 रुपये मे खरीद कर ₹100 रुपये मे बेच देता है तो उसका लाभ क्या होगा?
   (*a*) 20% (*b*) 25%
   (*c*) 40% (*d*) 125%

(*ii*) यदि एक व्यक्ति एक वस्तु ₹120 रुपये को खरीदता है और ₹100 बेच देता है तो उसका हानि प्रतिशत क्या होगा ?

(*a*) 10% (*b*) 20% (*c*) 25%(*d*) $16\frac{2}{3}\%$

(*iii*) एक व्यक्ति की मासिक आय ₹24000 रुपये है। उसे अपनी आमदन पर 25% की वृद्धि होती है तो उसकी नई मासिक आय ज्ञात कीजिए।

(*a*) ₹2,500 (*b*) ₹28,000 (*c*) 30,000 (*d*) 36,000

(*iv*) एक वस्तु ₹100 रुपये को बेचने पर रेनु को ₹20 रुपये का लाभ होता है। उसका लाभ % क्या है ?

(*a*) 25% (*b*) 20% (*c*) 15% (*d*) 40%

(*v*) ₹600 रुपये पर 8% वार्षिक दर से 1 वर्ष का कितना ब्याज होगा ?

(*a*) ₹600 (*b*) ₹480 (*c*) ₹400 (*d*) ₹240

(*vi*) यदि रोहिणी ने 5% वार्षिक दर पर ₹4800 रुपये उधार लेने हो तो उसे 2 वर्ष बाद कितना धन वापिस करना होगा ?

(*a*) ₹480 (*b*) ₹5040 (*c*) ₹5280 (*d*) ₹5600

## हमने क्या चर्चा की ?

1. हमें अपने दैनिक जीवन में प्राय: ही दो राशियों की तुलना करनी पड़ती है। यह राशियाँ ऊँचाई, भार, वेतन प्राप्त अंक हो सकते हैं।
2. दो अनुपातों की तुलना, उन्हें समान हर वाली भिन्नों में बदल कर की जा सकती है। यदि दोनों समान हरों वाली भिन्नें समान हो तो हम कहते है कि दोनों अनुपात तुल्य अनुपात हैं।
3. यदि दो अनुपात तुल्य हैं तब उनके चारों पद एक समानुपात बनाते है। उदाहरण के लिए दो अनुपात 8 : 2 तथा 16 : 4 तुल्य है, अत: 8, 2, 16 तथा 4 समानुपात में है।
4. एक समानुपात दो अनुपातों का तुल्य है।
5. समानुपात में, मध्य पदों का गुणनफल बाह्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है।
6. प्रतिशत का अर्थ है 'प्रत्येक सौ पर' % चिन्ह प्रतिशत को दर्शाता है $\frac{1}{100}$
7. प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिए % को $\frac{1}{100}$ में बदलते हैं।
8. भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिए, भिन्न को 100 से गुणा करके % लगाया जाता है।
9. प्रतिशत को दशमलव में बदलने के लिए, सब से पहले प्रतिशत को भिन्न में लिखो और % चिन्ह को $\frac{1}{100}$ में बदलो और फिर, भिन्न को दशमलव में बदलो।
10. दशमलव को 100 से गुणा करके % का चिन्ह लगाओ।
11. प्रतिशत को अनुपात में बदलने के लिए, सब से पहले प्रतिशत को भिन्न में लिखकर सरल रूप में बदलें और फिर अनुपात रूप में लिखें।
12. अनुपात को प्रतिशत में बदलने के लिए, सबसे पहले दिये हुए अनुपात को भिन्न में बदलकर प्रतिशत में लिखो।
13. किसी राशि का प्रतिशत ज्ञात करने के लिए प्रतिशत को भिन्न में बदलें और दी हुई राशि से गुणा करो।
14. राशियों में प्रतिशत वृद्धि/घटत = $\left[\frac{\text{राशियों में बदलाव}}{\text{आरंभिक राशि}} \times 100\right]\%$

15. जिस मूल्य पर कोई वस्तु खरीदी जाती है उसे क्रय मूल्य (C.P.) कहते है।

16. जिस मूल्य पर कोई वस्तु बेची जाती है उसे विक्रय मूल्य (S.P) कहते है।

17. यदि विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से अधिक हो तो लाभ होता है और लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

18. यदि क्रय मूल्य, विक्रय मूल्य से अधिक हो तो हानि होती है।
हानि = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य

19. लाभ या हानि, % क्रय मूल्य पर परिकलित होते है।

$$\text{लाभ } \% = \left[\frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मल्य}} \times 100\right]\%$$

$$\text{लाभ } \% = \left[\frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मल्य}} \times 100\right]\%$$

20. साधारण ब्याज $(S.I.) = \dfrac{P \times R \times T}{100}$

जहाँ P = मूलधन,
R = दर (प्रतिशत में)
T = समय (वर्ष में)

21. मिश्रधन (A) = मूलधन (P) + ब्याज (I)

22.
- $P = \dfrac{S.I. \times 100}{R \times T}$
- $R = \dfrac{S.I. \times 100}{P \times T}$
- $T = \dfrac{S.I. \times 100}{P \times R}$

## सीखने के परिणाम

**अध्याय के पूर्ण होने पर विद्यार्थी :**

1. दैनिक जीवन में राशियों की तुलना करने के योग्य हैं।
2. अनुपात को भिन्न के रुप में बदल कर तुलना करने के योग्य हैं।
3. तुल्य अनुपात को समझने के योग्य हैं।
4. समानुपात दो तुल्य अनुपात की समानता समझने के योग्य हैं।
5. प्रतिशत को दी हुई समस्याओं में समझने के योग्य हैं।
6. प्रतिशत को भिन्न में, भिन्न को प्रतिशत में, प्रतिशत को दशमलव में, दशमलव को प्रतिशत में, प्रतिशत को अनुपात में और अनुपात को प्रतिशत में बदलने के योग्य हैं।
7. लाभ, हानि, लाभ और हानि प्रतिशत की समस्याओं को समझने के योग्य हैं।
8. एक विशेष समय के लिए साधारण ब्याज, मूलधन, ब्याज की दर और समय को समझने के योग्य हैं।
9. साधारण ब्याज और मिश्रधन के अंतर को समझने के योग्य हैं।

# उत्तरमाला

## प्रश्नावली 8.1

1. (*i*) 10 : 1 (*ii*) 500 : 7
   (*iii*) 1 : 1 (*iv*) 20 : 1
2. नहीं
3. 840
4. 180 km
5. 12

## प्रश्नावली 8.2

1. (*i*) 12.5% (*ii*) 98%
   (*iii*) 125% (*iv*) $137\frac{1}{2}$%
2. (*i*) $\frac{1}{4}$ (*ii*) $\frac{3}{2}$ (*iii*) $\frac{3}{40}$
3. (*i*) 81% (*ii*) 25% (*iii*) 25%
4. (*i*) $\frac{1}{2}$ ; 50% (*ii*) $\frac{1}{3}$ ; $33\frac{1}{3}$% (*iii*) $\frac{5}{8}$ ; 62.5%
5. (*i*) 7 : 50 (*ii*) 7 : 400
   (*iii*) 1 : 3
6. (*i*) 125% (*ii*) 100%
   (*iii*) $66\frac{2}{3}$% (*iv*) $56\frac{1}{4}$%
7. 12%
8. (*i*) 75%, 25% (*ii*) 20%, 80% (*iii*) $26\frac{2}{3}$% , $33\frac{1}{3}$ , 40%
9. (*i*) 0.28 (*ii*) 0.03 (*iii*) 0.375
10. (*i*) 65% (*ii*) 90% (*iii*) 210%
11. (*i*) 35% (*ii*) 20%
12. 2%
13. $5\frac{5}{7}$%
14. (*i*) 37.5 (*ii*) 30 *l*
    (*iii*) 0.5 (*iv*) ₹300
15. (*i*) (*c*) (*ii*) (*b*) (*iii*) (*d*)
    (*iv*) (*c*) (*v*) (*d*)

## प्रश्नावली 8.3

1. (*i*) हानि = ₹ 75 ; लाभ % = 30 (*ii*) लाभ = ₹ 1500 ; लाभ % = 12.5
(*iii*) लाभ = ₹ 500 ; लाभ % = 20 (*iv*) हानि = ₹ 100 ; हानि % = 40
2. लाभ = ₹ 115
3. ₹ 200 ; 8%
4. ₹ 240
5. ₹ 233.75
6. ₹ 16875
7. ₹ 750
8. (*i*) ₹1632 (*ii*) ₹ 8625
9. 3 वर्ष
10. 12.5% *p.a.*
11. ₹ 500
12. 4 वर्ष
13. (*i*) (*b*) (*ii*) (*d*)
(*iii*) (*c*) (*iv*) (*a*)
(*v*) (*b*) (*vi*) (*c*)

अध्याय 9

C2G6W8

# परिमेय संख्याएँ

**उद्देश्य :-**

**इस अध्याय में आप सीखेंगे :-**

1. परिमेय संख्याओं को परिभाषित करना तथा उनको मानक रूप में बदलना।
2. तुल्य परिमेय संख्याओं के संकल्प बारे।
3. परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाना।
4. दी गई परिमेय संख्याओं के बीच में अन्य परिमेय संख्याएँ पता करना।
5. परिमेय संख्याओं की तुलना करना और उन पर मौलिक गणितीय क्रियाएं करना।
6. दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने के लिए परिमेय संख्याओं का प्रयोग करना।

## हमारे देश का मान (Our Nation's Pride)

**आर्यभट्ट :** आर्यभट्ट, एक महान गणित शास्त्री थे। उनका जन्म 476 (सा. यु) में पटना, भारत के कुसमपुर (पाटलीपुत्र) में हुआ तथा देहांत 550 (सा. यु) में हुआ। उनके शोध-कार्यों में गणित के बहुत सारे महत्वपूर्ण संकल्प शामिल हैं, जैसे कि स्थानीय मूल्य एवं संख्या-प्रणाली आदि। महान गणितशास्त्री लैपलस (1749-1829) के अनुसार भारत ने सारी दुनिया को ऐसी संख्या प्रणाली प्रदान की है जिसमें केवल दस चिन्हों के द्वारा सारी संख्याओं को दर्शाया जा सकता है। इन संकल्पों की महत्ता उस समय और अधिक बढ़ जाती है जब हम यह महसूस करते हैं कि अपोलोनीयस और आर्किमीडीज़ जैसे विश्व प्रसिद्ध गणित शास्त्री भी ऐसी आवश्यक प्रणाली की खोज न कर सके।

## भूमिका

संख्याओं की खोज बहुत लम्बे समय के पश्चात् हुई। इससे पूर्व मनुष्य संख्याओं को लिख नहीं सकता था, केवल हाथों की उंगलियों या वस्तुओं की गिनती करके ही उनको दर्शा सकता था।

**प्राकृतिक संख्याएं (Natural numbers) :** जिन संख्याओं का प्रयोग गिनती करने के लिए किया जाता है, उनको प्राकृतिक संख्याएं कहते हैं।

उदाहरण स्वरूप 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ......... प्राकृतिक संख्याएं हैं।

**पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers) :** सारी प्राकृतिक संख्याओं के साथ '0' को शामिल करने पर यह पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं।

उदाहरण के लिए 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ......... पूर्ण संख्याएँ हैं।

**पूर्णांक (Integers) :** सारी पूर्ण संख्याएँ और प्राकृतिक संख्याओं के ऋणात्मक को पूर्णांक कहते हैं।

उदाहरण के लिए ............–6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ............ पूर्णांक हैं। इनमें '0' एसा पूर्णांक है जो न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक।

**भिन्नें (Fraction) :** $\frac{a}{b}$ के रूप में लिखी संख्या भिन्न कहलाती है, जहां $a$ को 'अंश' कहा जाता है और $b \neq 0$ को 'हर' कहा जाता है।

**परिमेय संख्याओं की आवश्यकता :** समय लम्बाई तथा दूरी को एक इकाई से दूसरी इकाई में बदलने के लिए भिन्नों का प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के रूप में अगर हम 20 मिनटों को घंटों में बदलना है तो यह $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ घंटे होगा। आप समुंदर तल 500 मी. ऊंचाई को $\frac{1}{2}$ km कि. मी. के रूप में दर्शा सकते हो। क्या यह ऊंचाई समुंदर तल से नीचे दर्शा सकते हैं ? क्या हम समुंदर तल से नीचे $\frac{1}{2}$ km को $\frac{-1}{2}$ km दर्शा सकते हैं ? हम देखते हैं कि $\frac{-1}{2}$ न तो पूर्णांक है और न ही भिन्न। हमें अपने संख्या प्रणाली को इस प्रकार की संख्याओं को शामिल करने के लिए बढ़ाने की आवश्यकता है।

## परिमेय संख्याएँ क्या हैं?

शब्द परिमेय (rational) की उत्पत्ति पद 'अनुपात' (ratio) से हुई है और

5 : 6 को $\frac{5}{6}$ भी लिखा जाता है, जहाँ '5' 'अंश' और '6' 'हर' है।

$\frac{a}{b}$ के रूप में दर्शाती संख्या जहाँ $a$ और $b$ पूर्णांक है, और $b \neq 0$ है, को परिमेय संख्या कहते है उदाहरण के रूप में $\frac{5}{6}, \frac{-7}{8}$ और $\frac{21}{-9}$ परिमेय संख्याएँ हैं।

**तुल्य परिमेय संख्याएं (Equivalent Rational Numbers) :** अगर एक परिमेय संख्या के अंश और हर को एक ही शून्येतर (non zero) पूर्णांक से गुणा करने पर हमें दी हुई परिमेय संख्या के तुल्य एक अन्य परिमेय संख्या प्राप्त होती है।

**उदाहरण-1 : निम्नलिखित में प्रत्येक की दो तुल्य परिमेय संख्याएँ लिखें।**

(*i*) $\frac{-3}{5}$ (*ii*) $\frac{-8}{40}$

**हल :** (*i*)

$$\frac{-3}{5} = \frac{-3}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{-6}{10}$$

$$\frac{-3}{5} = \frac{-3}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{-9}{15}$$

$\therefore$ $\frac{-3}{5}$ की तुल्य संख्याएँ $\frac{-6}{10}$ और $\frac{-9}{15}$ हैं।

(*ii*)

$$\frac{-8}{40} = \frac{-8 \div 4}{40 \div 4} = \frac{-2}{10}$$

$$\frac{-8}{40} = \frac{-8 \div (-8)}{40 \div (-8)} = \frac{1}{-5}$$

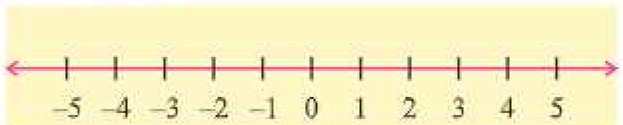
$\therefore \quad \frac{-8}{40}$ की तुल्य परिमेय संख्याएँ $\frac{-2}{10}$ तथा $\frac{1}{-5}$ हैं

इस प्रकार हम जितनी भी तुल्य परिमेय संख्याएँ चाहते हैं, लिख सकते हैं।

**धनात्मक परिमेय संख्याएँ (Positive Rational Numbers) :** एक परिमेय संख्या को 'धनात्मक' कहते हैं। अगर अंश और हर दोनों धनात्मक या ऋणात्मक हों, उदाहरण के रूप में : $\frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{-13}{-18}, \frac{-25}{-9}$ धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

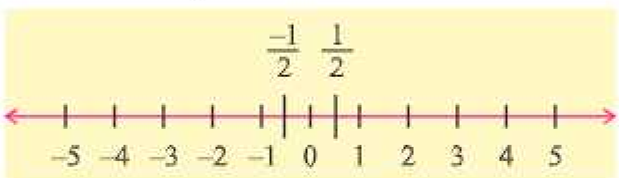
**ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ (Negative Rational Numbers) :** एक परिमेय संख्या को 'ऋणात्मक' कहते हैं, अगर अंश या हर ऋणात्मक हों, उदाहरण के रूप में : $\frac{-6}{7}, \frac{5}{-9}, \frac{-15}{8}, \frac{8}{-17}$ ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

**एक संख्या रेखा पर परिमेय संख्याएँ :** हम यह जानते हैं कि एक संख्या रेखा पर पूर्णांक को किस प्रकार दर्शाया जाता है।




आइए अब परिमेय संख्या $\frac{1}{2}$ और $\frac{-1}{2}$ को संख्या रेखा पर दर्शाएं। 0 और 1 के बीच की आधी दूरी को, जिसको $\frac{1}{2}$ के रूप में दर्शाया जाएगा।

0 और –1 के बीच की दूरी, जिसको $\frac{-1}{2}$ के रूप में दर्शाया जाएगा।




**मानक रूप में परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers in standard form) :** एक परिमेय संख्या मानक रूप में कही जाती है, अगर उसका हर धनात्मक हो और उसके अंश और हर का सार्व गुणनखंड (HCF) 1 हो

उदाहरण के रूप में : $\frac{5}{7}, \frac{-4}{9}, \frac{2}{9}$

**उदाहरण-2 : निम्नलिखित को मानक रूप में बदलो।**

(*i*) $\frac{-21}{48}$ (*ii*) $\frac{42}{-28}$

**हल :** (*i*) $\frac{-21}{48}$

$\because$ क्योंकि 21 और 48 का म.स.व 3 है।

इस लिए अंश और हर दोनों को 3 से भाग देने पर प्राप्त होता है।

$$\therefore \quad \frac{-21}{48} = \frac{-21 \div 3}{48 \div 3} = \frac{-7}{16}$$

$\frac{-21}{48}$ का मानक रूप $\frac{-7}{16}$ है।

(*ii*) $\frac{42}{-28}$

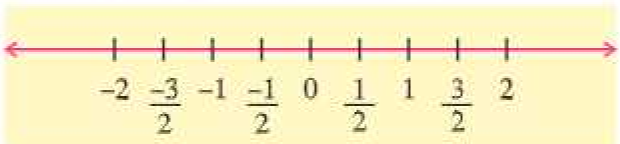
∵ क्योंकि 42 और 28 का म.स.व 14 है।

∴ इसलिए अंश और हर दोनों को (–14) से भाग देने पर प्राप्त होता है

$$\frac{42}{-28} = \frac{42 \div (-14)}{-28 \div (-14)} = \frac{-3}{2}$$

∴ इसलिए $\frac{42}{-28}$ का मानक रूप $\frac{-3}{2}$ है।

## परिमेय संख्याओं की तुलना : (Comparing rational numbers)




संख्या रेखा से स्पष्ट है :-

1. एक धनात्मक परिमेय संख्या हमेशा 0 से बड़ी होती है।
2. एक ऋणात्मक परिमेय संख्या हमेशा 0 से छोटी होती है।
3. अगर दो परिमेय संख्याएं धनात्मक या ऋणात्मक हों तो उनकी तुलना निम्नानुसार की जाती है।
   (*i*) प्रत्येक परिमेय संख्या के हर को धनात्मक रूप में दर्शाओ।
   (*ii*) हर को बराबर बनाने के लिए उनके हर का ल.स.व (L.C.M) लो।
   (*iii*) परिमेय संख्या, जिसका अंश बड़ा हो, वह बड़ी है।

**उदाहरण-3 : नीचे दी गई प्रत्येक युग्म में से बड़ी परिमेय संख्या ज्ञात करें।**

(*i*) $\frac{4}{9}$ **और** $\frac{3}{6}$ (*ii*) $\frac{-5}{7}$ **और** $\frac{-4}{9}$

**हल :** (*i*) दी हुई परिमेय संख्याएँ $\frac{4}{9}$ और $\frac{3}{6}$ हैं

∵ क्योंकि 9 और 6 का ल.स.व 18 हैं

∴ $$\frac{4}{9} = \frac{4 \times 2}{9 \times 2} = \frac{8}{18}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{3 \times 3}{6 \times 3} = \frac{9}{18}$$

∵ क्योंकि दूसरी परिमेय संख्या का अंश पहली परिमेय संख्या के अंश से अधिक है।

जैसे कि $9 > 8$

$$\Rightarrow \frac{9}{18} > \frac{8}{18}$$

इसलिए $\frac{3}{6} > \frac{4}{9}$

(*ii*) दी गई परिमेय संख्याएँ $\frac{-5}{7}$ और $\frac{-4}{9}$ हैं।

$\because$ क्योंकि 7 और 9 का ल.स. व 63 हैं।

$$\therefore \quad \frac{-5}{7} = \frac{-5}{7} \times \frac{9}{9} = \frac{-45}{63}$$

$$\frac{-4}{9} = \frac{-4}{9} \times \frac{7}{7} = \frac{-28}{63}$$

$$\because \quad -28 > -45$$

$$\frac{-28}{63} > \frac{-45}{63}$$

इसलिए, $$\frac{-4}{9} > \frac{-5}{7}$$

## दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएँ (Rational numbers between two rational numbers)

–4 और 3 के बीच पूर्णांक –3, –2. –1, 0. 1, 2 हैं। इस प्रकार –4 और 3 के बीच ठीक 6 पूर्णांक हैं जो कि सीमित (finite) हैं। उदाहरण 3 के दूसरे भाग में $\frac{-5}{7}$ और $\frac{-4}{9}$ के बीच परिमेय संख्याएँ हैं :

$$\frac{-44}{63} < \frac{-43}{63} < \frac{-42}{63} < \frac{-41}{63} < \dots\dots\dots < \frac{-29}{63}$$

आप जितनी चाहें, उतनी परिमेय संख्याएँ प्राप्त कर सकते हैं। दो सामान हर वाली परिमेय संख्याओं के बीच '$n$' परिमेय संख्याएँ प्राप्त करने के लिए हम परिमेय संख्या के अंश और हर को '$n + 1$' से गुणा करेंगे।

इसलिए, $\frac{2}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के बीच 4 परिमेय संख्याएँ प्राप्त करने के लिए हम दोनों परिमेय संख्याओं के अंश और हर को $4 + 1 = 5$ से गुणा करेंगे।

**उदाहरण-4 : –1 और 0 के बीच तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात करें।**

**हल :** हम –1 और 0 को परिमेय संख्या के रूप में लिखते हैं, जहाँ हर 3 + 1 अर्थात् 4 हो

$$\therefore \quad -1 = -1 \times \frac{4}{4} = \frac{-4}{4}$$

$$0 = 0 \times \frac{4}{4} = \frac{0}{4}$$

$$\frac{-4}{4} < \frac{-3}{4} < \frac{-2}{4} < \frac{-1}{4} < \frac{0}{4}$$

इस प्रकार –1 और 0 बीच 3 परिमेय संख्याएँ- $\frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-1}{4}$ हैं।

**उदाहरण-5 : $\frac{-5}{7}$ और $\frac{-1}{3}$ के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात करो।**

**हल :** दी गई परिमेय संख्याएँ $\frac{-5}{7}$ और $\frac{-1}{3}$ हैं

यहाँ हर समान नहीं हैं

इसलिए $$\frac{-5}{7} = \frac{-5}{7} \times \frac{3}{3} = \frac{-15}{21}$$

$$\frac{-1}{3} = \frac{-1}{3} \times \frac{7}{7} = \frac{-7}{21}$$

$$\frac{-15}{21} < \frac{-14}{21} < \frac{-13}{21} < \frac{-12}{21} < \frac{-11}{21} < \frac{-10}{21} < \frac{-7}{21}$$

यां $$\frac{-5}{7} < \frac{-2}{3} < \frac{-13}{21} < \frac{-12}{21} < \frac{-11}{21} < \frac{-10}{21} < \frac{-1}{3}$$

इसलिए, $\frac{-5}{7}$ और $\frac{-1}{3}$ के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ हैं।

$\frac{-2}{3}, \frac{-13}{21}, \frac{-4}{7}, \frac{-11}{21}, \frac{-10}{21}$

## प्रश्नावली - 9.1

**1.** निम्नलिखित संख्याओं के तुल्य (equivalent) दो परिमेय संख्याएँ लिखो :-

(*i*) $\frac{4}{5}$ (*ii*) $\frac{-5}{9}$

(*iii*) $\frac{3}{-11}$

**2.** निम्नलिखित परिमेय संख्याओं का मानक रूप ज्ञात कीजिए :-

(*i*) $\frac{35}{49}$ (*ii*) $\frac{-42}{56}$

(*iii*) $\frac{19}{-57}$ (*iv*) $\frac{-12}{-36}$

**3.** निम्नलिखित में से कौन सा युग्म एक ही परिमेय संख्या को दर्शाते हैं :-

(*i*) $\frac{-15}{25}$ और $\frac{18}{-30}$ (*ii*) $\frac{2}{3}$ और $\frac{-4}{6}$

(*iii*) $\frac{-3}{4}$ और $\frac{-12}{16}$ (*iv*) $\frac{-3}{-7}$ और $\frac{3}{7}$

**4.** निम्नलिखित में से कौन सी परिमेय संख्या बड़ी है :-

(*i*) $\frac{3}{7}, \frac{4}{5}$ (*ii*) $\frac{-4}{12}, \frac{-8}{12}$

(*iii*) $\frac{-3}{9}, \frac{4}{-18}$ (*iv*) $-2\frac{3}{5}, -3\frac{5}{8}$

**5.** निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए।

(*i*) $\frac{-5}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-1}{7}$ (*ii*) $\frac{-1}{5}, \frac{-2}{15}, \frac{-4}{5}$

(*iii*) $\frac{-3}{8}, \frac{-2}{4}, \frac{-3}{2}$

**6.** निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ लिखो।

(*i*) $-2$ और $-1$ (*ii*) $\frac{-4}{5}$ और $\frac{-2}{3}$ (*iii*) $\frac{1}{3}$ और $\frac{5}{7}$

**7.** निम्नलिखित प्रत्येक में चार और तुल्य परिमेय संख्याएँ लिखिए।

(*i*) $\frac{-1}{5}, \frac{-2}{10}, \frac{-3}{15}, \frac{-4}{20}, ..........$ (*ii*) $\frac{-1}{7}, \frac{2}{-14}, \frac{3}{-21}, \frac{4}{-28}, ............$

**8.** एक संख्या रेखा खीचिए और उस पर निम्नलिखित परिमेय संख्याएँ को निरूपित कीजिए।

(*i*) $\frac{2}{4}$ (*ii*) $\frac{-3}{4}$ (*iii*) $\frac{5}{8}$ (*iv*) $\frac{-6}{4}$

**9.** **बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) $\frac{3}{4} = \frac{?}{12}$, तब ? = ..............

(*a*) 3 (*b*) 6 (*c*) 9 (*d*) 12

(*ii*) $\frac{-4}{7} = \frac{?}{14}$, तब ? = .................

(*a*) –4 (*b*) –8 (*c*) 4 (*d*) 8

(*iii*) परिमेय संख्या $\frac{-21}{28}$ का मानक रूप .................... है।

(*a*) $\frac{-3}{4}$ (*b*) $\frac{3}{4}$ (*c*) $\frac{3}{7}$ (*d*) $\frac{-3}{7}$

(*iv*) निम्नलिखित में से कौन सी परिमेय संख्या $\frac{7}{-4}$ के समान नहीं है ?

(*a*) $\frac{14}{-8}$ (*b*) $\frac{21}{-12}$ (*c*) $\frac{28}{-16}$ (*d*) $\frac{7}{-8}$

(*v*) निम्नलिखित में से कौन सही है ?

(*a*) $0 > \frac{-4}{9}$ (*b*) $0 < \frac{-4}{9}$ (*c*) $0 = \frac{4}{9}$ (*d*) कोई नहीं

(*vi*) निम्नलिखित में से कौन सही है ?

(*a*) $\frac{-4}{5} < \frac{-3}{10}$ (*b*) $\frac{-4}{5} > \frac{3}{-10}$ (*c*) $\frac{-4}{5} = \frac{3}{-10}$ (*d*) कोई नहीं

## परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएँ (Operations on Rational Numbers)

**परिमेय संख्याओं का योग (Addition of Rational Numbers) :** दो या दो से अधिक परिमेय संख्याओं का योग करने के लिए उनके हर धनात्मक और समान होने चाहिए। यदि हर समान न हो, हम उनका ल.स.व. लेकर उनके हरों को बराबर बनाएंगे, जिस प्रकार हमने परिमेय संख्याओं की तुलना करते समय किया था और फिर हम साधारण रूप में उनके अंश को जोड़ेंगे और फिर हम उसे (सामान) हर को लेते हुए परिमेय संख्या के रूप में लिखेंगे।

**उदाहरण-1 : $\frac{5}{9}$ और $\frac{-8}{9}$ का योग ज्ञात कीजिए।**

**हल :** दिया है $\frac{5}{9} + \frac{-8}{9}$

$$= \frac{5+(-8)}{9}$$

$$= \frac{5-8}{9}$$

$$= \frac{-3}{9}$$

$$= \frac{-1}{3}$$

**उदाहरण-2 : $\frac{9}{-17}$ और $\frac{-5}{17}$ को योग ज्ञात कीजिए।**

हल : दिया है $\frac{9}{-17} + \frac{-5}{17}$

$$\frac{9}{-17} = \frac{9}{-17} \times \frac{-1}{-1} = \frac{-9}{17}$$

अब
$$\frac{9}{-17} + \frac{-5}{17} = \frac{-9}{17} + \frac{-5}{17}$$

$$= \frac{-14}{17}$$

**उदाहरण-3 : $\frac{-4}{6}$ और $\frac{5}{9}$ का योग ज्ञात कीजिए।**

हल : परिमेय संख्याएँ $\frac{-4}{6}$ और $\frac{5}{9}$ हैं।

यहाँ हर बराबर नहीं हैं

इसलिए 6 और 9 का ल.स.व.= $2 \times 3 \times 3 = 18$

| | |
|---|---|
| 2 | 6, 9 |
| 3 | 3, 9 |
| 3 | 1, 3 |
| | 1, 1 |

अब
$$\frac{-4}{6} = \frac{-4}{6} \times \frac{3}{3} = \frac{-12}{18}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5}{9} \times \frac{2}{2} = \frac{10}{18}$$

इस प्रकार
$$\frac{-4}{6} + \frac{5}{9} = \frac{-12}{18} + \frac{10}{18}$$

$$= \frac{-12+10}{18}$$

$$= \frac{-2}{18} = \frac{-1}{9}$$

**उदाहरण-4 : $\frac{5}{-27}$ और $\frac{13}{36}$ का योग ज्ञात कीजिए।**

हल :

27 और 36 का ल.स.व. $= (3 \times 3 \times 3 \times 4)$

$= 108$

| | |
|---|---|
| 3 | 27, 36 |
| 3 | 9, 12 |
| | 3, 4 |

अब $$\frac{5}{-27} = \frac{5\times-4}{-27\times-4} = \frac{-20}{108}$$

$$\frac{13}{36} = \frac{13\times3}{36\times3} = \frac{39}{108}$$

इस प्रकार $$\frac{5}{-27}+\frac{13}{36} = \frac{-20}{108}+\frac{39}{108}$$

$$= \frac{-20+39}{108}$$

$$= \frac{19}{108}$$

**योज्य प्रतिलोम (Additive Inverse) :** परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-a}{b}$ है जो कि पुन: एक परिमेय संख्या है।

- परिमेय संख्या और उसके योज्य प्रतिलोम का जोड़ 0 होता है। $\frac{a}{b}+\left(\frac{-a}{b}\right)=0$
- केवल 0 ऐसी परिमेय संख्या है जो कि अपने आप का योज्य प्रतिलोम है।

**परिमेय संख्या का व्यवकलन (Subtraction of a rational number) :** अगर $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याएँ हैं, तब

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}+\left(\frac{-c}{d}\right)$$

$$= \frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}\text{ का योज्य प्रतिलोम}\right)$$

उपरोक्त से हम इस निर्णय पर पहुँचते हैं कि दो परिमेय संख्याओं को घटाते समय हम घटाई जा रही परिमेय संख्या के योज्य प्रतिलोम को जोड़ते हैं।

**उदाहरण-5 : पता करो।**

(*i*) $\frac{3}{9}-\left(\frac{-4}{9}\right)$ (*ii*) $\frac{5}{12}-\frac{7}{24}$

हल : (*i*) $$\frac{3}{9}-\left(\frac{-4}{9}\right) = \frac{3}{9}+(-\frac{4}{9}\text{ का योज्य प्रतिलोम})$$

$$= \frac{3}{9}+\frac{4}{9}$$

$$= \frac{3+4}{9}$$

$$= \frac{7}{9}$$

(ii) $$\frac{5}{12}-\frac{7}{24} = \frac{5}{12}+(\frac{7}{24} \text{ का योज्य प्रतिलोम})$$

$$= \frac{5}{12}+\left(\frac{-7}{24}\right)$$

12 और 24 का ल.स.व. = 24

अब $$\frac{5}{12} = \frac{5\times 2}{12\times 2}=\frac{10}{24}$$

∴ $$\frac{5}{12}+\left(\frac{-7}{24}\right) = \frac{10}{24}+\left(\frac{-7}{24}\right)$$

$$= \frac{10-7}{24}$$

$$= \frac{3}{24}$$

$$= \frac{1}{8}$$

**परिमेय संख्याओं का गुणन (Multiplication of Rational numbers) :** दो परिमेय संख्याओं के गुणन को निम्नलिखित अनुसार परिभाषित किया जाता है।

दो परिमेय संख्याओं का गुणन = $\dfrac{\text{उनके अंश का गुणन}}{\text{उनके हर का गुणन}}$

किसी भी दो परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ के लिए

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{(a\times c)}{(b\times d)}$$

**उदाहरण-6 : गुणनफल ज्ञात कीजिए।**

(i) $\mathbf{\frac{9}{5}\times\frac{3}{7}}$ (ii) $\mathbf{\frac{3}{-7}\times\frac{-7}{3}}$

**हल :** (i) $$\frac{9}{5}\times\frac{3}{7} = \frac{9\times 3}{5\times 7}$$

$$= \frac{27}{35}$$

(ii) $$\frac{3}{-7}\times\frac{-7}{3} = \frac{3\times(-7)}{-7\times 3}$$

$$= 1$$

**परिमेय संख्याओं का व्युत्क्रम (Reciprocal of a rational number) :** परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का व्युत्क्रम $\frac{b}{a}$ है।

- परिमेय संख्या और उसके व्युत्क्रम का गुणनफल हमेशा 1 होता है $\left(\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1\right)$
- 1 का व्युत्क्रम 1 है।
- 0 का व्युत्क्रम परिभाषित नहीं है।

**परिमेय संख्याओं का विभाजन (Division of Rational numbers) :** अगर $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याएं हों, जहां $\frac{c}{d}\neq 0$ तब,

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\times(\frac{c}{d} \text{ का व्युत्क्रम})$$
$$= \frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

**उदाहरण-7 : विभाजन करो।**

(*i*) $\frac{9}{21}$ को $\frac{3}{7}$ से (*ii*) $\frac{-5}{9}$ को $\frac{7}{27}$ से

हल : (*i*) $\frac{9}{21}$ और $\frac{3}{7}$ दी गई संख्याएँ हैं।

अब
$$\frac{9}{21}\div\frac{3}{7} = \frac{9}{21}\times(\frac{3}{7} \text{ का व्युत्क्रम})$$
$$= \frac{9}{21}\times\frac{7}{3}$$
$$= 1$$

(*ii*) $\frac{-5}{9}$ और $\frac{7}{27}$ दी गई संख्याएँ हैं।

अब
$$\frac{-5}{9}\div\frac{7}{27} = \frac{-5}{9}\times(\frac{7}{27} \text{ का व्युत्क्रम})$$
$$= \frac{-5}{9}\times\frac{27}{7}$$
$$= \frac{-15}{7}$$

**उदाहरण-8 : $\frac{-7}{12}$ में कौन सी संख्या जोड़ें कि $\frac{5}{9}$ प्राप्त हो जाए ?**

हल : मान लो आवश्यक संख्या जो कि जोड़ी जानी है, $x$ है

तब प्रश्न के अनुसार,
$$\frac{-7}{12}+x = \frac{5}{9}$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{9}-\left(\frac{-7}{12}\right)$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{9}+\frac{7}{12}=\frac{5\times 4+7\times 3}{36}$$

$$= \frac{20+21}{36} = \frac{41}{36} = 1\frac{5}{36}$$

इसलिए जोड़ी जाने वाली आवश्यक संख्या $1\frac{5}{36}$ है।

**उदाहरण-9 : $\frac{-3}{4}$ में से कौन सी संख्या घटाई जाए कि $\frac{-11}{4}$ प्राप्त हो जाये ?**

हल : मान लो घटाई जाने वाली आवश्यक संख्या $x$ है, तब

प्रश्न के अनुसार, $\frac{-3}{4} - x = \frac{-11}{4}$

$\Rightarrow \quad \frac{-3}{4} - \left(\frac{-11}{4}\right) = x$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-3}{4} - \left(\frac{-11}{4}\right) = \frac{-3}{4} + \frac{11}{4} = \frac{-3+11}{4} = \frac{8}{4}$

$x = 2$

इसलिए घटाई जाने वाली आवश्य संख्या 2 है।

**उदाहरण-10 : दो परिमेय संख्याओं का गुणन $\frac{-9}{16}$ है, उनमें से एक संख्या $\frac{3}{14}$ है, दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लो आवश्यक संख्या $x$ है, तब

प्रश्न अनुसार, $\frac{3}{14} \times x = \frac{-9}{16}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-9}{16} \div \frac{3}{14}$

$x = \frac{-9}{16} \times \frac{14}{3} = \frac{(-9)\times 14}{16 \times 3} = \frac{-126}{48} = \frac{-21}{8}$

$x = -2\frac{5}{8}$

## प्रश्नावली - 9.2

**1.** योग ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{6}{9} + \frac{2}{9}$ (ii) $\frac{-15}{7} + \frac{9}{7}$ (iii) $\frac{17}{11} + \left(\frac{-9}{11}\right)$

(iv) $\frac{-5}{6} + \frac{3}{18}$ (v) $\frac{-7}{19} + \frac{-3}{38}$ (vi) $-3\frac{4}{7} + 2\frac{3}{7}$

(vii) $\frac{-5}{14} + \frac{8}{21}$ (viii) $-4\frac{1}{15} + 3\frac{2}{20}$

**2.** ज्ञात कीजिए।

(*i*) $\frac{7}{12} - \frac{11}{36}$ (*ii*) $\frac{-5}{9} - \frac{3}{5}$ (*iii*) $\frac{-7}{13} - \left(\frac{-5}{91}\right)$

(*iv*) $\frac{6}{11} - \frac{-3}{4}$ (*v*) $3\frac{4}{9} - \frac{28}{63}$

**3.** गुणनफल पता कीजिए।

(*i*) $\frac{5}{9} \times \frac{-3}{8}$ (*ii*) $\frac{-3}{7} \times \frac{7}{-3}$ (*iii*) $\frac{3}{13} \times \frac{5}{8}$

(*iv*) $\frac{3}{10} \times (-18)$

**4.** मूल्य ज्ञात कीजिए।

(*i*) $-9 \div \frac{3}{5}$ (*ii*) $\frac{-4}{7} \div 4$ (*iii*) $\frac{7}{18} \div \frac{5}{6}$

(*iv*) $\frac{-8}{35} \div \left(\frac{-2}{7}\right)$ (*v*) $\frac{-9}{15} \div -18$

**5.** $\frac{-5}{12}$ में कौन सी परिमेय संख्या जोड़ी जाए कि $\frac{-7}{8}$ प्राप्त हो जाये ?

**6.** $\frac{-2}{3}$ में से कौन सी संख्या घटाई जाए कि $\frac{-5}{6}$ प्राप्त हो जाये ?

**7.** दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल $\frac{-11}{2}$ है, अगर उनमें से एक $\frac{33}{8}$ हो, तो दुसरी संख्या ज्ञात करो।

**8.** **बहुवैकल्पिक प्रश्न**

(*i*) $\frac{5}{4} + \left(\frac{25}{-4}\right)$ का योग =

(*a*) –5 (*b*) 5 (*c*) 4 (*d*) –4

(*ii*) $\frac{17}{11} - \frac{6}{11}$ = ................

(*a*) 1 (*b*) –1 (*c*) 6 (*d*) 3

(*iii*) $\frac{2}{-5} \times \frac{-5}{2}$ = ................

(*a*) 1 (*b*) –1 (*c*) 2 (*d*) –5

(*iv*) $\frac{7}{12} \div \left(\frac{-7}{12}\right)$ = ................

(*a*) 1 (*b*) –1 (*c*) 7 (*d*) –7

(*v*) निम्नलिखित में से $(-4) \times [(-5) + (-3)]$ का मूल्य क्या है ?

(*a*) –32 (*b*) 120 (*c*) 32 (*d*) –23

## हमने क्या चर्चा की ?

1. $\frac{a}{b}$ के रूप में व्यक्त की गई संख्याएँ, जहां $a$ और $b$ पूर्णांक हैं और $b \neq 0$ है, परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं।
2. अगर हम किसी भी व्यक्त की गई परिमेय संख्या के 'हर' तथा 'अंश' दोनों को किसी एक पूर्णांक (0 के अतिरिक्त) के साथ गुणा किया जाए या भाग दिया जाए तो प्राप्त हुई परिमेय संख्या दी गई परिमेय संख्या के तुल्य होती है।
3. कोई भी परिमेय संख्या धनात्मक होती है यदि उसका अंश और हर दोनों ही या तो धनात्मक हों या ऋणात्मक।
4. कोई भी परिमेय संख्या ऋणात्मक होती है यदि अंश या हर में से कोई एक ऋणात्मक हो।
5. '0' ऐसा ही पूर्णांक है जो न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक।
6. कोई परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ मानक रूप में होती है, जब $b$ अर्थात् 'हर' धनात्मक हो और $a$ और $b$ का सार्व गुणनखण्ड केवल '1' हो।
7. परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-a}{b}$ होता है।
8. परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ ($\neq 0$) का गुणात्मक उलट (व्युत्क्रम) $\frac{b}{a}$ होता है।

### सीखने के परिणाम

**अध्याय के पूर्ण होने पर विद्यार्थी :-**

1. परिमेय संख्याओं को परिभाषित करने के योग्य हैं तथा दी गई परिमेय संख्या को मानक रूप में लिखने के योग्य हैं।
2. तुल्य परिमेय संख्याएं लिखने के योग्य हैं।
3. व्यक्त की गई परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर निरूपित करने के योग्य हैं।
4. व्यक्त की गई परिमेय संख्याओं के बीच अन्य परिमेय संख्याएँ ज्ञात करने के योग्य हैं।
5. दो या अधिक परिमेय संख्याओं का योग, व्यवकलन (घटाव), गुणन तथा विभाजन करने के योग्य हैं।
6. परिमेय संख्याओं का प्रयोग करके अपने जीवन की समस्याओं को हल करने के योग्य हैं।

## उत्तरमाला

### प्रश्नावली 9.1

**1.** (*i*) $\frac{8}{10}, \frac{12}{15}$ (*ii*) $\frac{-10}{18}, \frac{15}{27}$

(*iii*) $\frac{6}{-22}, \frac{9}{-33}$

**2.** (*i*) $\frac{5}{7}$ (*ii*) $\frac{-3}{4}$

(*iii*) $\frac{-1}{3}$ (*iv*) $\frac{1}{3}$

**3.** (*i*), (*iii*), (*iv*)

**4.** (*i*) $\frac{4}{5} > \frac{3}{7}$ (*ii*) $\frac{-4}{12} > \frac{-8}{12}$

(*iii*) $\frac{4}{-18} > \frac{-3}{9}$ (*iv*) $-2\frac{3}{5} > -3\frac{5}{8}$

**5.** (*i*) $\frac{-5}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-1}{7}$ (*ii*) $\frac{-4}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{-2}{15}$

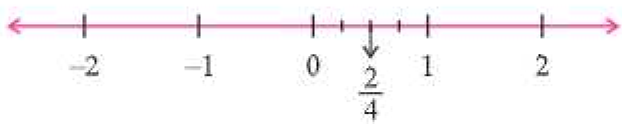
(*iii*) $\frac{-3}{2}, \frac{-2}{4}, \frac{-3}{8}$

**6.** (*i*) $\frac{-11}{6}, \frac{-5}{3}, \frac{-3}{2}, \frac{-4}{3}$ और $\frac{-7}{6}$ (*ii*) $\frac{-7}{9}, \frac{-34}{45}, \frac{-11}{15}, \frac{-32}{45}$ और $\frac{-31}{45}$

(*iii*) $\frac{8}{21}, \frac{3}{7}, \frac{10}{21}, \frac{11}{21}$ और $\frac{4}{7}$

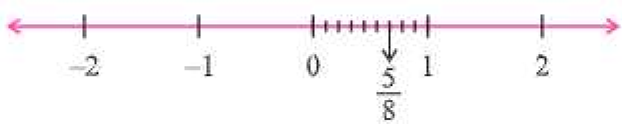
**7.** (*i*) $\frac{-5}{25}, \frac{-6}{30}, \frac{-7}{35}, \frac{-8}{40}$ (*ii*) $\frac{5}{-35}, \frac{6}{-42}, \frac{7}{-49}, \frac{8}{-56}$

**8.** (*i*)

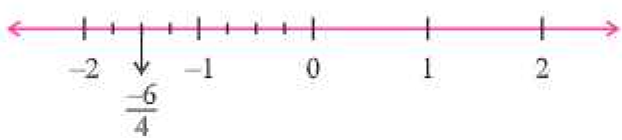



(*ii*)

(*iii*)




(*iv*)




**9.** (*i*) *c* (*ii*) *b*

(*iii*) *a* (*iv*) *d*

(*v*) *a* (*vi*) *a*

## प्रश्नावली 9.2

**1.** (*i*) $\frac{8}{9}$ (*ii*) $\frac{-6}{7}$

(*iii*) $\frac{8}{11}$ (*iv*) $\frac{-2}{3}$

(v) $\frac{-17}{38}$ (vi) $\frac{-8}{7}$

(vii) $\frac{1}{42}$ (viii) $\frac{-29}{30}$

**2.** (i) $\frac{5}{18}$ (ii) $\frac{-52}{45}$

(iii) $\frac{-44}{91}$ (iv) $\frac{57}{44}$

(v) 3

**3.** (i) $\frac{-5}{24}$ (ii) 1

(iii) $\frac{15}{104}$ (iv) $\frac{-27}{5}$

**4.** (i) –15 (ii) $\frac{-1}{7}$

(iii) $\frac{7}{15}$ (iv) $\frac{4}{5}$

(v) $\frac{1}{30}$

**5.** $\frac{-11}{24}$ **6.** $\frac{1}{6}$ **7.** $\frac{-4}{3}$

**8.** (i) *a* (ii) *a*

(iii) *a* (iv) *b*

(v) *c*

अध्याय 10

T2K4X4

# प्रायोगिक ज्यामिति

**उद्देश्य :-**

**इस अध्याय में आप सीखेंगे :-**

1. एक दी हुई रेखा के समातंर रेखा खींचना।
2. विभिन्न नियमों का प्रयोग करके त्रिभुज की रचना करना।
3. निर्धारित करना कि दिये हुए मापों से त्रिभुज की रचना करना संभव है या नहीं।

## भूमिका

हम पहले ही कुछ रचनाएँ करना सीख चुके हैं। उदाहरणत: एक दी हुई लम्बाई का रेखाखंड, एक रेखाखंड पर एक लंब रेखा, एक कोण, कोण का समद्विभाजक, एक वृत, इत्यादि :

**इस अध्याय में अब हम सीखेंगे :**

- एक दी हुई रेखा के समांतर रेखा की रचना करना।
- त्रिभुज की रचना करना।

### एक दी हुई रेखा के समांतर रेखा की रचना करना (Construction of parallel Line to a Given Line)

एक दी हुई रेखा $l$ के समांतर, A से होकर जाने वाली रेखा खींचना जहाँ पर बिंदु A, रेखा $l$ पर स्थित नहीं हैं।

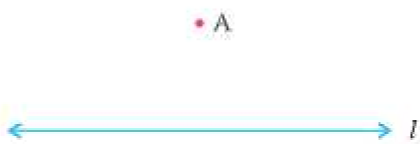
हम यह रचनाएँ करगें :-

(*i*) पैमाना (Ruler) और समकोणक (गुनिया) का प्रयोग करके

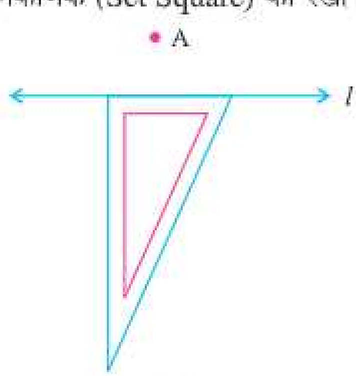
या (*ii*) पैमाना (Ruler) और परकार का प्रयोग करके।

**(*i*) पैमाना और समकोणक (Set Square) के प्रयोग से समांतर रेखा की रचना करना।**

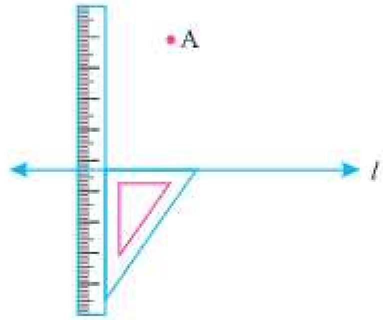
**चरण 1 :** एक रेखा '$l$' और उसके बाहर स्थित कोई बिंदु A लीजिए।



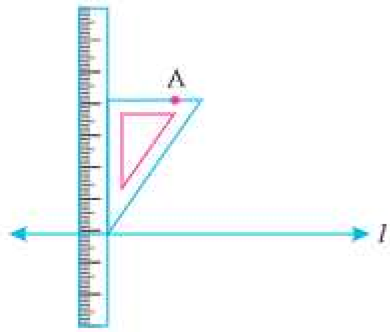

**चरण 2 :** दर्शाए अनुसार, समकोणक (Set Square) को रेखा पर रखें।



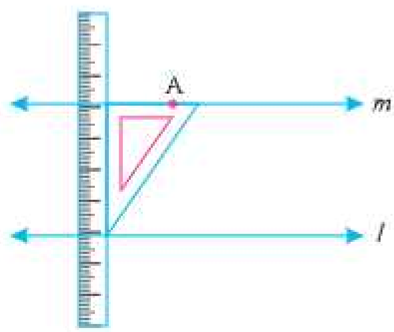
**चरण 3** : अब पैमाने को दर्शाए अनुसार रखें।




**चरण 4** : पैमाने को अच्छी तरह पकड़ें और समकोणक को धीरे-धीरे खिसकाते हुए बिंदु A समकोणक के एक किनारे पर संपाती है।




**चरण 5** : समकोणक के क्षैतिज किनारे पर रेखा $m$ खींचो जो बिंदु A से होकर गुजरे।

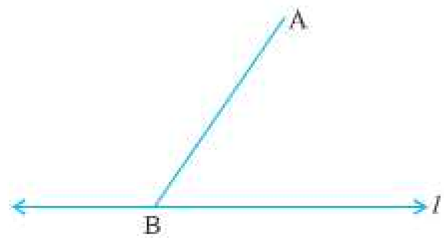



**चरण 6** : इस प्रकार रेखा '$m$' रेखा '$l$' के समांतर वांछित रेखा है।

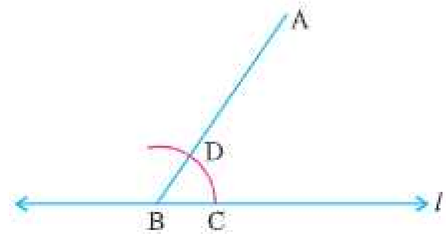
## (*ii*) पैमाने और परकार के प्रयोग से समांतर रेखा की रचना करना।

**चरण 1** : एक रेखा $l$ और उसके बाहर एक बिंदु A लीजिए।

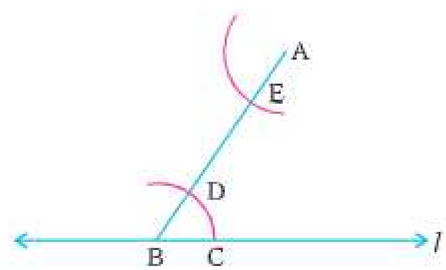
**चरण 2** : रेखा $l$ और कोई बिंदु B लीजिए और AB से मिलाइए।



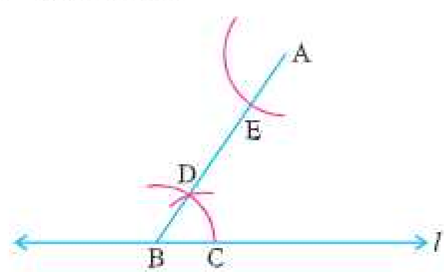

**चरण 3** : बिंदु B को केंद्र मानकर और कोई सुविधाजनक त्रिज्या लेकर $l$ को C पर और BA को D पर प्रतिच्छेद करता हुआ एक चाप खींचिए।



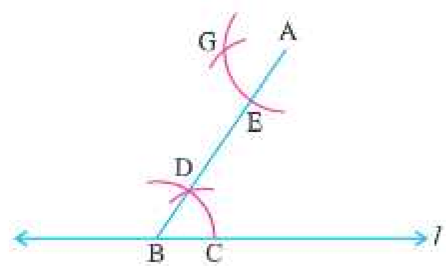

**चरण 4** : अब, A बिंदु को केंद्र मानकर और चरण-3 वाली ही त्रिज्या लेकर AB को E पर काटता हुआ एक चाप खींचें।



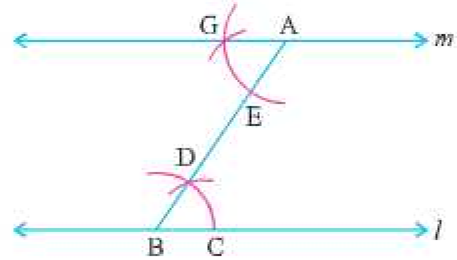

**चरण 5** : चाप CD को परकार से मापो।




**चरण 6** : बिंदु E को केंद्र मानकर और EG = चाप CD काटो।



**चरण 7 :** अब AG को मिलाकर रेखा $m$ खींचिए।




ध्यान दीजिए कि $\angle EAG = \angle DBC$ एकांतर अंत: कोण हैं, इसलिए $m \parallel l$ है।

## प्रश्नावली - 10.1

1. एक रेखा $l$ खींचिए और इसके बाहर स्थित कोई बिंदु $p$ लीजिए। केवल पैमाना और परकार का प्रयोग करते हुए $p$ से होकर $l$ के समांतर एक रेखा खींचिए।
2. रेखा $l$ से 3.5 cm की दूरी पर एक समांतर रेखा खींचिए।
3. मान लीजिए $l$ एक रेखा है और P एक बिंदु है जो $l$ पर स्थित नहीं है। P से होकर $l$ के समांतर एक रेखा $m$ खींचिए। अब P को $l$ के किसी बिंदु Q से जोड़िए। $m$ पर कोई अन्य बिंदु R चुनिए। R से होकर, PQ के समांतर एक रेखा खींचिए। मान लीजिए यह रेखा, रेखा $l$ से बिंदु S पर मिलती है। समांतर रेखाओं के इन दोनों युग्मों से कौन सी आकृति बनती है?
4. बहुवैकल्पिक प्रश्न

   (*i*) किसी रेखा के बाहरी बिंदु से उस रेखा के समांतर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं ?

   (*a*) 0 (*b*) 2
   (*c*) 1 (*d*) 3

   (*ii*) निम्नलिखित में से किस का प्रयोग करके एक रेखा के समांतर रेखा खींची जा सकती है?

   (*a*) कोण मापक (*b*) पैमाना
   (*c*) परकार (*d*) पैमाना और परकार

## त्रिभुजों की रचना (Construction of Triangles)

**इस अनुच्छेद को पढ़ने से पहले, हम त्रिभुज से संबंधित महत्वपूर्ण गुणों को याद करते हैं।**

1. त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाइयों का योग तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होता है।
2. त्रिभुज के तीनों अन्त: कोणों का योग $180^\circ$ होता है।
3. एक त्रिभुज का बाह्यकोण उसके दोनों अभिमुख अंत: कोणों के योगफल के बराबर होता है।
4. पाइथागोरस प्रमेय अर्थात एक समकोण त्रिभुज में $(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार})^2 + (\text{लंब})^2$

एक त्रिभुज की रचना तभी संभव है यदि उसके निम्नलिखित माप समूहों में से कोई एक दिया हो।

1. तीन भुजाएँ (भुजा-भुजा-भुजा) SSS
2. दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण (भुजा-कोण-भुजा) SAS
3. दो कोण और उनके बीच की भुजा (कोण-भुजा-कोण) ASA
4. समकोण त्रिभुज के लिए कर्ण और एक भुजा

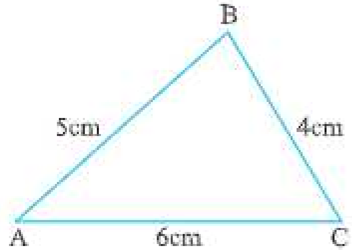
- नोट : दिए हुए माप से किसी भी त्रिभुज की रचना करने से पहले हमें इसकी एक रफ आकृति खींच लेनी चाहिए।

## SSS कसौटी से त्रिभुज की रचना करना (Construction of a triangle using SSS criterion)

SSS का अर्थ है भुजा-भुजा-भुजा। इस अनुच्छेद में, हम त्रिभुज की रचना करेंगे जब उसकी तीनों भुजाएँ ज्ञात हों। निम्नलिखित उदाहरण को समझिए।

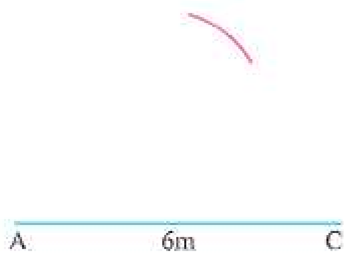
**उदाहरण-1 : एक त्रिभुज ABC की रचना करो जबकि AB = 5 cm, BC = 4 cm और AC = 6 cm दिया है।**

**चरण 1 :** पहले हम दी हुई मापों के अनुसार $\Delta ABC$ की रफ (Rough) आकृति खींचते हैं।

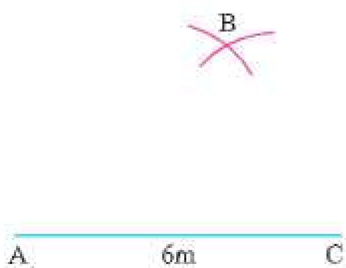



**चरण 2 :** एक रेखा AC = 6cm खींचिए। (नोट : सबसे बड़ी भुजा को आधार मानो। यह एक विकल्प है लेकिन ज़रूरी नहीं है)

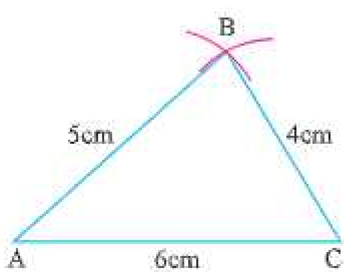
**चरण 3 :** A को केंद्र मान कर और 5 cm ($\because$ AB = 5 cm) त्रिज्या लेकर चाप खींचिए।




**चरण 4 :** C को केंद्र मान कर और 4 cm ($\because$ BC = 4 cm) को त्रिज्या लेकर चाप खींचिए जो पहली चाप को B पर काटे।




**चरण 5 :** AB और CB को मिलाओ अब $\Delta ABC$ वांछित त्रिभुज हैं।



## प्रश्नावली - 10.2

1. $\Delta ABC$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 3.5$ cm, $BC = 5$ cm और $CA = 7$ cm हैं।
2. $\Delta ABC$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB = BC = 6.5$ cm और $CA = 4$ cm। यह किस प्रकार का त्रिभुज है ?
3. एक $\Delta XYZ$ की रचना कीजिए, जिसकी प्रत्येक भुजा 5 cm हो। यह त्रिभुज किस प्रकार का त्रिभुज है?
4. एक PQR की रचना कीजिए $PQ = 2.5$ cm, $QR = 6$ cm और $RP = 6.5$ cm है। $\angle PQR$ का माप बताओ और यह त्रिभुज किस प्रकार का त्रिभुज है ?
5. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm, $CA = 3$ cm (यदि संभव हो) है। यदि संभव नहीं है तो कारण बताइए।
6. बहुवैकल्पिक प्रश्न

   (*i*) निम्नलिखित में से किस का प्रयोग कर के त्रिभुज की रचना की जा सकती है ?

   (*a*) त्रिभुज की तीनों भुजाओं के माप से  (*b*) त्रिभुज के परिमाप से

   (*c*) त्रिभुज के तीनों कोणों के माप से  (*d*) त्रिभुज के तीनों शीर्षों के नाम से

   (*ii*) निम्नलिखित में से किस माप के अनुसार त्रिभुज की रचना की जा सकती है ?

   (*a*) 1.8 cm, 2.6 cm, 4.4 cm  (*b*) 3 cm, 4 cm, 8 cm

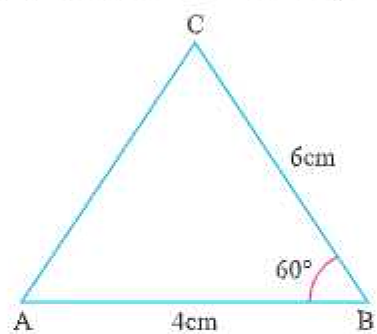
   (*c*) 4 cm, 7 cm, 2 cm  (*d*) 5 cm, 4 cm, 4 cm

## SAS कसौटी के प्रयोग से त्रिभुज की रचना करनी (Construction of a triangle using SAS criterion)

SAS का अर्थ हैं भुजा-कोण-भुजा। यहाँ हमें दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण दिया हुआ है। उदाहरण 1 से रचना को समझिए।

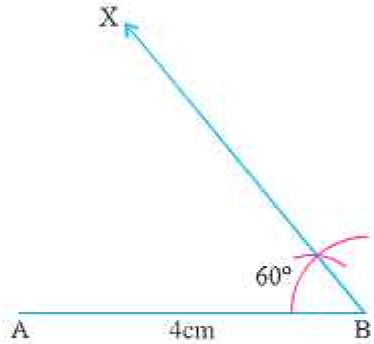
**उदाहरण-1 : त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm और $\angle ABC = 60°$ है।**

**चरण 1 :** पहले हम दिए हुए माप के अनुसार, $\Delta ABC$ एक रफ़ (Rough) आकृति खींचते हैं।

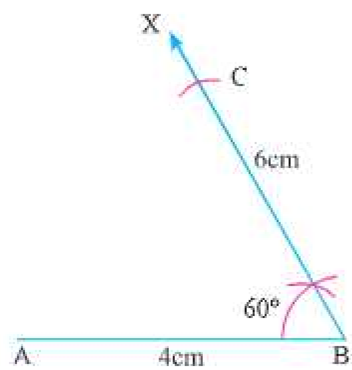



**चरण 2 :** रेखा खंड $AB = 4$ cm खींचिए।

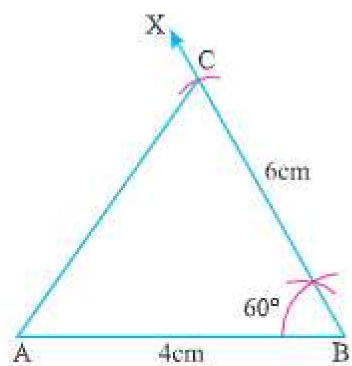
चरण 3 : परकार के प्रयोग से, बिंदु B ठ्ठ पर किरण $\angle ABX = 60^\circ$ खींचिए।




चरण 4 : B को केंद्र मान कर, 6 cm त्रिज्या वाली एक चाप खींचिए जो BX को C पर काटती है।




चरण 5 : AC को मिलाएँ। इस प्रकार $\Delta ABC$ वांछित त्रिभुज है।




## प्रश्नावली - 10.3

1. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 4$ cm, $\angle B = 30^\circ$, $BC = 4$ cm है। भुजाओं के आधार पर बताओ कि यह त्रिभुज किस प्रकार का है ?
2. $\Delta ABC$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 7.5$ cm, $BC = 5$ cm और $\angle B = 30^\circ$ हो।
3. $\Delta XYZ$ की रचना कीजिए, जिसमें $XY = 6$ cm, $YZ = 6$ cm और $\angle Y = 60^\circ$ हैं। रचना द्वारा बना त्रिभुज किस प्रकार का है ?

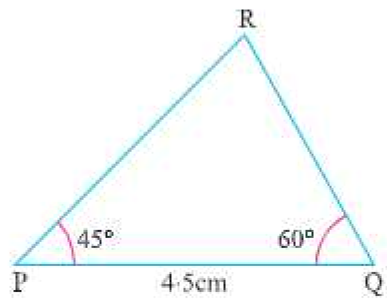
4. निम्नलिखित में से कौन से त्रिभुज की रचना SAS कसौटी (नियम) का प्रयोग कर के की जा सकती है।
   (*a*) AB = 5 cm, BC = 5 cm, CA = 6 cm
   (*b*) AB = 5 cm, BC = 5 cm, $\angle$B = 40°
   (*c*) $\angle$A = 60°, $\angle$B = 60°. $\angle$C = 60°
   (*d*) BC = 5 cm, $\angle$B = $\angle$C = 45°

## ASA कसौटी का प्रयोग करके त्रिभुज की रचना करना (Construction of a triangle using ASA criterion)

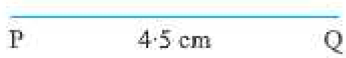
ASA का अर्थ है कोण-भुजा-कोण। सब से पहले एक रफ़ आकृति खींचिए। अब दी हुई लंबाई का रेखाखंड खींचिए। दोनों अंत बिंदुओं पर कोण बनाइए। जैसे : निम्नलिखित उदाहरण में दिखाया गया है।

**उदाहरण-1 : त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसमें PQ = 4.5 cm, $\angle$P = 45°, $\angle$Q = 60°**

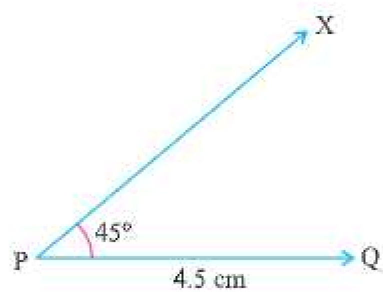
**चरण 1 :** सब से पहले हम $\Delta$PQR की एक रफ़ आकृति खींचते हैं।



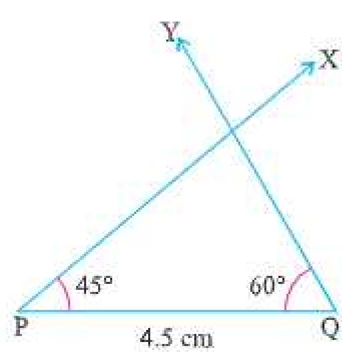

**चरण 2 :** रेखा खंड PQ = 4.5 cm खींचिए।



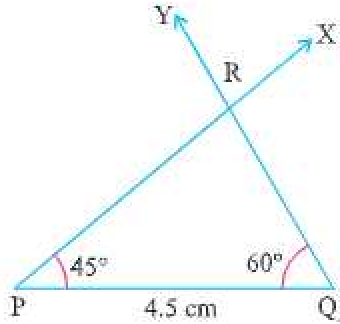

**चरण 3 :** P पर एक किरण $\angle$QPX = 45° का कोण बनाए। (जैसे कि हम पहली कक्षाओं में परकार की सहायता से बनाते थे)




**चरण 4 :** परकार के प्रयोग से बिंदु Q पर $\angle$PQY = 60° की रचना कीजिए।

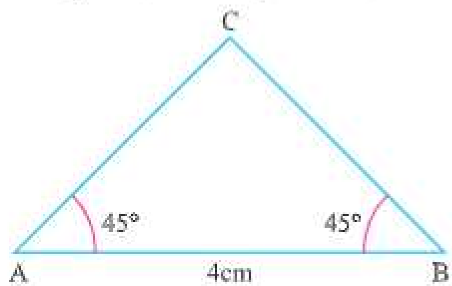


**चरण 5 :** किरण PX और QY आपस में एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं यह बिंदु R है और $\Delta PQR$ वाँछित त्रिभुज है।



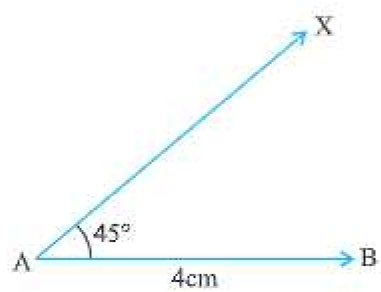

**उदाहरण-2 : एक समद्विबाहु त्रिभुज $\Delta ABC$ की रचना कीजिए जिसमें आधार AB = 4 cm और आधार पर बना प्रत्येक कोण 45° हो।**

**चरण 1 :** $\Delta ABC$ का दिए गए माप के अनुसार एक रफ़ आकृति बनाइए।

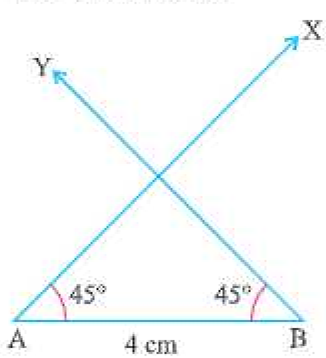



**चरण 2 :** रेखाखंड AB = 4 cm खींचिए।

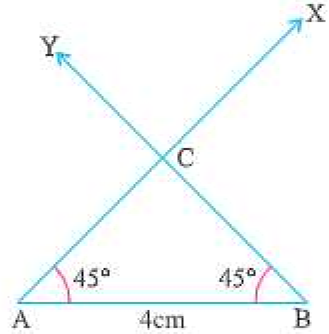
**चरण 3 :** A को शीर्ष मान कर $\angle BAX = 45°$ की रचना करें।




**चरण 4 :** B को शीर्ष मान कर $\angle ABY = 45°$ की रचना करें।



**चरण 5 :** किरण AX और किरण BY आपस में एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं, यह बिंदु C है और $\Delta ABC$ वाँछित त्रिभुज है।




## प्रश्नावली - 10.4

1. $\Delta ABC$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 6$ cm, $\angle A = 30°$ और $\angle B = 75°$ हैं।
2. समद्विबाहु $\Delta ABC$ की रचना कीजिए जिसका आधार $AB = 5.3$ cm और आधार का प्रत्येक कोण $= 45°$ है।
3. $\Delta XYZ$ की रचना कीजिए यदि $XY = 4$ cm, $\angle X = 45°$ और $\angle Z = 60°$

   (संकेत : $\angle Y = 180° - 45° - 60° = 75°$)
4. जाँच कीजिए कि आप $\Delta PQR$ की रचना कर सकते हैं या नहीं, यदि $\angle P = 100°$, $\angle Q = 90°$ और $PQ = 4.3$ cm हो। यदि संभव नही तो कारण बताइए।
5. बहुवैकल्पिक प्रश्न

   (*i*) निम्नलिखित में से किस माप के अनुसार एक विलक्षण त्रिभुज की रचना नहीं की जा सकती ?

   (*a*) $BC = 5$ cm, $\angle B = 90°$ और $\angle C = 100°$

   (*b*) $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm और $CA = 2$ cm

   (*c*) $XY = 5$ cm, $\angle X = 45°$, $\angle Y = 60°$

   (*d*) एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं में हर भुजा 5 cm हो।

   (*ii*) निम्नलिखित कोणों के कौन से युग्मों से त्रिभुज की रचना संभव है ?

   (*a*) 110°, 40° (*b*) 70°, 115°

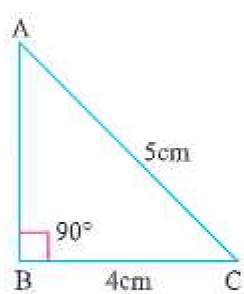
   (*c*) 135°, 45° (*d*) 90°, 90°

## RHS कसौटी का प्रयोग करके त्रिभुज की रचना करनी (Construction of a triangle using RHS criterion)

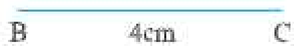
RHS का अर्थ है समकोण-कर्ण-भुजा (समकोण त्रिभुज की)। पहले दिए हुए माप के अनुसार एक रफ़ आकृति बनाएं। दी हुई लंबाई का रेखाखंड खींचिए। समकोण की रचना करें। समकोण की किरण पर त्रिभुज के कर्ण के बराबर लम्बाई काटें। समकोणी त्रिभुज की रचना के लिए उदाहरण 1 देखें।

**उदाहरण-1 : $\Delta ABC$ की रचना कीजिए जिसमें $\angle B = 90°$, $BC = 4$ cm और $AC = 5$ cm हैं।**

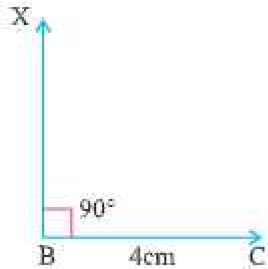
**चरण 1 :** एक रफ़ आकृति खींचिए।



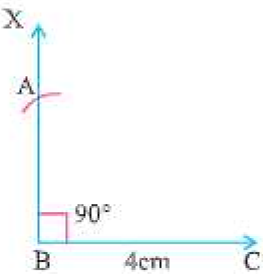
**चरण 2** : रेखाखंड BC = 4 cm खींचिए।



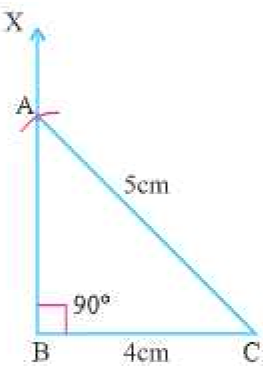

**चरण 3 :** परकार की सहायता से B को शीर्ष मान कर, $\angle CBX = 90^\circ$ का कोण बनाती हुई किरण खींचिए।




**चरण 4 :** C को शीर्ष मानकर और त्रिज्या 5 cm (= AC) लेकर BX को A पर काटता एक चाप लगाएं।




**चरण 5 :** A और C को मिलाएं। इस प्रकार वांछित $\Delta ABC$ प्राप्त होता है।




## प्रश्नावली - 10.5

1. एक समकोण $\Delta ABC$ की रचना कीजिए जिसमें $\angle C = 90^\circ$, AB = 5 cm और BC = 3 cm है।
2. एक समकोण समद्विबाहु $\Delta DEP$ की रचना कीजिए जिसमें $\angle E = 90^\circ$ और EF = 6 cm है।
3. $\angle Q = 90^\circ$, PQ = 3.6 cm और PR = 8.5 cm माप के अनुसार समकोण $\Delta PQR$ की रचना कीजिए।
4. **बहुवैकल्पिक प्रश्न**

   (*i*) निम्नलिखित में से कौन सा त्रिगुट, पाइथागोरस त्रिगुट है ?

   (*a*) 1, 2, 3 (*b*) 2, 3, 4

   (*c*) 4, 5, 6 (*d*) 12, 13, 5

(*ii*) एक त्रिभुज की रचना तब तक संभव नहीं, यदि

(*a*) तीनों भुजाओं की लम्बाई दी हो।

(*b*) दो भुजाओं और उनके बीच का कोण दिया हो।

(*c*) तीनों कोणों के माप दिए हो।

(*d*) दो कोणों का माप और उसके बीच की भुजा दी हो।

## हमने क्या चर्चा की ?

1. परकार की सहायता से एकांतर कोण तथा संगत कोण विधि का प्रयोग करके एक रेखा के समांतर बाहरी बिंदु में से गुज़रती रेखा खींची जा सकती है।
2. त्रिभुजों की सर्वांगसमता की संकल्पना का अप्रत्यक्ष रूप से उपयोग करते हुए हमने त्रिभुज की रचना की विधि का अध्ययन किया है।
3. **ASA :** दो कोणों और उनके बीच की भुजा की लम्बाई दी हुई है।
4. **SSS :** त्रिभुज की तीन भुजाओं की लंबाई दी हुई है।
5. **SAS :** दो भुजाओं और उनके बीच के कोण का माप दिया हुआ है।
6. **RHS :** समकोण त्रिभुज के कर्ण एक पाद की लंबाई दी हुई है।

### सीखने के परिणाम

**इस अध्याय के पूर्ण होने पर विद्यार्थी :**

1. ज्यामिति के अवकर्णों-पैमाना, परकार और समकोणक का प्रयोग करने के योग्य हैं।
2. दी हुई रेखा के बाहरी बिंदु से होकर निकलती समांतर रेखा खींचने के योग्य हैं।
3. दिए हुए मापों के अनुसार, त्रिभुज की रचना करन के योग्य हैं।
4. दिए हुए मापों के अनुसार यह जाँच करने के योग्य हैं कि त्रिभुज की रचना संभव है या नहीं।

## उत्तरमाला

### प्रश्नावली 10.1

**4.** (*i*) *c* (*ii*) *d*

### प्रश्नावली 10.2

**6.** (*i*) *a* (*ii*) *d*

### प्रश्नावली 10.3

**4.** *b*

### प्रश्नावली 10.4

**5.** (*i*) *c* (*ii*) *a*

### प्रश्नावली 10.5

**4.** (*i*) *d* (*ii*) *c*

अध्याय **11**

Y9R3X4

# परिमाप और क्षेत्रफल

**उद्देश्य :-**

**इस अध्याय में आप सीखेंगे :-**

1. माप के बारे में।
2. लम्बाई और क्षेत्रफल की इकाइयों को बदलना।
3. समतल आकृतियों के क्षेत्रफल और परिमाप में अंतर के बारे में समझना।
4. सूत्र के प्रयोग से वर्ग, आयत त्रिभुज और समातंर चतुर्भुज के परिमाप और क्षेत्रफल की गणना करना।
5. वृत्त की परिधि और क्षेत्रफल की गणना करना।
6. दैनिक जीवन में विभिन्न परिस्थितियों में परिमाप और क्षेत्रफल की जानकारी का प्रयोग करना।

## हमारे देश का गौरव (Our Nations' Pride)

**कुछ तथ्य :** समतल आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने में भारतीय गणितज्ञों ने महत्वपूर्ण भूमिका निभाई है। आर्यभट्ट (476–550 AD) ने त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र दिया था। उसने पाई ($\pi$) के अनुमानित मान को निरूपित किया। आर्यभटीय के दूसरे भाग में उन्होंने लिखा है कि वृत की परिधि और व्यास का अनुपात 3.1416 होता है। एक अन्य भारतीय गणितज्ञ, ब्रह्मगुप्त ने (598–668 AD) चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए सूत्र दिया।

## भूमिका

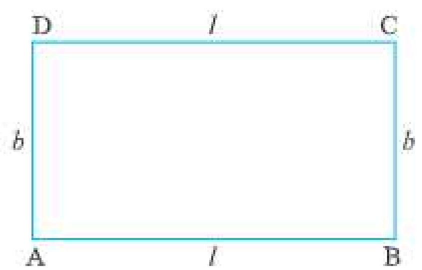
हम पहले ही, छठी कक्षा में तल में बनी आकृतियों का परिमाप तथा वर्ग और आयत के क्षेत्रफलों के बारे में पढ़ चुके हैं।

**परिमाप :** एक साधारण बंद आकृति का परिमाप उस की बाहरी सीमा की कुल लंबाई होता है। परिमाप की इकाई, लंबाई की इकाई ही होती है अर्थात मीटर, सेंटीमीटर आदि।

**क्षेत्रफल :** एक साधारण बंद आकृति का क्षेत्रफल उसकी अंत: सतह का माप होता है। क्षेत्रफल की इकाइयाँ वर्ग मीटर, वर्ग सेंटीमीटर आदि होती हैं।

## आयत तथा वर्ग का परिमाप तथा क्षेत्रफल (Perimeter and Area of a rectangle and a square)

**आयत :** आइए, एक आयत ABCD जिसकी लंबाई = $l$ इकाइयाँ और चौड़ाई = $b$ इकाइयों पर विचार कीजिए।

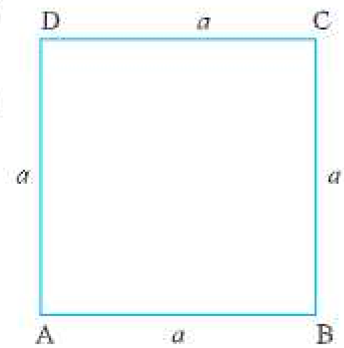


तब, आयत का परिमाप $= AB + BC + CD + DA$
$= l + b + l + b$
$= 2l + 2b$
$= 2\,(l + b)$ इकाइयाँ
आयत का क्षेत्रफल = (लंबाई × चौड़ाई) वर्ग इकाइयाँ

हम इस सूत्र की सहायता से लंबाई और चौड़ाई भी पता कर सकते है, यदि क्षेत्रफल दिया हो।

लंबाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}}$ इकाइयाँ तथा चौड़ाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लंबाई}}$ इकाइयाँ

**वर्ग :** आइए, एक वर्ग पर विचार करें जिस की प्रत्येक भुजा '$a$' इकाई के बराबर है।




वर्ग का परिमाप $= AB + BC + CD + DA$
$= a + a + a + a$
$= 4a$ इकाइयाँ
= (4 × भुजा) इकाइयाँ
वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा
$A = a \times a$
$A = a^2$ वर्ग इकाइयाँ

**उदाहरण-1 : आयत का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि लंबाई 18 cm तथा चौड़ाई 9 cm है।**

**हल :** आयत की लंबाई = 18 cm
आयत की चौड़ाई = 9 cm
आयत का परिमाप = 2 (लंबाई + चौड़ाई)
$= 2\,(18 + 9)$
$= 2\,(27)$
= 54 cm
आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई
$= 18 \times 9$
$= 162\ cm^2$

**उदाहरण-2 : वर्ग का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा 3.5 cm है।**

**हल :** वर्ग की भुजा = 3.5 cm
वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा
$= 4 \times 3.5$
= 14.0 cm
आयत का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$
$= (3.5)^2$
$= 3.5 \times 3.5$
$= 12.25\ cm^2$

**उदाहरण-3 : आयताकार पार्क का क्षेत्रफल 1386 $m^2$ है यदि पार्क की लंबाई 42 $m$ हो तो पार्क की चौड़ाई और परिमाप ज्ञात कीजिए।**

**हल :** आयाताकार पार्क का क्षेत्रफल = $1386m^2$
लंबाई = $42m$

$$\text{क्षेत्रफल} = \text{लंबाई} \times \text{चौड़ाई}$$

$$\therefore \quad \text{चौड़ाई} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लंबाई}} = \frac{1386}{42}$$

$$= 33m$$

$$\text{आयाताकार पार्क का परिमाप} = 2\,(\text{लंबाई} + \text{चौड़ाई})$$

$$\text{आयाताकार पार्क का परिमाप} = 2\,(42 + 33)$$

$$= 2\,(75)$$

$$= 150 \text{ m}$$

**उदाहरण-4 : एक वर्गाकार पार्क का क्षेत्रफल आयाताकार पार्क के क्षेत्रफल के बराबर है। यदि वर्गाकार पार्क की प्रत्येक भुजा 36 m और आयाताकार पार्क की लंबाई 54 m हो तो आयताकार पार्क की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\text{वर्गाकार पार्क की भुजा} = 36 \text{ m}$$

$$\text{वर्गाकार पार्क का क्षेत्रफल} = (\text{भुजा})^2$$

$$= 36 \times 36$$

$$= 1296 \text{ m}^2$$

$$\text{आयताकार पार्क की लंबाई} = 54 \text{ m}$$

मान लो, आयताकार पार्क की चौड़ाई = $b$

प्रश्न के अनुसार

$$\text{आयताकार पार्क का क्षेत्रफल} = \text{वर्गाकार पार्क का क्षेत्रफल}$$

$$54 \times b = 1296$$

$$b = \frac{1296}{54}$$

$$b = 24 \text{ m}$$

इस लिए, आयताकार पार्क की चौड़ाई = 24 m

**उदाहरण-5 : एक तार 15 cm भुजा वाले वर्ग के आकार की है। यदि तार को दुबारा मोड़कर एक 16 cm लंबाई वाला आयत बनाया जाता है तो इसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए। किसका क्षेत्रफल अधिक होगा, वर्ग का या आयत का ?**

हल :

$$\text{वर्ग की भुजा} = 15 \text{ cm}$$

$$\text{वर्ग का परिमाप} = 4 \times \text{भुजा}$$

$$= 4 \times 15$$

$$= 60 \text{ cm}$$

$$\text{आयक की लंबाई} = 16 \text{ cm}$$

$$\text{मान लो, आयत की चौड़ाई} = b \text{ cm}$$

$$\text{आयत का परिमाप} = 2\,(\text{लंबाई} + \text{चौड़ाई})$$

$$= 2\,(16 + b) \text{ cm}$$

प्रश्न के अनुसार,

$$\text{वर्ग का परिमाप} = \text{आयत का परिमाप}$$

$$60 = 2\,(16 + b)$$

$\frac{60}{2} = 16 + b$

$16 + b = 30$

$b = 30 - 16$

$b = 14$ cm

$\therefore$ इसलिए, आयत की चौड़ाई = 14 cm

वर्ग का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$

$= 15 \times 15$

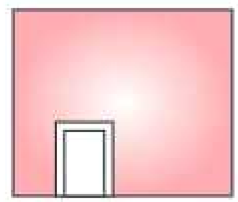
$= 225 \text{ cm}^2$

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई

$= 16 \times 14$

$= 224 \text{ cm}^2$

$\therefore$ वर्ग का क्षेत्रफल अधिक है।



**उदाहरण-6 : 3 m $\times$ 2 m माप वाला एक दरवाज़ा दीवार में लगाया गया है। दीवार की लंबाई 8 m तथा चौड़ाई 5 m है, ₹25 प्रति 1 $\text{m}^2$ की दर से दीवार पर पेंट कराने का खर्च ज्ञात कीजिए।**

हल : दीवार की लंबाई = 8 m

दीवार की चौड़ाई = 5 m

दीवार का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई

$= 8 \times 5$

$= 40 \text{ m}^2$

दरवाज़े का क्षेत्रफल = 3 m $\times$ 2 m

$= 6 \text{ m}^2$

दीवार पर पेंट करने वाले भाग का क्षेत्रफल = दरवाज़े सहित दीवार का क्षेत्रफल–दरवाज़े का क्षेत्रफल

$= 40 - 6$

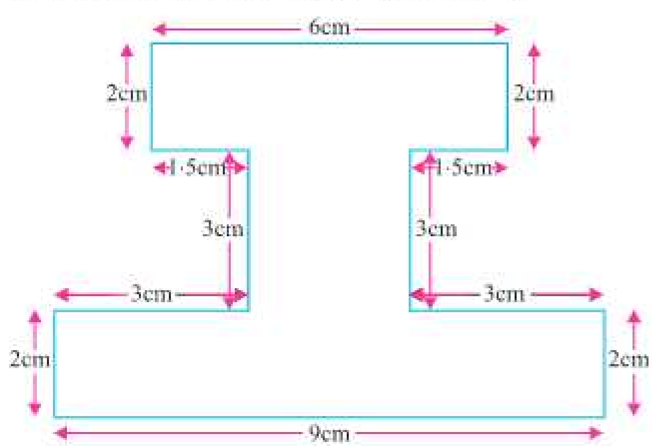
$= 34 \text{ m}^2$

1 $\text{m}^2$ दीवार को पेंट करने का खर्च = ₹ 25

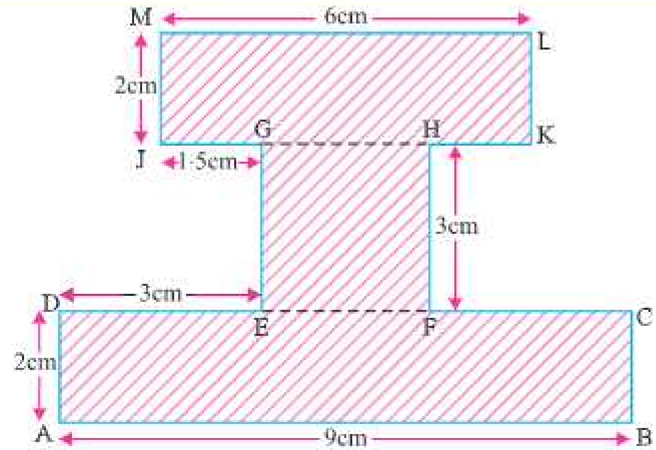
34 $\text{m}^2$ दीवार को पेंच करने का खर्च = 34 $\times$ ₹ 25

= ₹ 850

**उदाहरण-7 : निम्न आकृति का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।**



हल :




$$AB = DC$$
$$AB = DE + EF + FC$$
$$9 = 3 + EF + 3$$
$$9 = 6 + EF$$
$$EF = 3 \text{ cm}$$

हम आयत ABCD, JKLM और वर्ग EFHE प्राप्त करते हैं।

आकृति का क्षेत्रफल = आयत ABCD का क्षेत्रफल + आयत JKLM का क्षेत्रफल + वर्ग EFHG का क्षेत्रफल

$= (9 \times 2) \text{ cm}^2 + (6 \times 2) \text{ cm}^2 + (3 \times 3) \text{ cm}^2$

$= (18 + 12 + 9) \text{ cm}^2$

$= 39 \text{ cm}^2$

दी हुई आकृति का परिमाप = MJ + JG + GE + DE + DA + AB + BC + CF + FH + HK + KL + ML

$= 2 + 1.5 + 3 + 3 + 2 + 9 + 2 + 3 + 3 + 1.5 + 2 + 6$

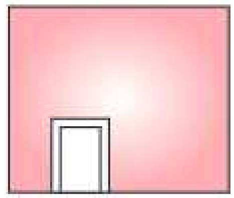
$= 38 \text{ cm}$

## प्रश्नावली - 11.1

1. आयत का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
   (*i*) लंबाई = 28 cm, चौड़ाई = 15 cm
   (*ii*) लंबाई = 9.4 cm चौड़ाई= 2.5 cm
2. वर्ग का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा का माप
   (*i*) 29 cm
   (*ii*) 8.3 cm है।
3. वर्गाकार पार्क का परिमाप 148 m है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. आयत का क्षेत्रफल 580 $cm^2$ और उसकी लंबाई 29 cm है, इसकी चौड़ाई और परिमाप ज्ञात कीजिए।
5. एक तार आयाताकार के आकार की है। जिसकी लंबाई 48 cm और 32 cm है। यदि तार को दुबारा मोड़कर एक वर्ग बनाया जाए तो इसकी प्रत्येक भुजा का माप ज्ञात कीजिए। यह भी ज्ञात कीजिए कि किस आकृति का क्षेत्रफल अधिक है और कितना ?

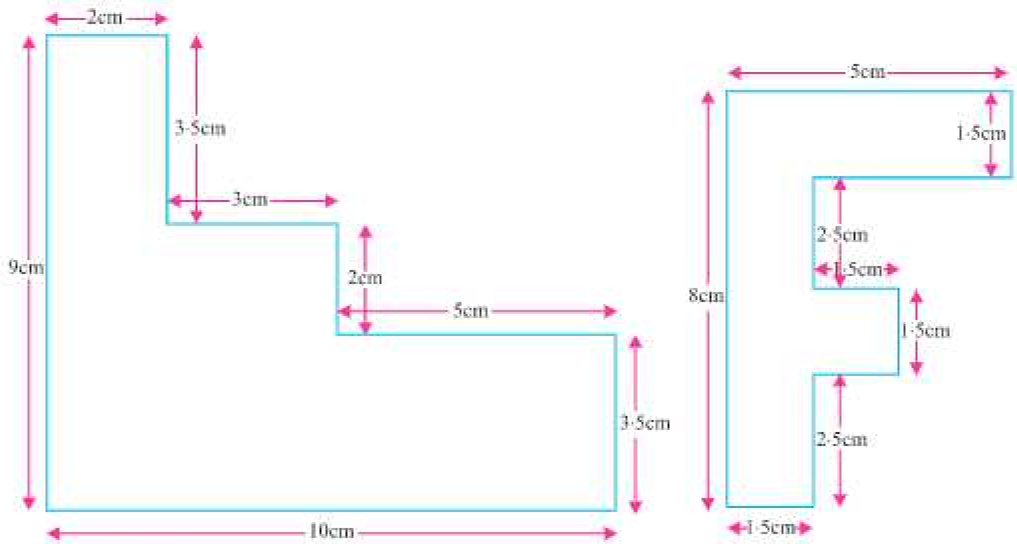
6. एक वर्गाकार पार्क का क्षेत्रफल एक आयाताकार पार्क के क्षेत्रफल के बराबर है। यदि वर्गाकार पार्क की एक भुजा 75 m और आयाताकार पार्क की लंबाई 125 m हो तो आयताकार पार्क की चौड़ाई ज्ञात कीजिए। आयताकार पार्क का परिमाप भी ज्ञात कीजिए।

7. एक दरवाज़ा जिसकी लंबाई 2.5 m और चौड़ाई 1.5 m है, एक दीवार में लगाया गया है। दीवार की लंबाई 9 m और चौड़ाई 6 m है। ₹ 30 प्रति 1 $m^2$ की दर से दीवार को पेंट कराने का खर्च ज्ञात कीजिए।



8. 3 m × 2 m माप वाला एक दरवाज़ा और 2.5 m × 1.5 m माप वाली एक खिड़की को दीवार में लगाया गया है। दीवार की लंबाई 7.8 m और चौड़ाई 3.9 m है। ₹ 25 प्रति 1 $m^2$ की दर से दीवार को पेंट कराने का खर्च ज्ञात कीजिए।

9. निम्नलिखित आकृतियों का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।




**10. बहुवैकल्पिक प्रश्न :**

(*i*) 12 cm × 10 cm माप वाले आयत का क्षेत्रफल क्या है ?

(*a*) 44 $cm^2$ (*b*) 120 $cm^2$
(*c*) 1200 $cm^2$ (*d*) 1440 $cm^2$

(*ii*) एक आयत की लंबाई ज्ञात कीजिए जिसकी चौड़ाई 12 cm और परिमाप 36 cm है।

(*a*) 6 cm (*b*) 3 cm
(*c*) 9 cm (*d*) 12 cm

(*iii*) यदि वर्ग की प्रत्येक भुजा 1 $m^2$ है तो उसका क्षेत्रफल ............ होगा।

(*a*) 10 $cm^2$ (*b*) 100 $cm^2$
(*c*) 1000 $cm^2$ (*d*) 10000 $cm^2$

(*iv*) वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका परिमाप 96 cm है।

(*a*) 576 $cm^2$ (*b*) 626 $cm^2$
(*c*) 726 $cm^2$ (*d*) 748 $cm^2$

(*v*) एक आयताकार शीट का क्षेत्रफल 500 $cm^2$ है। यदि शीट की लंबाई 25 cm हो तो उसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

(*a*) 30 cm (*b*) 40 cm

(*c*) 20 cm (*d*) 25 cm

(*vi*) यदि किसी वर्ग की भुजा को दुगुना कर दिया जाये तो उसके क्षेत्रफल कितने गुना हो जाऐगा ?

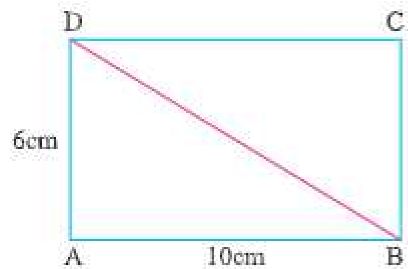
(*a*) क्षेत्रफल असल वर्ग के क्षेत्रफल का 4 गुना हो जाता है।

(*b*) क्षेत्रफल असल वर्ग के क्षेत्रफल का $\frac{1}{4}$ गुना हो जाता है।

(*c*) क्षेत्रफल असल वर्ग के क्षेत्रफल का 16 गुना हो जाता है।

(*d*) क्षेत्रफल असल वर्ग के क्षेत्रफल का $\frac{1}{6}$ गुना हो जाता है।

## आयत के क्षेत्रफल, त्रिभुजों के क्षेत्रफल के योग के रूप में




एक आयत ABCD जिसकी लंबाई 10 cm और चौड़ाई 6 cm, लीजिए। यदि हम इसका एक विकर्ण खींचते हैं तो वह इस आयत को दो समान त्रिभुजों में बाँटता है और दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योगफल आयत के क्षेत्रफल के बराबर है।

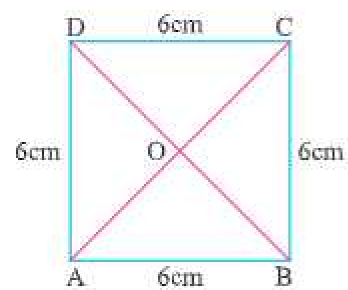
जैसे $\Delta$ABD का क्षेत्रफल + $\Delta$BCD का क्षेत्रफल = आयत ABCD का क्षेत्रफल

$$\therefore \text{ इसलिए, प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आयत का क्षेत्रफल}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{लंबाई} \times \text{चौड़ाई}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 6$$

$$= 30 \text{ cm}^2$$




इसी प्रकार यदि हम एक आयत को 4 त्रिभुजों में बाँटते हैं तो भी नतीजा एक जैसा ही रहता है अर्थात कि त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग आयत के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

अब, एक वर्ग ABCD जिसकी भुजा 6 cm है, को चार बराबर त्रिभुजों में बांटिए जैसा कि आकृति में दिखाया गया है।

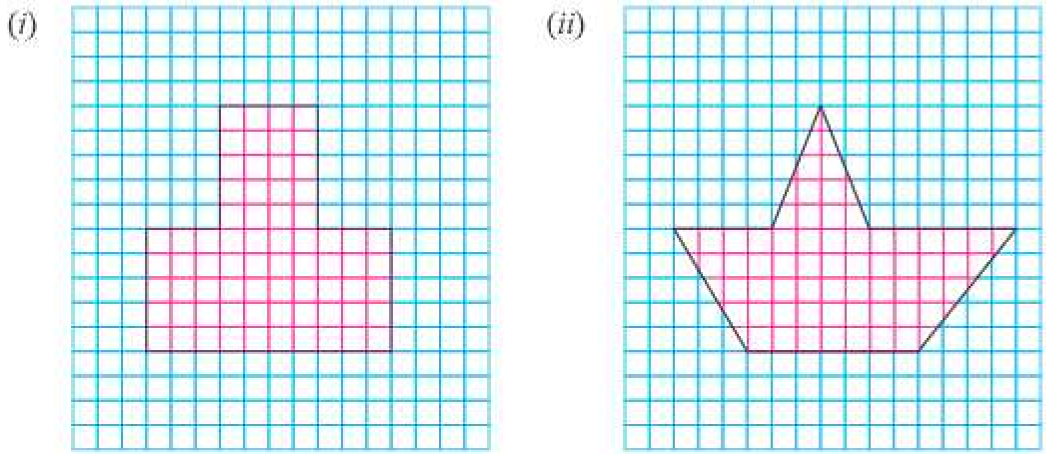
$\Delta$AOB का क्षेत्रफल + $\Delta$BOC का क्षेत्रफल + $\Delta$COD का क्षेत्रफल + $\Delta$DOA का क्षेत्रफल = वर्ग ABCD का क्षेत्रफल

$$\text{प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{4} \times \text{वर्ग का क्षेत्रफल}$$

$$= \frac{1}{4} \times (\text{भुजा})^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 6 \times 6 = 9 \text{ cm}^2$$

**उदाहरण-1 :** इकाई वर्ग की गिनती के द्वारा, निम्नलिखित आकृतियों के क्षेत्रफल का अनुमानित मान ज्ञात कीजिए।




आकृति 1 आकृति 2

**हल :** (i) आकृति 1 में पूर्णतया घिरं हुए वर्गों की गिनती= 70

1 वर्ग का क्षेत्रफल = 1 वर्ग इकाई

आकृति का क्षेत्रफल = 70 वर्ग इकाइयाँ

(ii) पूर्णतया घिरे हुए वर्गों की गिनती = 51

आधे घिरे हुऐ वर्गों की गिनती = 6

वर्गों की गिनती जो आधे वर्गों के जैसे माने जाने हैं = $\frac{1}{2} \times 6 = 3$

आधे से कम घिरं हुए वर्गों की गिनती = 8

वर्गों की गिनती जो आधे से ज्यादा घिरे वर्गों के लिए माने जाते हैं = 8

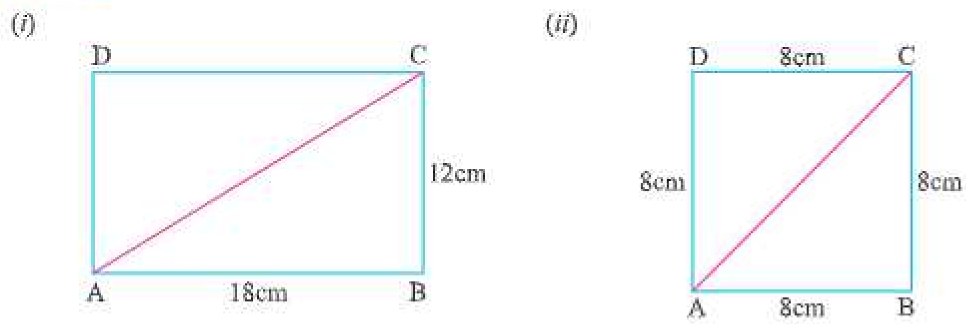
आधे से कम घिरं हुए वर्गों की गिनती = 9

वर्गों की गिनती, जो आधे से कम घिरे वर्गों के लिए माने जाते है = 0

कुल वर्गों की गिनती जो क्षेत्रफल के लिए माने जाते है = 51 + 3 + 8 + 0 = 62

∴ इसलिए, आकृति का क्षेत्रफल = 62 वर्ग इकाइयाँ (अनुमानित)

**उदाहरण-2 : निम्नलिखित आकृतियों में, $\Delta ABC$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।**




**हल :** (i) दिए हुए, आयत की लंबाई = 18 cm

आयत की चौड़ाई = 12 cm

आयत ABCD का विकर्ण AC, आयत को दो समान त्रिभुजों $\Delta ABC$ और $\Delta CDA$ में बाँटता है।

इसलिए, $\Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आयत ABCD का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ लंबाई $\times$ चौड़ाई

$= \frac{1}{2} \times 18 \times 12$

$= 108 \text{ cm}^2$

(*ii*) दिऐ हुए, वर्ग की भुजा = 8 cm

विकर्ण AC, वर्ग ABCD को दो समान त्रिभुजों $\Delta ABC$ और $\Delta CDA$ में बाँटता है।

इसलिए, $\Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ वर्ग ABCD का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ (भुजा)$^2$

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8$

$= 32 \text{ cm}^2$

## आयतों के अन्य सर्वांगसम भागों के लिए व्यापीकरण (Generalising for other congruent parts of rectangles)

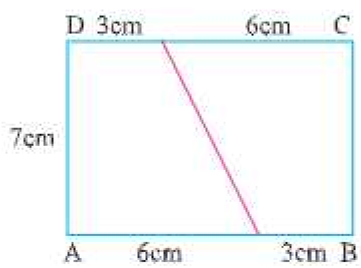
एक आयत, जिसकी लंबाई 9 cm और चौड़ाई 7 cm है, को दो सर्वांगसम भागों में बांटा गया है।

$\therefore$ प्रत्येक सर्वांगसम भाग का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आयत ABCD का क्षेत्रफल

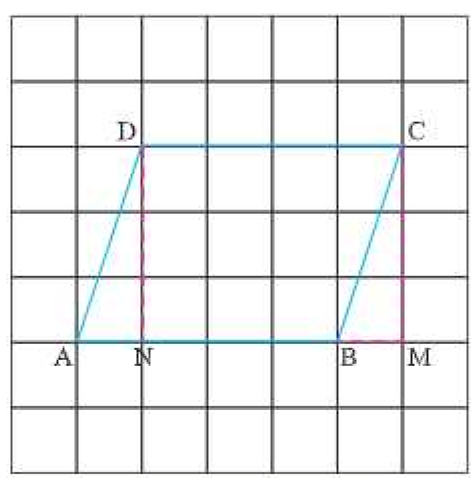
$= \frac{1}{2} \times$ लंबाई $\times$ चौड़ाई

$= \frac{1}{2} \times 9 \times 7$

$= 31.5 \text{ cm}^2$




## समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of parallelogram)




एक चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाए समांतर और बराबर हो, तो वह चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज कहलाता है। आकृति में, हम देखते हैं कि आयत DNMC की लम्बाई, समांतर चतुर्भुज ABCD के आधार के बराबर है और आयत की चौड़ाई, समांतर चतुर्भुज की शीर्ष लंब (ऊँचाई) के बराबर है।

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार $\times$ ऊँचाई

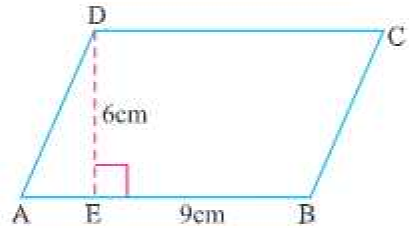
उपरोक्त से,

आधार $= \frac{\text{समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$

या ऊँचाई $= \frac{\text{समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

[आयत की लंबाई = समांतर चतुर्भुज का आधार
आयत की चौड़ाई = समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई

**उदाहरण-3 : निम्नलिखित में, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल पता करो।**




हल : दिये हुए,

समांतर चतुर्भुज का आधार = 9 cm

समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई = 6 cm

∴ समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

$= 9 \times 6$

$= 54 \text{ cm}^2$

**उदाहरण-4 : समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई पता कीजिए, यदि उसका क्षेत्रफल $42 \text{ cm}^2$ और आधार 6 cm हो।**

हल : दिऐ हुए,

समांतर चतुर्भुज का आधार = 6 cm

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $42 \text{ cm}^2$

आधार × ऊँचाई = 42

6 × ऊंचाई = 42

ऊँचाई = $\frac{42}{6}$

ऊँचाई = 7 cm

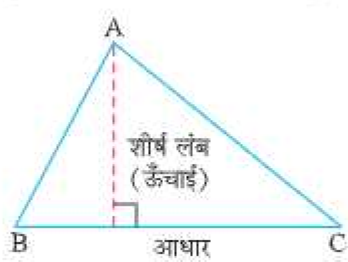
∴ समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई = 7 cm

## एक त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of a triangle)

तीन रेखाखंडों से बनी बंद आकृति को त्रिभुज कहा जाता है।

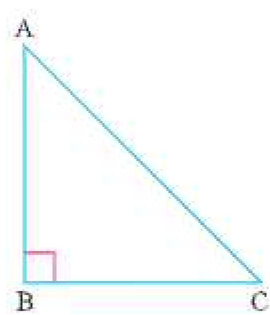
(*i*) विषमबाहु त्रिभुज में तीनों भुजाओं की लंबाई भिन्न होती है।
यदि आधार और शीर्ष लंब (ऊँचाई) क्रमवार दिए हों, तो

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × [आधार × शीर्ष लंब (ऊँचाई)] वर्ग इकाइयाँ

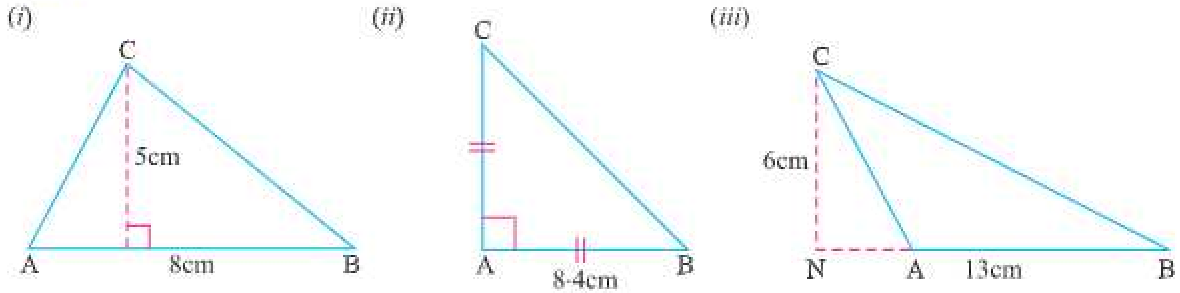



(*ii*) समकोण त्रिभुज में, समकोण के सम्मुख भुजा को कर्ण कहते हैं और समकोण बनाने वाली दो भुजाओं को बाजू कहा जाता है।

समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × (आधार × ऊँचाई) वर्ग इकाइयाँ



**उदाहरण-5 : निम्नलिखित त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।**




हल : (i) दिया है :

त्रिभुज का आधार = 8 cm

त्रिभुज की ऊँचाई = 5 cm

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 5$

$= 20\ cm^2$

(ii) $\Delta CAB$ में

AB = AC

AB = 8.4 cm

$\therefore$ AC = 8.4 cm

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 8.4 \times 8.4$

$= 35.28\ cm^2$

(iii) त्रिभुज का आधार = 13 cm

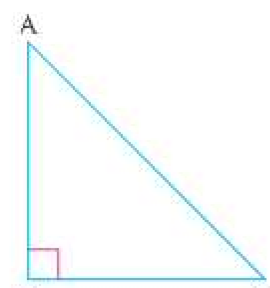
त्रिभुज की ऊँचाई = 6 cm

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 13 \times 6$

$= 39\ cm^2$

**उदाहरण-6 : समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 108 $cm^2$ है और समकोण बनाने वाली एक भुजा 9 सम हो तो दूसरी भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।**




हल : ABC एक त्रिभुज लीजिए जिसमें B पर समकोण हो।

BC = 9 cm

AB = ?

समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = 108 $cm^2$

$\frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई = 108

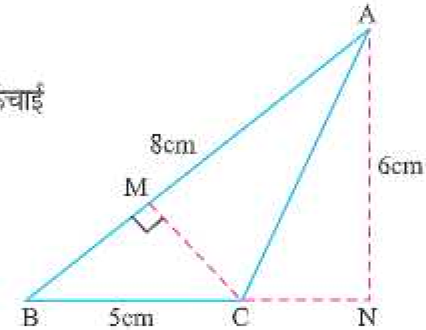
$$\frac{1}{2} \times 9 \times \text{ऊँचाई} = 108$$

$$\text{ऊँचाई} = \frac{108 \times 2}{9}$$

$$\text{ऊँचाई} = 24 \text{ cm}$$

**उदाहरण-7 : ΔABC में, BC = 5 cm, AN = 6 cm और AB = 8 cm है। ज्ञात कीजिए :**

*(i)* **ΔABC का क्षेत्रफल** *(ii)* **CM की लंबाई**




हल : ΔABC में, BC = 5 cm, AN = 6 cm

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AN$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 6$$

$$= 15 \text{ cm}^2$$

*(ii)* ΔABC में AB = 8 cm

$$CM = ?$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$15 = \frac{1}{2} \times AB \times CM$$

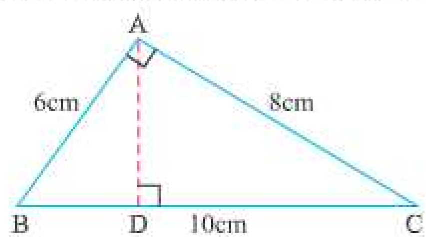
$$15 = \frac{1}{2} \times 8 \times CM$$

$$15 = 4 \times CM$$

$$CM = \frac{15}{4}$$

$$CM = 3.75 \text{ cm}$$

**उदाहरण-8 : ΔABC, A पर समकोण है जैसा आकृति में देखा गया है। AD भुजा BC पर लंब है। यदि AB = 6 cm, BC = 10 cm और AC = 8 cm है तो ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। AD की लंबाई भी ज्ञात कीजिए।**




हल : दिए हुए, ABC में, A पर समकोण है, AB = 6 cm, BC = 10 cm और AC = 8 cm

AC को आधार और AB को ऊँचाई लेकर हम प्राप्त करते हैं,

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} \times AC \times AB = \frac{1}{2} \times 8 \times 6$$

$$= 24 \text{ cm}^2$$

AD भुजा BC पर लंब है।

अब, BC को आधार और AD को ऊँचाई लेने पर, हमें प्राप्त होता है,

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

$$24 = \frac{1}{2} \times 10 \times AD$$

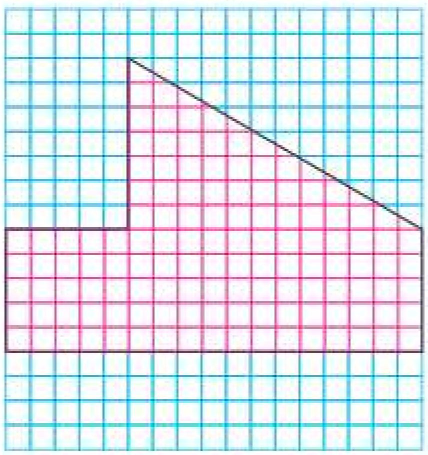
$$24 = 5 \times AD$$

$$AD = \frac{24}{5} = 4.8 \text{ cm}$$

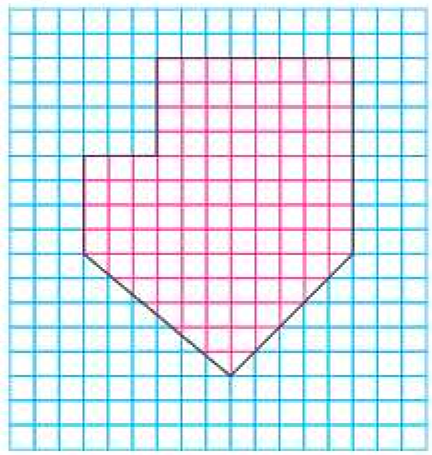
## प्रश्नावली - 11.2

**1.** इकाई वर्ग की गिनती करते हुए, निम्नांकित के क्षेत्रफल का अनुमानित मान ज्ञात कीजिए।

(*i*)

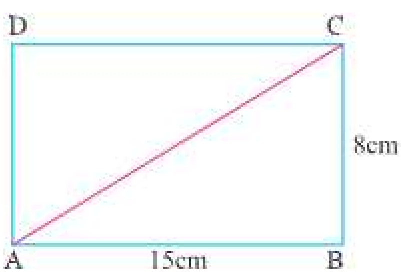


(*ii*)

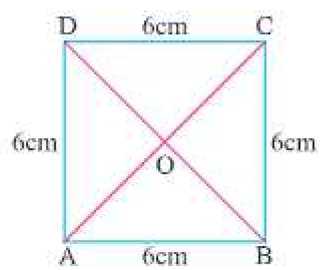


**2.** निम्नांकित आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(*i*) $\Delta ABC$

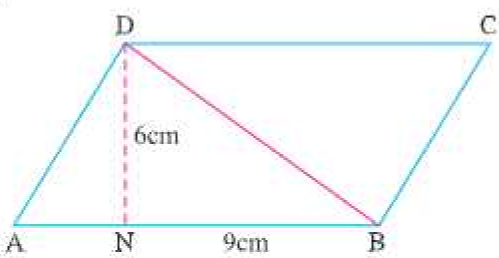



(*ii*) $\Delta COD$

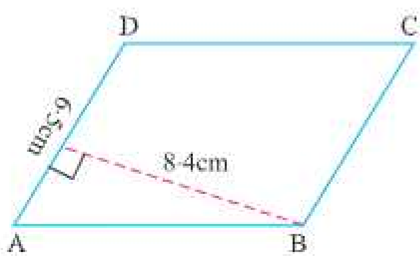



**3.** निम्नांकित समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(*i*)

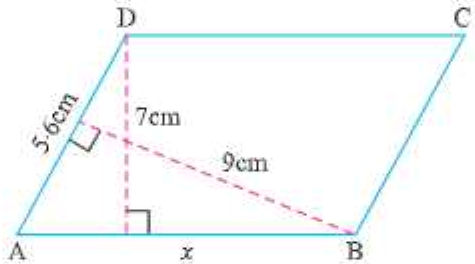



(*ii*)

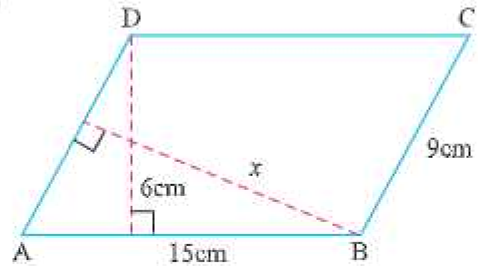


**4.** निम्नांकित समांतर चतुर्भुज में $x$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(*i*)

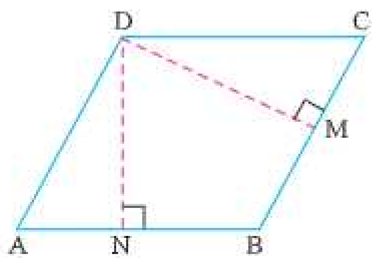



(*ii*)



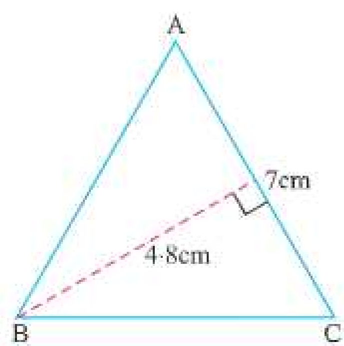

**5.** समांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं की लंबाइयाँ 28 cm और 45 cm है और बड़ी भुजा पर बना शीर्ष लंब (ऊँचाई) 18 cm है। समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**6.** दिए हुए चित्र में ABCD समांतर चतुर्भुज है। DN और DM भुजाओं AB और CB पर क्रमवार लंब है। यदि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $1225\ cm^2$, AB = 35 cm और CR = 25 cmहो तो DN और DM ज्ञात कीजिए।

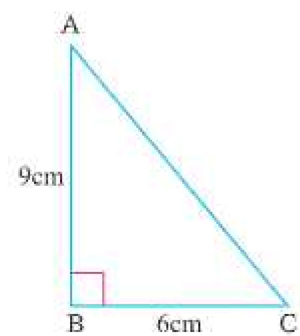



**7.** निम्नांकित त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(*i*)

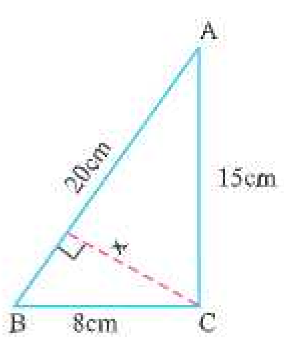



(*ii*)

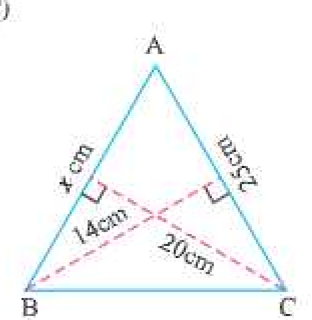



**8.** निम्नांकित त्रिभुजों में $x$ का मान ज्ञात कीजिए।

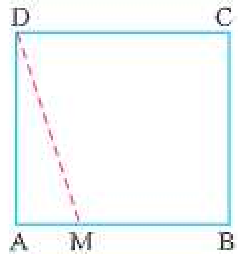
(*i*)



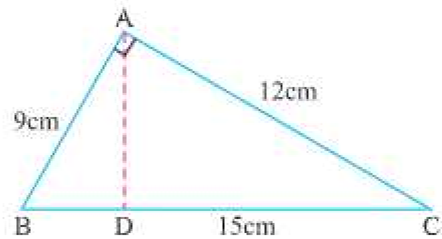

(*ii*)



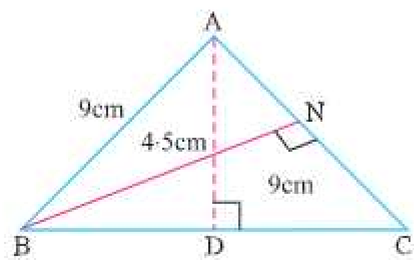
**9.** ABCD वर्ग में यदि AB पर एक बिंदु M है। जिसमें AM = 9 cm और $\Delta DAM$ का क्षेत्रफल 171 $cm^2$ है। वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।




**10.** त्रिभुज ABC में, A पर समकोण है जैसा कि आकृति में दर्शाया है। AD भुजा BC पर शीर्ष लंब (ऊँचाई) है। यदि AB = 9 cm, BC = 15 cm और AC = 12 cm हो तो ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और AD की लंबाई भी ज्ञात कीजिए।




**11.** $\Delta ABC$ समकोण त्रिभुज है। जिसमें AB = AC = 9 cm, BC = 12 cm और AD की (A से BC तक की ऊँचाई) 4.5 cmहै। $\Delta ABC$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। B से AC तक की ऊँचाई (BN) क्या होगी ?




**12. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 246 $cm^2$ और आधार 20 cm है।

(*a*) 1.23 cm (*b*) 13.2 cm
(*c*) 12.3 cm (*d*) 1.32 cm

(*ii*) समांतर चतुर्भुज की एक भुजा और उस भुजा के अनुसार ऊँचाई क्रमवार 7 और 3.5 है। समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(*a*) 21 cm (*b*) 24.5 cm
(*c*) 21.5 cm (*d*) 24 cm

(*iii*) एक त्रिभुज जिसका आधार 13 cm और क्षेत्रफल 65 $cm^2$ है, की ऊँचाई ............ है।

(*a*) 12 cm (*b*) 15 cm
(*c*) 10 cm (*d*) 20 cm

(*iv*) समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी बराबर भुजाओं की लंबाई 40 cm हैं।

(*a*) 400 $cm^2$ (*b*) 200 $cm^2$
(*c*) 600 $cm^2$ (*d*) 800 $cm^2$

(*v*) यदि एक नये समांतर चतुर्भुज की भुजाएँ पहले बने समांतर चतुर्भुज की भुजाओं से दुगुनी कर दी जाए तो नए समांतर चतुर्भुज का परिमाप क्या होगा।

(*a*) 1.5 गुना (*b*) 2 गुना

(*c*) 3 गुना (*d*) 4 गुना

(*vi*) समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजा, दूसरी भुजा से दुगुनी हो और त्रिभुज का क्षेत्रफल 64 sq. cm हो तो छोटी भुजा ज्ञात कीजिए।

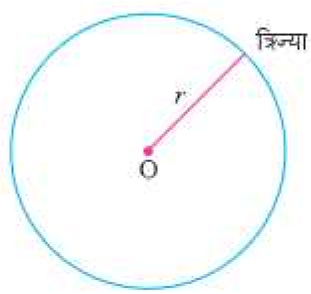
(*a*) 8 cm (*b*) 16 cm

(*c*) 24 cm (*d*) 32 cm

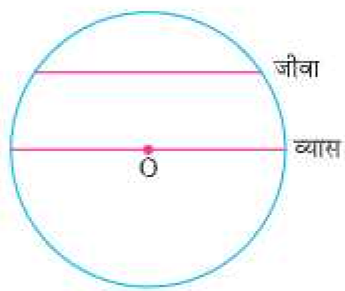
## वृत्त (Circle)

वृत्त एक साधारण बंद वक्र है जो किसी एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर स्थित बिंदुओ के बिन्दुपथ से बनता है।

- निश्चित बिंदु 'O' वृत्त का केन्द्र कहलाता है।
- वृत्त पर स्थित किसी बिंदु को वृत्त के केंद्र से मिलाने वाला रेखाखंड भाव स्थिर बिंदु से वृत्त के प्रत्येक बिंदु तक निश्चित दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाता है और इसे $r$ से निरूपित किया जाता है।



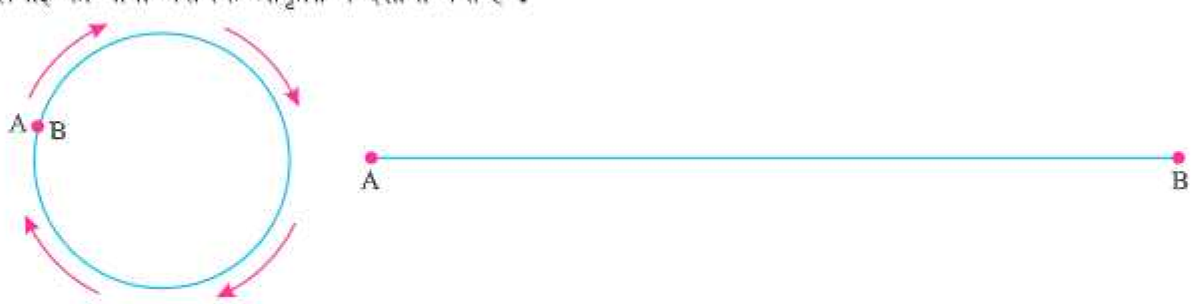

- वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड वृत्त की जीवा कहलाती है।
- यदि वृत्त की जीवा वृत्त के केंद्र में से होकर जाए तो वह वृत्त का व्यास कहलाती है। इसे '$d$' से निरूपित किया जाता है।




**वृत्त की परिधि :** एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी इसकी परिधि कहलाती है।

वृत्त की परिधि = वृत्त की सीमा का माप

एक वृत्ताकार की सीमा को मापने के लिए इसके साथ एक धागा रखो और फिर उस धागे को सीधा करके उसकी लंबाई को मापो जैसे कि आकृति में दर्शाया गया है :



## पाई ($\pi$) का मूल्य और परिधि का सूत्र ज्ञात करने के लिए एक प्रयोगी क्रिया (Lab activity to find the value of Pi (p) and formula of circumference)

**उद्देश्य :** पाई ($\pi$) का मूल्य ज्ञात करना।

**आवश्यक सामग्री :** (*i*) पेपर (*ii*) धागा (*iii*) कैंची (*iv*) ज्यामिती बॉक्स।

**विधि :** अलग–अलग त्रिज्याओं जैसे 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm और 6 cm के वृत्त खींचिए। धागे की सहायता से इनकी परिधि मापिए। अब धागे को सीधा करके उस की लंबाई मापिए।

| क्रम संख्या | त्रिज्या (सेंटीमीटर में) | व्यास (सेंटीमीटर में) | परिधि (धागे की लंबाई) (सेंटीमीटर में) | $\pi$ का मूल्य $= \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 6.3 | 3.15 |
| 2 | 2 | 4 | 12.5 | 3.125 |
| 3 | 3 | 6 | 18.8 | 3.133 |
| 4 | 4 | 8 | 25.1 | 3.14 |
| 5 | 5 | 10 | 31.4 | 3.14 |
| 6 | 6 | 12 | 37.6 | 3.133 |

ऊपर दी गई तालिका से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि वृत्त की परिधि और वृत्त का व्यास का अनुपात ($\pi$) लगभग बराबर है। इस को पाई ($\pi$) द्वारा दर्शाया गया है। पाई ($\pi$) का लगभग मान 3.14 अथवा $\frac{22}{7}$ है।

अत: हम कह सकते हैं

$$\pi = \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$$

$$\pi = \frac{C}{d}$$

$$C = \pi d$$

$$C = \pi (2r) \qquad [\because \text{ वृत्त का व्यास, वृत्त की त्रिज्या का दुगुना होता है}]$$

$$C = 2\pi r$$

$\therefore$ इसलिए, वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

अर्धवृत्त की परिधि $= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$

**उदाहरण-1 : वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए जिसका व्यास 12 cm है। ($\pi = 3.14$ लीजिए)**

**हल :** वृत्त का व्यास ($d$) $= 12$ cm

वृत्त की परिधि $= \pi d$

$= 3.14 \times 12$

$= 37.68$ cm

**उदाहरण-2 : वृत्त की परिधि 88 cm है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)**

**हल :** वृत्त की परिधि $= 88$ cm

$2\pi r = 88$

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 88$

$$r = \frac{88 \times 7}{2 \times 22}$$
$$r = 14 \text{ cm}$$

**उदाहरण-3 : एक वृत्ताकार तश्तरी (disc) का व्यास 28 cm है, को दो बराबर भागों में विभाजित किया गया है। प्रत्येक अर्धवृत्ताकार तश्तरी (disc) की परिधि ज्ञात कीजिए।**

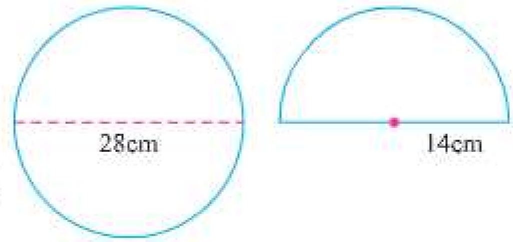
हल : वृत्ताकार तश्तरी का व्यास = 28 cm

वृत्ताकार तश्तरी की त्रिज्या = 14 cm

अर्धवृत्ताकार तश्तरी की परिधि $= \pi r$

$= \frac{22}{7} \times 14$

$= 44$ cm




अर्धवृत्ताकार तश्तरी की परिधि = अर्धवृत्ताकार की परिधि + वृत्त के व्यास की लंबाई

$= 44 + 28$

$= 72$ cm

**उदाहरण-4 : एक माली 28 m व्यास वाले वृत्तकार बाग के चारों ओर बाड़ लगाना चाहता है। कांटे वाली तार की लंबाई ज्ञात कीजिए यदि वह तार द्वारा दो बार वृत्ताकार बाग को बाड़ लगाता हो।**

हल : वृत्ताकार बाग का व्यास = 28 m

वृत्ताकार बाग की परिधि $= \pi d$

$= \frac{22}{7} \times 28$

$= 88$ m

एक बार चक्कर लगाने पर कांटेवाली तार की लंबाई = 88 m

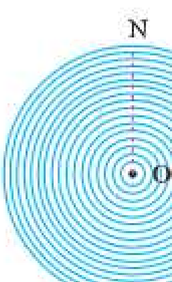
दो बार चक्कर लगाने पर कांटे वाली तार की लंबाई $= 88 \times 2 = 176$ m

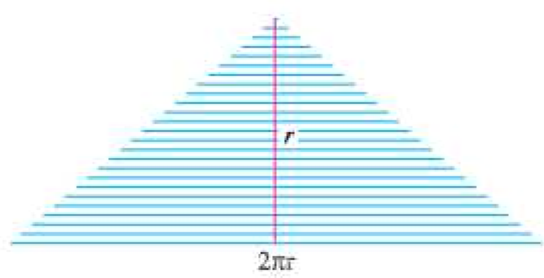
## वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए प्रयोगी क्रिया (Lab activity to find area of circle)

**उद्देश्य :** वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करना।

**आवश्यक सामग्री :** (*i*) अलग–अलग रंग की ऊन, (*ii*) कैंची (*iii*) फैवीकोल (*iv*) रंगीन पेन, (*v*) ज्यामिति बॉक्स

**विधि :** किसी त्रिज्या वाला एक वृत्त खींचिए, इस वृत को ऊन की सहायता से, केंद्र O से शुरू करके इस वृत्त के समकेंद्रीय भाग को ऊन से पूरा ढकें, ध्यान रखें कि कोई भाग खाली न रहे। ऊन के सभी टुकड़ों को ON की तरफ काटें तथा इन टुकड़ों को बाहरी वृत्ताकार टुकड़े से क्रमानुसार लगाने शुरू करो (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है) यह एक त्रिभुज का आकार लेगा। जिसका आधार बाहरी वृत्त की परिधि और ऊँचाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर है।



$$\text{त्रिभुज का आधार} = 2\pi r$$
$$\text{त्रिभुज की ऊँचाई} = r$$
$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{लंबाई}$$
$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$$
$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \pi r^2 \text{ वर्ग इकाइयाँ}$$
$$\text{इस लिए, वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2 \text{ वर्ग इकाइयाँ}$$

**उदाहरण-5 : वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 21 cm है। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)**

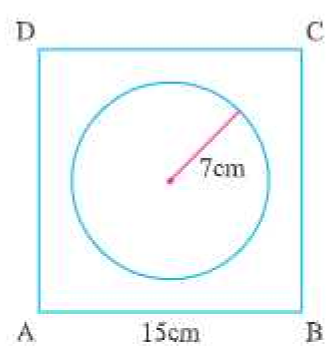
हल :
$$\text{वृत्त की त्रिज्या} = 21 \text{ cm}$$
$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$
$$= \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$
$$= 1386 \text{cm}^2$$

**उदाहरण-6 : वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 88 cm है।**

हल :
$$\text{वृत्त की परिधि} = 88 \text{ cm}$$
$$2\pi r = 88$$
$$\pi r = \frac{88}{2}$$
$$\frac{22}{7} \times r = 44$$
$$r = \frac{44 \times 7}{22}$$
$$r = 14 cm$$
$$\text{अब, वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$
$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$$
$$= 616 \text{ cm}^2$$

**उदाहरण-7 : 15cm भुजा वाली एक वर्गाकार शीट में से 7cm त्रिज्या वाली वृत्ताकार शीट को अलग किया गया है। शेष बची शीट का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। । ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)**

हल
$$\text{वर्गाकार शीट की भुजा} = 15 \text{ cm}$$
$$\text{वर्गाकार शीट का क्षेत्रफल} = (\text{भुजा})^2$$
$$= 15 \times 15$$
$$= 225 \text{ cm}^2$$
$$\text{अलग की वृत्ताकार शीट का त्रिज्या} = 7 \text{ cm}$$
$$\text{अलग की वृत्ताकार शीट का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$
$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$
$$= 154 \text{ cm}^2$$



बाकी बची शीट का क्षेत्रफल = वर्गाकार शीट का क्षेत्रफल – अलग की गई वृत्ताकार शीट का क्षेत्रफल

$$= 225 - 154$$
$$= 71 \text{ cm}^2$$

## प्रश्नावली - 11.3

**1.** वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी

(*i*) त्रिज्या ($r$) = 21 cm (*ii*) त्रिज्या ($r$) = 3.5 cm

(*iii*) व्यास ($d$) = 84 cm है।

**2.** यदि वृत्ताकार शीट की परिधि 176 m हो तो इसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

**3.** 8 cm व्यास वाले वृत्ताकार तश्तरी (disc) को दो भागों में विभाजित किया गया है। प्रत्येक अर्धवृत्ताकार भाग की परिधि (परिणाम) क्या होगी ?

**4.** वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी

(*i*) त्रिज्या ($r$) = 49 cm (*ii*) त्रिज्या ($r$) = 2.8 cm

(*iii*) व्यास ($d$) = 4.2 cm है।

**5.** एक माली 15 m त्रिज्या वाले वृत्ताकार बाग को बाड़ लगाना चाहता है। तार की लंबाई ज्ञात कीजिए यदि वह तीन बार बाड़ को लगाता है। ।₹ 5 प्रति m मीटर की दर से तार लगाने का कुल खर्च ज्ञात कीजिए। ($\pi$ = 3.14 लीजिए)

**6.** निम्नलिखित में से किस का क्षेत्रफल अधिक है और कितना ?

(*a*) 15 cm लंबाई और 5.4 cm चौड़ाई वाले आयत का

(*b*) 5.6 cm व्यास वाले वृत्त का।

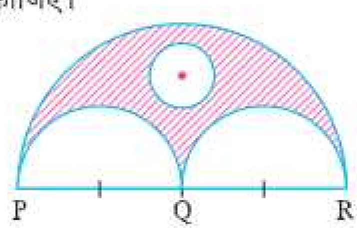
**7.** 15 cm लंबाई और 12 cm चौड़ाई वाली आयताकार शीट में से 3.5 cm त्रिज्या वाली वृत्ताकार शीट को अलग किया गया है। बाकी बची शीट का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**8.** 7 cm त्रिज्या वाले वृत्ताकार शीट में से 2.1 cm त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार शीट को अलग किया गया है। बाकी बची शीट का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**9.** संदीप ने 88 cm लंबाई वाली एक तार ली और वह उसे एक वृत्त के आकार में मोड़ देती है। वृत्त की त्रिज्या और वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि इसी तार को दुबारा एक वर्ग के आकार में मोड़ा जाता है तो इसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई क्या होगी ? कौन सी आकृति अधिक क्षेत्रफल घेरती है ?

**10.** एक बाग की लंबाई 120 m और चौड़ाई 85 m है। बाग में 14 m व्यास वाला एक वृत्ताकार कुआँ है। बाकी बचे हुए बाग में ₹5.50 प्रति वर्ग मीटर की दर से पौधे लगाने का खर्च ज्ञात कीजिए।

**11.** आकृति में PQ = QR और PR = 56 cm है और काटे गए वृत्त की त्रिज्या 7 cm है। Q अर्धवृत्त का केंद्र है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।




**12.** एक वृत्ताकार घड़ी की मिनट की सुई की लंबाई 18 cm है। मिनट की सुई की नोक (Tip) 1 घंटे में कितनी दूरी तय करती है ?

**13. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) 10 cm व्यास वाले वृत्त की परिधि है :

(*a*) 31.4 cm (*b*) 3.14 cm

(*c*) 314 cm (*d*) 35.4 cm

(*ii*) 14 त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि है :

(*a*) 88 cm (*b*) 44 cm

(*c*) 22 cm (*d*) 85 cm

(*iii*) 7 cm त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल है :

(*a*) 49 $cm^2$ (*b*) 22 $cm^2$

(*c*) 154 $cm^2$ (*d*) 308 $cm^2$

(*iv*) वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 154 $cm^2$ है।

(*a*) 4 cm (*b*) 6 cm

(*c*) 14 cm (*d*) 12 cm

(*v*) एक वृत्त का क्षेत्रफल, दूसरे वृत्त के क्षेत्रफल का 100 गुना है। इनकी परिधि का अनुपात ज्ञात कीजिए।

(*a*) 10 : 1 (*b*) 1 : 10

(*c*) 1 : 1 (*d*) 2 : 1

(*vi*) वृत्ताकार बाग का व्यास 9.8cm है। निम्नलिखित में से कौन सा इसका क्षेत्रफल होगा?

(*a*) 75.46 $cm^2$ (*b*) 76.46 $cm^2$

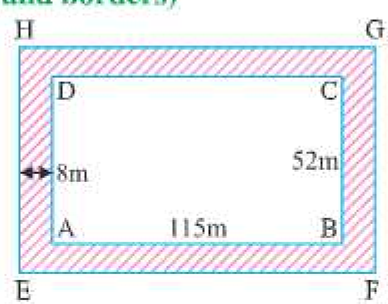
(*c*) 74.4 $cm^2$ (*d*) 76.4 $cm^2$

**इकाइयों का रूपांतरण (Conversion) :-**

| लंबाई की इकाइयाँ | क्षेत्रफल की इकाइयाँ |
|---|---|
| 1*cm* = 10*mm* | 1 $cm^2$ = (10 × 10) $mm^2$ = 100 $mm^2$ |
| 1dm = 10cm | 1 $dm^2$ = (10 × 10) $cm^2$ = 100 $cm^2$ |
| 1m = 10dm | 1 $m^2$ = (10 × 10) $dm^2$ = 100 $dm^2$ |
| 1m = 100cm | 1 $m^2$ = (100 × 100) $cm^2$ = 10000 $cm^2$ |
| 1 dam = 10m | 1 $dam^2$ = (10 × 10) $m^2$ = 100 $m^2$ |
| 1 hm = 100m | 1 $hm^2$ = (100 × 100) $m^2$ = 10000 $m^2$ |
| 1km = 1000m | 1 $km^2$ = (1000 × 1000) $m^2$ = 1000000 $m^2$ |
| | 1 एयर = 100 $m^2$ |
| | 1 हेक्टेयर = 10000 $m^2$ |

## रास्ते, चौपड़ और बार्डरों के क्षेत्रफल (Area of paths, cross roads and borders)

**उदाहरण-1 : एक आयताकार बाग 115 m लंबा और 52 m चौड़ा है, इसके बाहर चारों ओर 8 m चौड़ा रास्ता बनाना है। 10.50 प्रति $m^2$ की दर से इस रास्ते पर बजरी बिछाने का खर्च ज्ञात कीजिए।**




हल : मान लो, ABCD एक आयाताकार बाग की और (shaded) छायांकित भाग, 8 m चौड़े रास्ते को दर्शाता है।

आयताकार बाग की लंबाई ($l$) = 115 m

आयाताकार बाग की चौड़ाई ($b$) = 52 m

आयताकार बाग ABCD का क्षेत्रफल = $(115 \times 52)\ m^2$

= $5980\ m^2$

आयताकार बाग की रास्ते सहित लंबाई = 115 m + (8 m + 8 m) = 131 m

आयाताकार बाग की रास्ते सहित चौड़ाई = 52 m + (8 m + 8 m) = 68 m

रास्ते का क्षेत्रफल = $(131 \times 68)\ m^2 = 8908\ m^2$

रास्ते का क्षेत्रफल = बाग का रास्ते सहित क्षेत्रफल – बाग का क्षेत्रफल

रास्ते का क्षेत्रफल = $(8908 - 5980)\ m^2$

= $2928\ m^2$

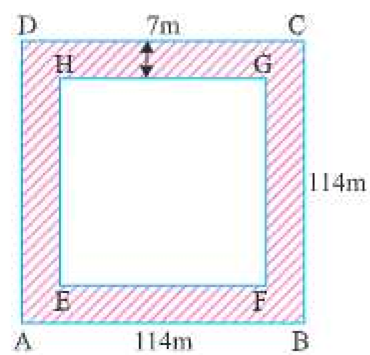
$1\ m^2$ रास्ते पर बजरी बिछाने का खर्च = ₹ 10.50

$2928\ m^2$ रास्ते पर बजरी बिछाने का खर्च = $2928 \times 10.50$

= ₹ 30744

**उदाहरण-2 : 114 m भुजा वाले वर्गाकार पार्क की सीमा के भीतर की ओर 7 चौड़ा रास्ता बनाया गया है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ₹225 प्रति 15 $m^2$ की दर से इसे सीमेंट कराने का खर्च ज्ञात कीजिए।**

**हल :** माना ABCD, 114 भुजा वाला एक वर्गाकार पार्क है। छायांकित भाग 7 मी. चौड़ा पथ को दर्शाता है।




EF = 114 m – (7 + 7) m

= 100$m$

वर्गाकार पार्क ABCD का क्षेत्रफल = (भुजा)$^2$

= $114 \times 114$

= $12996\ m^2$

EFGH का क्षेत्रफल = (भुजा)$^2$

= $100 \times 100$

= $10000\ m^2$

रास्ते का क्षेत्रफल = वर्गाकार पार्क ABCD का क्षेत्रफल – EFGH का क्षेत्रफल

= 12996 – 10000

= $2996\ m^2$

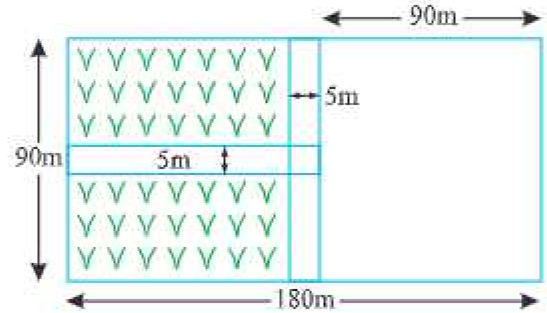
15 मी$^2$ की दर से सीमेंट कराने का खर्च = ₹225

$1\ m^2$ मी की दर से सीमेंट कराने का खर्च = $\frac{225}{15}$

$2996\ m^2$ की दर से सीमेंट कराने का खर्च = $\frac{225}{15} \times 2996$

= ₹44940

**उदाहरण-3 : एक स्कूल का एक मैदान 180 m लंबा और 90 m चौड़ा है। 90 m × 90 m क्षेत्र को प्रातःकाल की सभा के लिए रखा गया है। रखे गए भाग में 5 m चौड़ा रास्ता जो चौड़ाई के समांतर और बाकी बची लंबाई के समांतर है। जैसा आकृति में दर्शाया गया है। बाकी बचे भाग पर घास लगानी है। घास लगे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।**




हल : स्कूल के मैदान का क्षेत्रफल = $180\ m \times 90\ m$

$= 16200\ m^2$

प्रात:काल की सभा के लिए रखा क्षेत्र = $90 \times 90$

$= 8100\ m^2$

रास्ते का क्षेत्रफल जो चौड़ाई के समांतर है = $90 \times 5$

$= 450\ m^2$

रास्ते का क्षेत्रफल जो बाकी बची लंबाई के समांतर है = $90 \times 5 = 450\ m^2$

दोनो रास्तों का सांझा क्षेत्र = $5 \times 5$

$= 25\ m^2$

रास्ते का कुल क्षेत्रफल = $(450 + 450 - 25)$

$= 875\ m^2$

घाँस लगे क्षेत्र का क्षेत्रफल = मैदान का क्षेत्रफल – (प्रात:काल की सभा का क्षेत्रफल + रास्ते का कुल क्षेत्रफल)

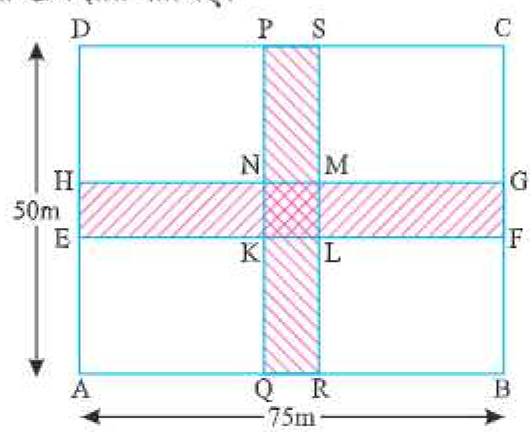
$= 16200 - (8100 + 875)$

$= 16200 - 8975$

$= 7225\ m^2$

**उदाहरण-4 : 75 m लंबाई और 50 m चौड़ाई वाले एक आयताकार पार्क के मध्य से होकर 6 m चौड़ाई के दो पथ, एक दूसरे पर लंब तथा चौपड़ के आकार के है जो भुजाओं के समांतर है। पथों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा ₹120 प्रति $m^2$ की दर से पथों को बनाने का भी खर्च ज्ञात कीजिए।**

हल : ABCD एक आयताकार पार्क को दर्शाता है जिसकी लंबाई $AB = 75\ m$ और चौड़ाई $BC = 50\ m$ है। रास्तों का क्षेत्रफल, छायांकित भाग का क्षेत्रफल है। भाव, आयत EFGH का क्षेत्रफल, और PQRS का क्षेत्रफल। परंतु, इस तरह वर्ग KLMN का क्षेत्र दो बार लेना पड़ता है, जिसे बाद में घटाना पड़ेगा।




अब, $EF = 75\ m$, $FG = 6\ m$, $PQ = 50\ m$, $QR = 6\ m$, $KL = 6\ m$, रास्ते का क्षेत्रफल = आयत EFGH का क्षेत्रफल + आयत PQRS का क्षेत्रफल – वर्ग KLMN का क्षेत्रफल

$= (EF \times FG) + (PQ \times QR) - (KL)^2$

$= (75 \times 6) + (50 \times 6) - (6 \times 6)$

$= 450 + 300 - 36$

$= 714\ m^2$

$1\ m^2$ रास्ता बनाने का व्यय = ₹ 120

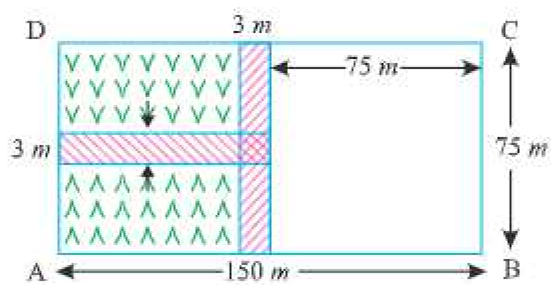
$714\ m^2$ रास्ता बनाने का व्यय = $714 \times 120$

= ₹ 85680

इसलिए, रास्ता बनाने का व्यय ₹ 85680 है।

## प्रश्नावली - 11.4

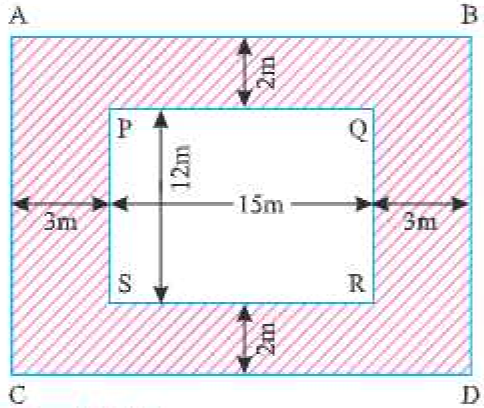
1. एक आयताकार पार्क की लम्बाई 80 m और चौड़ाई 65 m है। पार्क के आस पास 5 m चौड़ा एक रास्ता बनाना है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक आयताकार बगीचा 110 m मीटर लंबा और 72 m चौड़ा है। 8 m चौड़ाई वाला एक रास्ता (पथ) बगीचे के इर्द-गिर्द बनाया गया है। इस रास्ते पर 11.50 प्रति $m^2$ की दर से बजरी बिछाने का खर्च ज्ञात कीजिए।
3. एक कमरे की लंबाई 12 m और चौड़ाई 8 m है। कमरे के चारों ओर बाहर 3 m चौड़ा एक बरामदा बनाया गया है। ₹275 प्रति $m^2$ की दर से फर्श पर संगमरमर लगवाने का खर्च ज्ञात कीजिए।
4. एक कागज़ 30 cm × 24 cm माप का है। इसके चारों तरफ से 4 cm चौड़ी एक पट्टी काटी गई है। बाकी बचे कागज़ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, और काटी हुई पट्टी का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।
5. 40 m भुजा वाला एक वर्गाकार बगीचे के भीतर बार्ड के साथ 2 m चौड़ाई वाला एक रास्ता बनाया गया है।
   (i) रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
   (ii) बाकी बचे बगीचे में ₹50 प्रति $m^2$ की दर से घास लगवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।
6. एक नर्सरी स्कूल का खेल का मैदान 150 m लंबा और 75 m चौड़ा है। इस का 75 m × 75 m माप वाला भाग झूलों और शेष खेलों के लिए रखा गया है। बाकी बचे भाग में 3 m चौड़ाई के दो पथ, एक दूसरे पर लंब ऐसे बने हुए हैं जो भुजाओं के समांतर हैं। (जैसे आकृति में दर्शाया गया है)। बाकी बचे भाग को घास से ढका गया है। घास द्वारा ढके भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



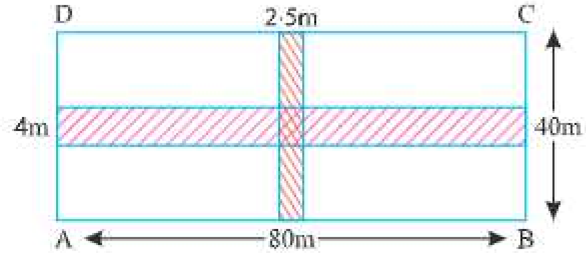

7. एक आयताकार पार्क के मध्य से होकर 8 m चौड़ाई के दो पथ एक दूसरे पर लंब ऐसे बने हुए हैं जो भुजाओं के समांतर हैं। यदि पार्क की लंबाई 480 m और चौड़ाई 250 m है तो रास्तों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। रास्तों के बिना पार्क का क्षेत्रफल भी पता करो।
8. 92 m लंबाई और 70 m चौड़ाई वाले आयताकार खेत में खेल की भुजाओं के समांतर दो रास्ते बनाऐ गए हैं जो एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं। यदि प्रत्येक रास्ते की चौड़ाई 4 m है तो
   (i) रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
   (ii) ₹150 प्रति $m^2$ की दर से रास्तों को बनाने का खर्च ज्ञात कीजिए।

**9.** निम्नांकित आकृतियों के छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(*i*)




(*ii*)




## हमने क्या चर्चा की ?

**1. आयत और वर्ग के लिए,**

(*i*) आयत का परिमाप = 2 (लंबाई + चौड़ाई) इकाइयाँ

(*ii*) आयत का क्षेत्रफल = (लंबाई × चौड़ाई) वर्ग इकाइयाँ

(*iii*) आयत की लंबाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}}$ इकाइयाँ और चौड़ाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लंबाई}}$ इकाइयाँ

(*iv*) वर्ग का परिमाप = (4 × भुजा) इकाइयाँ

(*v*) वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा × भुजा) वर्ग इकाइयाँ

(*vi*) वर्ग की भुजा = $\sqrt{\text{क्षेत्रफल}}$ इकाइयाँ

**2. समांतर चतुर्भुज के लिए,**

(*i*) समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = (आधार × शीर्ष लंब) वर्ग इकाइयाँ

(*ii*) आधार = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लंब}}$ और शीर्ष लंब = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$ इकाइयाँ

**3. त्रिभुज के लिए,**

(*i*) त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × (आधार × शीर्ष लंब) वर्ग इकाइयाँ

**4. वृत्त के लिए,**

(*i*) वृत्त की परिधि = $2\pi r$ या $\pi d$ इकाइयाँ

(*ii*) वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r^2$ वर्ग इकाइयाँ

### सीखने के परिणाम

**इस अध्याय के पूर्ण होने पर विद्यार्थी :**

1. तल पर बनी आकृतियों के क्षेत्रफल और परिमाप में अंतर को समझने के योग्य हैं।
2. इकाई वर्ग के प्रयोग से बंद आकृतियों के क्षेत्रफल का अनुमान लगाने के योग्य हैं।
3. समतल आकृतियाँ जैसे वर्ग, आयत, त्रिभुज, समांतर चतुर्भुज के परिमाप और क्षेत्रफल की गणना करने के योग्य हैं।
4. सूत्र के प्रयोग से वृत्त की परिधि और क्षेत्रफल ज्ञात करने के योग्य हैं।
5. आवश्यकता अनुसार, परिमाप और क्षेत्रफल की इकाइयों को बदलने के योग्य हैं।
6. दैनिक जीवन से संबंधित परिस्थितियों को हल करने के सीखे गऐ सूत्र का प्रयोग करने के योग्य हैं।

# उत्तरमाला

## प्रश्नावली 11.1

**1.** (*i*) 86$cm$; 420$cm^2$ (*ii*) 23.8$cm$ ; 23.5$cm^2$

**2.** (*i*) 116$cm$ ; 841$cm^2$ (*ii*) 33.2$cm$ ; 68.89$cm^2$

**3.** 1369$m^2$ **4.** 20$cm$ ; 98$cm$

**5.** 40$cm$ ; वर्ग का क्षेत्रफल अधिक है ; 64$cm^2$

**6.** 45$m$ ; 340$m$ **7.** ₹1507.50 **8.** ₹516.75

**9.** (*i*) 38$cm$ ; 52$cm^2$ (*ii*) 29$cm$ ; 19.5$cm^2$

**10.** (*i*) *b* (*ii*) *a* (*iii*) *d*
(*iv*) *a* (*v*) *c* (*vi*) *a*

## प्रश्नावली 11.2

**2.** (*i*) 135 वर्ग इकाइयाँ (*ii*) 114 वर्ग इकाइयाँ

**2.** (*i*) 60$m^2$ (*ii*) 9$cm^2$

**3.** (*i*) 54$cm^2$ (*ii*) 54.6$cm^2$

**4.** (*i*) 7.2$cm$ (*ii*) 10$cm$

**5.** 810$cm^2$ **6.** 35$cm$ ; 49$cm$

**7.** (*i*) 16.8$cm^2$ (*iii*) 27$cm^2$

**8.** (*i*) 6$cm$ (*ii*) 17.5$cm$

**9.** 1444$cm^2$ **10.** 54$cm^2$ ; 7.2$cm$

**11.** 27$cm^2$ ; 6$cm$

**12.** (*i*) *c* (*ii*) *b* (*iii*) *c*
(*iv*) *d* (*v*) *b* (*vi*) *a*

## प्रश्नावली 11.3

**1.** (*i*) 132$cm$ (*ii*) 22$cm$ (*iii*) 264$cm$

**2.** 28$m$ **3.** 20.6$cm$

**4.** (*i*) 7546$cm^2$ (*ii*) 24.64$cm^2$ (*iii*) 13.86$cm^2$

**5.** 282.6 $m$; ₹1413 **6.** आयत का क्षेत्रफल अधिक है ; 56.36$cm^2$

**7.** 141.5$cm^2$ **8.** 140.14$cm^2$

**9.** 14$cm$ ; 616$cm^2$ ; 22$cm$ ; वृत्त का क्षेत्रफल अधिक है। **10.** ₹55243

**11.** 462$cm^2$ **12.** 113.04$cm$

**13.** (*i*) *a* (*ii*) *a* (*iii*) *c*
(*iv*) *c* (*v*) *a* (*vi*) *a*

## प्रश्नावली 11.4

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | $1550m^2$ | **2.** | ₹36432 | **3.** | ₹42900 |
| **4.** | $352cm^2$ ; $368cm^2$ | **5.** | (*i*) $304m^2$ | (*ii*) | 64800 |
| **6.** | $5184m^2$ | **7.** | $5776m^2$ ; $114224m^2$ | | |
| **8.** | (*i*) $632m^2$ | (*ii*) | ₹94800 | | |
| **9.** | (*i*) $156m^2$ | (*ii*) | $410m^2$ | | |

अध्याय 12

I1J9E4

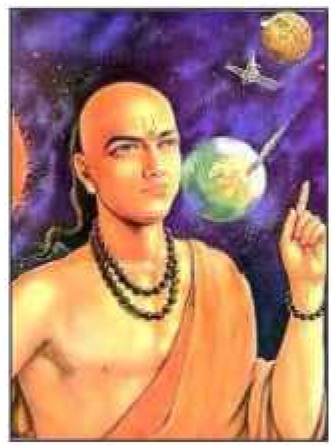
# बीजीय व्यंजक

**उद्देश्य :-**

**इस अध्याय में आप सीखेंगे :-**

1. बीजगणित से संबंधित शब्द जैसे अचर, चर पद, पदों के गुणांक को पहचानना।
2. एक या दो चरों वाले व्यंजक बनाना।
3. बीजगणित व्यंजकों को जोड़ना और घटाना
4. चर के दिए गए मान के लिए किसी व्यंजक का मान पता करना।
5. दैनिक जीवन में बीजगणित व्यंजकों से संबंधित ज्ञान का प्रयोग करना।

## हमारे देश का मान (Our Nations' Pride)



भास्कराचार्य (1114-1185) भारतीय गणितज्ञ और भू-विज्ञानी थे। उनका जन्म कर्नाटक के बीजापुर नामक स्थान में हुआ। इनके द्वारा किये गए कार्यों ने 12वीं शताब्दी में गणित और भू-विज्ञान के ज्ञान में महत्वपूर्ण योगदान दिया। इन्हें मध्यकालीन भारत के महान गणितज्ञ के रुप में जाना जाता है। इनके मुख्य कार्यों को चार भागों में बांटा गया है। जिन्हें लीलावती बीजगणित, ग्रहगणित और गोलाध्य के नाम से जाना जाता है। यह चार भाग क्रमश: अंकगणित, बीजगणित, ग्रहों की गति से संबंधित गणित और गोलों से संबंधित हैं। आधुनिक समय में धरती के गुरुत्व बल की खोज का श्रेय न्यूटन को दिया जाता है। लेकिन बहुत कम लोग जानते हैं कि गुरुत्व बल का भेद न्यूटन से कई शताब्दियों पहले भास्कराचार्य ने उजागर किया था। 20 नवंबर 1981 को भारतीय अंतरिक्ष अनुसंधान संगठन (ISRO) ने इस महान गणितज्ञ और भू-विज्ञानी के सम्मान में भास्कर II नाम का उपग्रह छोड़ा।

## भूमिका

हम छठी कक्षा में पहले से ही $x+5, 2x-y, 3x+y, 2y-7$ आदि के बारे में जान चुके हैं। और इन व्यंजकों का प्रयोग करते हुए अक्षर समस्या और साधारण समीकरण बनाने के बारे में भी समझ चुके हैं।

इस अध्य में आप बीजगणित व्यंजकों के बारे मेंऔर जानकारी लेंगे। आप सीखेंगे कि ''बीजगणित व्यंजक कैसे बनते हैं ?'' ''एक  पदी के गुणनखंड क्या होते हैं ? एक पदी के गुणांक क्या होते हैं ?'' समान और असमान पद क्या होते हैं ? बहुपद और उसके प्रकार कौन से हैं ? और किसी पर के मान के लिए किसी व्यंजक का मान क्या होगा?

**बीजीय व्यंजक (Algebraic Expression) :** आगे बढ़ने से पहले आइए बीजीय व्यंजकों से संबंधित कुछ परिभाषाओं को दोहराएं।

1. **अचर (Constant) :** अचर वह पद है, जिसका मूल्य निश्चित होता है। $3, 5, 0, -7, \frac{-2}{3}, \sqrt{3}$ आदि अचर के कुछ उदाहरण हैं।

- वास्तव में प्रत्येक संख्या अचर होती है।

**2.** **चर (Variable) :** चर से अभिप्राय ऐसे पद से है, जिनका मान स्थिर नहीं होता। हम चर के लिए अंग्रेज़ी वर्णमाला का करते हैं। उदाहरण के लिए $x, y, z, s, t$ आदि।

आइए ! हम 3 से छोटी कोई संख्या लें। ये संख्याएं –10, –7. –6, –3, –1, 0, 1. 2 और इसके अलावा और भी बहुत सारी संख्याएं हो सकती हैं। इस प्रकार जब हम 3 से छोटी संख्या के बारे में सोचते हैं तो हमारे पास कोई स्थिर संख्या नहीं होती जो 3 से छोटी है। इस प्रकार हम लिखेंगे $x < 3$

जहाँ $x$ का मूल्य बदलता (vary) रहता है। जो कि 3 से छोटा है।

$\therefore$ $x$ एक चर है।

**3.** **पद (Term) :** पद एक अचर संख्या, चर संख्या या चर तथा अचर संख्याओं के समूह के रूप में (केवल गुणा तथा भाग) होता है।

$$7, y, 5b, xy, \frac{-3x}{2y}, \frac{7m}{8}, \frac{5}{t} \text{ आदि}$$

**बीजीय व्यंजक :** एक या एक से अधिक पदों का वह समूह जो कि जोड़ व्यवकलन के प्रयोग से अलग-अलग किये जाते हैं, बीजीय व्यंजक कहलाते हैं। उदाहरण के लिए $4 + 10x, 5x - 7y, 3a + 7b, ax + by - cz$ आदि।

- केवल (–) व्यवकलन और (+) योग ही पदों को अलग करते हैं जबकि गुणन और विभाजन पदों को नहीं करते।

**गुणनखंड (Factors) :** पद, गुणनखंडों के गुणनाफल से बने होते हैं। उदाहरण के लिए पद $2xy + 7z$ के पद $2xy$ के तीन गुणनखंड 2, $x$ और $y$ हैं और पद 7z के दो गुणनखंड 7 और z हैं। व्यंजक $2xy + 7z$ के दो पद हैं।

**गुणांक (Coefficient) :** किसी पद का कोई भी गुणनखंड बाकी पदों के गुणनफल का गुणांक कहलाता है। विशेषकर अचर भाग को संख्यात्मक गुणांक कहलाता है और शेष भाग शाब्दिक गुणांक या चर गुणांक (literal coefficient or variable coefficient) कहलाता है।

**उदाहरण के लिए :** व्यंजक लीजिए

$3x^2y + 7xy - 8$

$3x^2y$ में संख्यात्मक गुणांक = 3

$y$ का गुणांक = $3x^2$

$x^2$ का गुणांक = $3y$

$x$ का गुणांक = $3xy$

इस प्रकार : पद $7xy$ में

संख्यात्मक गुणांक = 7

$x$ का गुणांक = $7y$

$y$ का गुणांक = $7x$

**उदाहरण-1 : निम्नलिखित व्यजकों में पद, गुणनखंड और संख्यात्मक गुणांक लिखें।**

(*a*) $xy - x$ (*b*) $17xy + 3$

(*c*) $30x^2yz + 70x$ (*d*) $10m^2n + 3pq + 17z$

हल :

| बीजीय व्यंजक | पद | गुणनखंड | संख्यात्मक गुणांक |
|---|---|---|---|
| (*a*) $xy - x$ | $xy$<br>$-x$ | $x, y$<br>$x$ | 1<br>–1 |
| (*b*) $17xy + 3$ | $17xy$<br>3 | 17, $x$, $y$<br>3 | 17<br>3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (c) $30x^2yz + 70x$ | $30x^2yz$<br>$70x$ | $30, x, x, y, z$<br>$70, x$ | 30<br>70 |
| (d) $10m^2n + 3pq + 17z$ | $10m^2n$<br>$3pq$<br>$17z$ | $10, m, m, n$<br>$3, p, q$<br>$17, z$ | 10<br>3<br>17 |

**समान पद (Like Terms) :** जब पदों के बीजीय गुणनखंड एक जैसे ही हों, तो वे पद समान पद कहलाते हैं। उदाहरण के लिए $3x^2y$ और $-7x^2y$, $2xyz$ और $7xyz$, $-3x^2yz^2$ और $2x^2yz^2$ आदि।

**नोट :** समान पदों के संख्यात्मक गुणांक भिन्न-भिन्न हो सकते हैं, पर शाब्दिक गुणांक बराबर होते हैं।

**असमान पद (Unlike terms) :** जब पदों के बीजीय गुणनखंड भिन्न-भिन्न हों, तो वे असमान पद कहलाते हैं। उदाहरण के लिए $xy^2$ और $xyz$, $x^2y^2z$ और $xyz^2$, $3x^2$ और $3y^2$ आदि।

**उदाहरण-2 : समान पदों की पहचान कीजिए :-**

**(a) $2xy, 3x^2, -7x^2, 3xyz$ ਅਤੇ $7xy$**

**(b) $7x^2yz, 3x^2y^2, 2xy^2, -8x^2y^2$**

हल : (a) $xy$ चर गुणनखंड वाले पद $2xy, 7xy$.

$\therefore$ $2xy, 7xy$ समान पद हैं।

$x^2$ चर गुणनखंड वाले पद

$3x^2, -7x^2$

$\therefore$ $3x^2, -7x^2$ समान पद है।

(b) $x^2y^2$ चर गुणनखंड वाले पद

$3x^2y^2, -8x^2y^2$

$\therefore$ $3x^2y^2$ और $-8x^2y^2$ समान पद हैं।

**उदाहरण-3 : जाँच कीजिए कि निम्नलिखित पदों के जोड़े समान पद हैं या असमान पद ?**

**(a) $10p^2q$ और $10pq^2$**

**(b) $7xy^2$ और $-3xy^2$**

हल : (a) $10p^2q$ और $10pq^2$

$10p^2q$ में चर गुणांक $= p^2q$

$10pq^2$ में चर गुणांक $= pq^2$

$\therefore$ $10p^2q$ और $10pq^2$ असमान पद हैं।

(b) $7xy^2$ और $-3xy^2$

$7xy^2$ में चर गुणांक $= xy^2$

$-3xy^2$ में चर गुणांक $= xy^2$

$\therefore$ $7xy^2$ और $-3xy^2$ समान पद हैं।

## बीजीय व्यंजकों के प्रकार (Types of Algebraic expressions)

| पदों की संख्या | व्यंजक का नाम | उदाहरण |
|---|---|---|
| एक | एक पदी | $x, 2y, \frac{5z}{3}, -\frac{7x^2}{9}$ |
| दो | द्विपदी | $x + 9, 3x - 2y$ <br> $3x^2 - z^2$ |
| तीन | त्रिपदी | $x + y + z, p^2 + q^2 + r^2,$ <br> $pq + r + t^2$ |
| दो या दो से अधिक पद | बहुपद | $x, 3x + 2y, p + q + z,$ <br> $x^2 + y^2 + zx$ |

**उदाहरण-4 : निम्नलिखित व्यंजकों को एकपदी, द्विपदी और त्रिपदी के रूप में वर्गीकृत कीजिए।**

(*a*) $xy + x - z$ (*b*) $16pqr$ (*c*) $m^2 + n^2$ (*d*) $\frac{7x}{2} + \frac{3y}{5}$

**हल :** (*a*) बीजीय व्यंजक $xy + x - z$

पदों की संख्या = 3

∴ यह त्रिपदी है।

(*b*) बीजीय व्यंजक $16\,pqr$

पदों की संख्या = 1

∴ यह एकपदी है।

(*c*) बीजीय व्यंजक $m^2 + n^2$

पदों की संख्या = 2

∴ यह द्विपदी है।

(*d*) बीजीय व्यंजक $\frac{7x}{2} + \frac{3y}{5}$

पदों की संख्या = 2

∴ यह द्विपदी है।

**पेड़ आरेख (Tree diagram) :** यह बीजीय व्यंजकों के पदों और गुणनखंडों को आरेख द्वारा दर्शाने की विधि है। बीजीय व्यंजक के पदों और गुणनखंडों को पेड़ आरेख द्वारा दर्शाया जा सकता है। जैसे कि निम्नलिखित उदाहरण में दिखाया गया है।

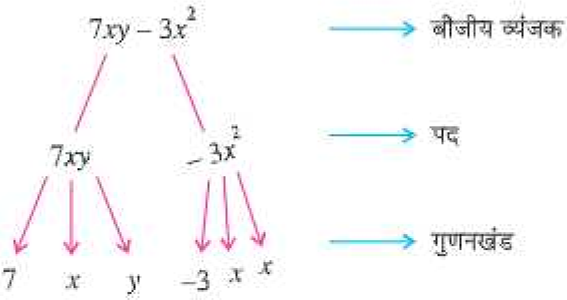
**उदाहरण-5 : निम्नलिखित व्यंजकों में पदों और गुणनखंड़ों को पेड़ आरेख द्वारा दर्शाएं।**

(*a*) $7xy - 3x^2$

(*b*) $3xy + 2x^2z^2 - 8t$

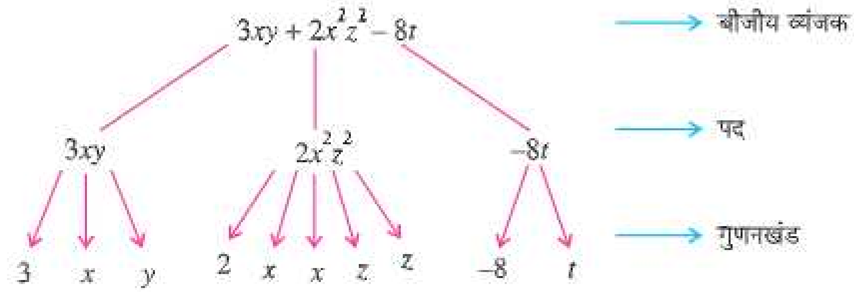
**हल** (*a*) दिया गया व्यंजक $7xy - 3x^2$

पेड़ आरेख




(*b*) दिया गया व्यंजक $3xy + 2x^2z^2 - 8t$

पेड़ आरेख




## प्रश्नावली - 12.1

**1.** **निम्नलिखित स्थितियों में बीजीय व्यंजक लिखें।**

(*i*) $a$ और $b$ का योग

(*ii*) संख्या $z$ को स्वयं इससे गुणा किया जाता है।

(*iii*) $x$ और $y$ के गुणनफल और $m$ और $n$ के गुणनफल का योग

(*iv*) संख्या $p$ को 5 से भाग करके $q$ से गुणा करना।

(*v*) संख्या $z$ के आधे को संख्या $t$ के दुगुने में जोड़ना।

(*vi*) संख्याओं $x$ और $z$ के वर्गों का योग

(*vii*) संख्याओं $x$ और $z$ के योगफल को इनके गुणनफल से घटाना।

**2.** निम्नलिखित में से अचर पदों और चर पदों के भिन्न-भिन्न करें।

$7, xy, \frac{3x^2}{2}, \frac{72z}{3}, \frac{-8z}{3x^2}$

**3.** निम्नलिखित व्यंजकों में से पदों और उनके गुणनखंडों को छाँटिए।

(*a*) $2x^2 + 3yz$ (b) $15x^2y + 3xy^2$

(*c*) $-7xyz^2$ (*d*) $100pq + 10p^2q^2$

(*e*) $xy + 3x^2y^2$ (*f*) $-7x^2yz + 3xy^2z + 2xyz^2$

**4.** निम्नलिखित व्यंजकों को एकपदी, द्विपदी और त्रिपदी के रुप में वर्गीकृत करें।

(a) $7x + 3y$ (b) $5 + 2x^2y^2z$

(c) $ax + by^2 + cz^2$ (d) $3x^2 y^2$

(e) $1 + x$ (f) $10$

(g) $\frac{3}{2}p + \frac{7}{6}q$

**5.** नीचे दिए गए व्यंजकों में से प्रत्येक के संख्यात्मक गुणांक लिखिए।

(a) $2x$ (b) $\frac{-3}{2}xyz$

(c) $\frac{7}{2}x^2 p$ (d) $-p^2q^2$

(e) $-5mn^2$

**6.** बताइए कि दिए गए पदों के युग्म समान पदों के हैं या असमान पदों के हैं।

(a) $-3y, \frac{7}{8}y$ (b) $-32, -32x$

(c) $3x^2y$ , $3xy^2$ (d) $14mn^2$, $14mn^2q$

(e) $8pq$, $32pq^2$ (f) $10, 15$

**7.** निम्नलिखित बीजगणित व्यंजकों में गुणांक लिखिए :-

(a) $x$ का $x^2y$ में (b) $xyz$ का $15x^2yz$ में

(c) $3pq^2$ का $3p^2q^2r^2$ में (d) $m^2$ का $m^2 + n^2$ में

(e) xy का $x^2y^2 + 2x + 3$ में

**8.** नीचे दिए गए व्यंजकों के पदों और उनके गुणनखंड़ों को पहचानें और उन्हें पेड़ आरेख द्वारा भी दर्शाइए।

(a) $12xy + 7x^2$ (b) $p^2q^2 + 3mn^2 - 2pqr$

(c) $2x^2y^2 + xyz^2 + zy$ (d) $\frac{3}{2}x^3 + 2x^2y^2 - 7y^3$

**9.** **बहुवैकल्पिक प्रश्न**

(i) एक पद वाले व्यंजक को क्या कहते हैं ?

(a) एकपदी (b) द्विपदी

(c) त्रिपदी (d) इनमें से कोई नहीं

(ii) $8 - x + y$ में $x$ का गुणांक

(a) $-1$ (b) $1$

(c) $8$ (d) $0$

(iii) निम्नलिखित में से कौन से समान पद हैं ?

(a) $7x, 12y$ (b) $15x, 12x$

(c) $3xy, 3x$ (d) $2y, -2yx$

(iv) पदों को मिलाकर क्या बनता है ?

(a) व्यंजक (b) चर

(c) अचर (d) गुणनखंड

## बीजगणित व्यंजकों के योग और व्यवकलन (Addition and subtraction of Algebraic expressions)

मान लीजिए आपके पास 15 सेब हैं और आपके भाई के पास 12 सेब हैं तो आप दोनों के पास कुल कितने सेब हैं ? उत्तर सरल है। 15 + 12 = 27 सेब

यदि आप सेब के $x$ मानकर चलें तो आपके पास $15x$ और आपके भाई के पास $12x$ सेब हैं जो कि जोड़े जा सकते हैं। - $15x + 12x = 27x$

इसी प्रकार मान लीजिए कि आपके पास 12 पेन हैं और आपके भाई के पास 8 पेंसिलें हैं। क्या आप 12 पेनों और 8 पेंसिलों को जोड़ सकते हैं ? उत्तर नहीं। हम केवल यह कह सकते हैं कि हमारे पास 12 पेन और 8 पेंसिलें हैं।

**समान पदों का जोड़ (Addition of like terms) :** दो समान पदों का योग भी समान पद ही होता है। जिसका संख्यात्मक गुणांक दोनों पदों के संख्यात्मक गुणांक का योगफल होता है।

उदाहरण के लिए :

$$2y + 3y = (2 + 3)\,y = 5y$$
$$3x + 7x + 8x = (3 + 7 + 8)x = 18\,x$$
$$2ab + 5ab + 7ab = (2 + 5 + 7)ab = 14ab$$

**उदाहरण-1 : $3xy^2, 7xy^2, -2xy^2$ का योग ज्ञात कीजिए।**

हल : दिए गए पद समान पद हैं।

इनके संख्यात्मक गुणांक क्रमश: 3, 7 और $-2$ हैं।

$$3xy^2 + 7xy^2 + (-2xy^2)$$
$$= (3 + 7 - 2)xy^2$$
$$= (10 - 2)xy^2$$
$$= 8xy^2$$

**उदाहरण-2 : $9xy, -3xy, -8xy, 5xy$ का योग ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\text{योगफल} = 9xy + (-3xy) + (-8xy) + (5xy)$$
$$= (9 - 3 - 8 + 5)xy$$
$$= (9 + 5 - 3 - 8)xy$$
$$= (14 - 11)xy$$
$$= 3xy$$

**बीजीय व्यंजकों का योगफल :** बीजगणित व्यंजकों को जोड़ने के लिए हम समान पदों को इकट्ठा करते हैं और फिर उन का योग करते है। इन के योग की दो विधियाँ है।

(*i*) **क्षैतिज (Horizontal) विधि :** इस विधि द्वारा सारे व्यंजकों को एक पंक्ति में लिखा जाता है और समान पदों को इकट्ठा किया जाता है और फिर उन्हें जोड़ा जाता है।

(*ii*) **स्तंभ (Column) विधि :** इस विधि में प्रत्येक व्यंजक को इस प्रकार पंक्तियों में लिखा जाता है कि समान पद कॉलम में एक दूसरे के नीचे आएं। फिर उन्हें कॉलम के अनुसार जोड़ किया जाता है।

**उदाहरण-3 : (*i*) बीजीय व्यंजकों $2x + 3y - 7z$ और $3x + 4y + 8z$ को जोड़िए।**

हल : क्षैतिज विधि

$$(2x + 3y - 7z) + (3x + 4y + 8z)$$
$$= 2x + 3y - 7z + 3x + 4y + 8z$$
$$= 2x + 3x + 3y + 4y - 7z + 8z$$
$$= (2 + 3)x + (3 + 4)y + (-7 + 8)z$$
$$= 5x + 7y + z$$

स्तंभ विधि :

$$\begin{array}{r} 2x + 3y - 7z \\ 3x + 4y + 8z \\ \hline 5x + 7y + z \\ \hline \end{array}$$

(*ii*) **बीजीय व्यंजकों $5x + 7y - 2z$, $3x + 3y + 8z$ और $7x + 2y - 3z$ को जोड़िए।**

हल : क्षैतिज विधि :

$$(5x + 7y - 2z) + (3x + 3y + 8z) + (7x + 2y - 3z)$$
$$= 5x + 3x + 7x + 7y + 3y + 2y - 2z + 8z - 3z$$
$$= (5 + 3 + 7)x + (7 + 3 + 2)y + (-2 + 8 - 3)z$$
$$= 15x + 12y + 3z$$

स्तंभ विधि :

$$\begin{array}{r} 5x + 7y - 2z \\ 3x + 3y + 8z \\ 7x + 2y - 3z \\ \hline 15x + 12y + 3z \\ \hline \end{array}$$

(*iii*) **बीजीय व्यंजकों $3x^3 + 7xy - 8z^2x$, $2x^3 - 3xy + 3z^2x$, $x^3 - 2xy + 5z^2x$ को जोड़िए।**

हल : क्षैतिज विधि :

$$(3x^3 + 7xy - 8z^2x) + (2x^3 - 3xy + 3z^2x) + (x^3 - 2xy + 5z^2x)$$
$$= 3x^3 + 2x^3 + x^3 + 7xy - 3xy - 2xy - 8z^2 x + 3z^2 x + 5z^2x$$
$$= (3 + 2 + 1)x^3 + (7 - 3 - 2)xy + (-8 + 3 + 5) z^2 x$$
$$= 6x^3 + 2xy + 0z^2 x$$
$$= 6x^3 + 6xy$$

स्तंभ विधि :

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 7xy - 8z^2x \\ 2x^3 - 3xy + 3z^2x \\ +\ x^3 - 2xy + 5z^2x \\ \hline 6x^3 + 2xy + 0z^2x \\ \hline \end{array}$$

**समान पदों का व्यवकलन (Subtraction of like terms) :** समान पदों का व्यवकलन, बिल्कुल पूर्णांकों की तरह ही किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में घटाने वाले प्रत्येक पद का चिह्न बदलें और उनका योग करें।

**उदाहरण-4 : घटाएं (*a*) $7x^2$ में से $3x^2$ को (*b*) $2xy^2$ में से $-3xy^2$ को**

हल : (*a*) $7x^2 - 3x^2 = (7 - 3)x^2 = 4x^2$

(*b*) $2xy^2 - (-3xy^2) = 2xy^2 + 3xy^2$

$= (2 + 3)xy^2 = 5xy^2$.

**बीजीय व्यंजकों को घटाना (Subtraction of Algebraic expression) :** बीजीय व्यंजकों को दो विधियों द्वारा घटाया जा सकता है।

**(*i*) क्षैतिज विधि :** घटाने वाले व्यंजक के प्रत्येक पद का चिह्न बदल दें। (– को + में और + को – में बदलें) और उन्हें जोड़ें।

**(*ii*) स्तंभ विधि :** दोनों व्यंजकों को एक दूसरे के नीचे इस प्रकार लिखें ताकि घटाने वाला व्यंजक नीचे वाली पंक्ति में आए और समान पद एक दूसरे के नीचे आए। अब दूसरी पंक्ति के प्रत्येक पद का चिन्ह बदलें और उन्हें जोड़ दें।

**उदाहरण-5 : $20x^2 - 2xy$ में से $15x^2 + 3xy$ को घटाएं।**

हल : क्षैतिज विधि :

$$20x^2 - 2xy - (15x^2 + 3xy)$$
$$= 20x^2 - 2xy - 15x^2 - 3xy$$
$$= 20x^2 - 15x^2 - 2xy - 3xy$$
$$= (20 - 15)x^2 + (-2 - 3)xy$$
$$= 5x^2 - 5xy$$

स्तंभ विधि :

$$\begin{array}{r} 20x^2 - 2xy \\ 15x^2 + 3xy \\ - \quad\;\; - \quad \\ \hline 5x^2 - 5xy \\ \hline \end{array}$$

**उदाहरण-6 : $3a^2 - b^3 + 5c - 1$ को $2a^2 + 3b^3 - 7c + 2$ में से घटाएं।**

हल : क्षैतिज विधि :

$$2a^2 + 3b^3 - 7c + 2 - (3a^2 - b^3 + 5c - 1)$$
$$= 2a^2 - 3b^3 - 7c + 2 - 3a^2 + b^3 - 5c + 1$$
$$= 2a^2 - 3a^2 + 3b^3 + b^3 - 7c - 5c + 2 + 1$$
$$= (2 - 3)a^2 + (3 + 1)b^3 + (-7 - 5)\ (+ 2 + 1)$$
$$= -a^2 + 4b^3 - 12c + 3$$

स्तंभ विधि :

$$\begin{array}{r} 2a^2 + 3b^3 - 7c + 2 \\ 3a^2 - b^3 + 5c - 1 \\ - \quad + \quad - \quad + \\ \hline -a^2 + 4b^3 - 12c + 3 \\ \hline \end{array}$$

**उदाहरण-7 : $2x^2 + 7x - 2$ और $3x^2 - 8x + 7$ के योग में से $2x^2 + x - 1$ को घटाएं।**

हल : सब से पहले हम $2x^2 + 7x - 2$ और $3x^2 - 8x + 7$ को जोड़ते हैं।

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 7x - 2 \\ 3x^2 - 8x + 7 \\ \hline 5x^2 - x + 5 \\ \hline \end{array} \qquad .....(1)$$

अब हम $2x^2 + x - 1$ को योगफल (1) में से घटाते हैं।

$$\begin{array}{r} 5x^2 - x + 5 \\ 2x^2 + x - 1 \\ - \quad - \quad + \\ \hline 3x^2 - 2x + 6 \\ \hline \end{array}$$

## प्रश्नावली - 12.2

**1.** **रिक्त स्थान भरें :-**

(i) $5y + 7y =$ ............... (ii) $3xy + 2xy =$ .................

(iii) $12a^2 - 7a^2 =$ ................ (iv) $8mn^2 - 3mn^2 =$ ................

**2.** **निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों का योग कीजिए।**

(a) $3xy^2, 7x\,y^2$ (b) $7x, -3x, 2x$

(c) $12p^2q, 3p^2q, -5p^2q$ (d) $3x^2, -8x^2, -5x^2, 13x^2$

**3.** **निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों का योग कीजिए।**

(a) $x + y$ और $2x - 3y$ (b) $5a + 7b$ और $3a - 2b$

(c) $3m + 2n, 7m - 8n, 2m - n$ (d) $3x^2 + 2x - 7$ और $5x^2 - 7x + 8$

(e) $m^2 + 2n^2 - p^2, -3m^2 + n^2 + 2p^2$ और $4m^2 - 3n^2 + 5p^2$

(f) $3xy + 7x^2 - 2y^2, 2xy + y^2$ और $2x^2 + y^2$

**4.** **समान पदों को एकत्रित करके निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों को हल करें।**

(a) $-5ax + 3xy + 2xy - 8ax$

(b) $3m - 2n + 5m - 3m + 8n$

(c) $3pq - 15r^2 - 3\,l^2m^2 + 2r^2 + 2l^2m^2 - 5pq.$

(d) $4x^3 + 7x^2 - 3x + 2 - 2x^3 - 2x^2 + 7x - 3$

**5.** **बीजीय व्यंजकों को घटाएं।**

(a) $3x^2$ को $7x^2$ में से

(b) $-3ab$ को $10ab$ में से

(c) $a + b$ को $a - b$ में से

(d) $15m + 10n$ को $2m - 16n$ में से

(e) $2x + 8y - 3z$ को $- 3x + 2y + z$ में से

(f) $18m^2 + 3n^2 - 2mn - 7$ को $3m^2 - 2n^2 + 8mn - 8m + 4$ में से

**6.** $2l - 3m + 4n$ प्राप्त करने के लिए $l - 2m + 5n$ में से क्या घटाना चाहिए।

**7.** $x^2 - 7xy + 3y^2$ प्राप्त करने के लिए $3x^2 + 2xy - y^2$ में क्या जोड़ना चाहिए।

**8.** $3a^2 + 2b^2 - 8ab + 8$ को $a^2 - b^2 + 7ab + 3$ और $2a^2 + 4b^2 - 18ab + 7$ के योगफल में से घटाएं।

**9.** $x^2 + 3xy + y^2, 2x^2 + 5xy - y^2$ से कितना कम है ?

**10.** **बहुवैकल्पिक प्रश्न**

(i) ''संख्या 5 को $m$ और $n$ के गुणनफल के तीन गुणा में जोड़ा जाए'', इसके लिए बीजीय व्यंजक हैं:-

(a) $5 + 3mn$ (b) $3 + 5mn$

(c) $(5 + 3)mn$

(ii) बीजीय व्यंजक $3x + 11$ और $2x - 7$ का योग है :-

(a) $5x + 4$ (b) $x + 4$

(c) $5x - 18$

(iii) $2a + 3b$ में से $a + b$ घटाने से प्राप्त होता है :-

(a) $a + 2b$ (b) $-a - 2b$

(c) $3a + 4b$ (d) $a + b$

## किसी बीजीय व्यंजक का मान (Value of an Algebraic expression)

व्यंजक के चर का मान परिवर्तित होने के साथ बीजीय व्यंजक का मान भी परिवर्तित हो जाता है। ऐसी अनेक स्थितियाँ हैं, जहाँ हमें व्यंजकों के मान ज्ञात करने होते हैं, जैसे कि हम यह जाँच करना चाहते हैं कि चर का एक विशेष मान एक दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करता है या नहीं। बीजीय व्यंजक में चर का कोई भी मान पर व्यंजक का मान ज्ञात करने की विधि को प्रतिस्थापन कहते हैं।

**उदाहरण-1 : नीचे लिखे व्यंजकों का मान ज्ञात करें जबकि $x = 1$ हो।**

**(a) $x + 5$ (b) $3x - 7$ (c) $7x^2 - 2x$**

हल : (a) $x = 1$, $x + 5$ में भरने पर हम प्राप्त करते हैं

$$x + 5$$
$$= 1 + 5$$
$$= 6$$

(b) $3x - 7$ में $x = 1$ भरने पर हम प्राप्त करते हैं

$$3x - 7$$
$$= 3\,(1) - 7$$
$$= 3 - 7$$
$$= -4$$

(c) $7x^2 - 2x$ में $x = 1$ भरने पर हम प्राप्त करते हैं

$$7x^2 - 2x = 7\,(1)^2 - 2\,(1) = 7(1) - 2 = 7 - 2 = 5$$

**उदाहरण-2 : निम्नलिखित व्यंजकों का मान ज्ञात करें यदि $p = -3$ है।**

**(a) $p^2 - 7$ (b) $3p^2 + p - 2$ (c) $10p^3 - 100p^2$**

हल : (a) $p^2 - 7$ में $p = -3$ भरने पर हम प्राप्त करते हैं

$$p^2 - 7 = (-3)^2 - 7 = 9 - 7 = 2$$

(b) $3p^2 + p - 2$ में $p = -3$ भरने पर हम प्राप्त करते हैं

$$3p^2 + p - 2 = 3(-3)^2 + (-3) - 2 = 3(9) - 3 - 2$$
$$= 27 - 3 - 2$$
$$= 27 - 5 = 22$$

(c) $10p^3 - 100p^2$ में $p = -3$ भरने पर हम प्राप्त करते हैं

$$10p^3 - 100p^2 = 10(-3)^3 - (100)\,(-3)^2$$
$$= 100\,(-27) - 100\,(9)$$
$$= -2700 - 900$$
$$= -3600$$

**उदाहरण-3 : यदि $a = -2$, $b = 3$ हो तो निम्नलिखित व्यंजकों का मान ज्ञात कीजिए।**

**(i) $a + b$ (ii) $a^2 + b^2$ (iii) $10a - 8b$ (iv) $a^2 + 2ab + b^2$**

हल : (i) $a + b$ में $a = -2$ हो तो $b = 3$ भरने पर हम प्राप्त करते हैं

$$a + b = (-2) + 3 = +1$$

(ii) $a^2 + b^2$ में $a = -2$ और $b = 3$ भरने पर हम प्राप्त करते हैं

$$a^2 + b^2 = (-2)^2 + (3)^2 = 4 + 9 = 13$$

(iii) $10a - 8b$ में $a = -2$ और $b = 3$ भरने पर हम प्राप्त करते हैं

$$10a - 8b = 10\,(-2) - 8\,(3) = -20 - 24 = -44$$

(*iv*) $a^2 + 2ab + b^2$ में $a = -2, b = 3$ भरने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (-2)^2 + 2(-2)(3) + (3)^2 = 4 - 12 + 9 = 13 - 12 = 1$$

## बीजीय व्यंजकों के प्रयोग : सूत्र और नियम (Using Algebraic expressions – Formula and Rule)

हम पहले भी देख चुके हैं कि गणित में सूत्रों (Formulas) और नियम (rules) की संक्षिप्त और व्यापक रूप में, बीजीय व्यंजकों का प्रयोग करके लिखा जा सकता है।

### परिमाप सूत्र :

(*i*) एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप पता करने के लिए यदि उस त्रिभुज की प्रत्येक भुजा $l$ से व्यक्त करें, तो समबाहु त्रिभुज का परिमाप $= 3l$ होगा।

(*ii*) आयत का परिमाप पता करने के लिए हम बीजीय व्यंजक $2(l + b)$ का प्रयोग करते हैं। जहाँ $l$ और $b$ क्रमशः आयत की लम्बाई और चौड़ाई हैं।

(*iii*) वर्ग का परिमाप पता करना के लिए हम बीजीय व्यंजक 4s का प्रयोग करते हैं। जहाँ 's' वर्ग की भुजा की लम्बाई है।

### क्षेत्रफल सूत्र :

(*i*) यदि हम एक वर्ग की भुजा को '$s$' से व्यक्त करें, तो वर्ग का क्षेत्रफल $= s^2$

(*ii*) यदि आयत की लम्बाई और चौड़ाई को क्रमश : $l$ और b से व्यक्त करें, तो आयत का क्षेत्रफल $= l \times b$
यदि एक बार किसी दी हुई राशि के लिए सूत्र, अर्थात बीजीय व्यंजक ज्ञात हो जाए तो उस राशि का मान वांछित प्रतिबधों के अंतर्गत परिकलित किया जा सकता है।

**उदाहरण के लिए,** यदि आयक की लम्बाई 4 और चौड़ाई 6 है, तो

आयत का परिमाप $= 2(4 + 6) = 2(10) = 20$

आयत का क्षेत्रफल $= 4 \times 6 = 24$

### संख्याओं के लिए नियम :

1. यदि $n$ कोई प्राकृतिक संख्या है तो उसका परवर्ती $n + 1$ होता है। हम इसकी जाँच किसी भी प्राकृतिक संख्या के लिए कर सकते हैं। उदाहरण , यदि $n = 15$ है, तो $n + 1 = 15 + 1 = 16$ जो कि 15 का परवर्ती है।

2. यदि $n$ एक प्राकृतिक संख्या है तो $2n$ एक सम संख्या होती है तथा $2n-1$ एक विषय संख्या होती है। उदाहरण के लिए यदि $n = 3$.

   $2n = 2(3) = 6$ एक सम संख्या है।

   $2n-1 = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$ एक विषम संख्या है।

3. यदि $n$ कोई विषम संख्या है तो $n^3$ भी एक विषम संख्या ही होगी। और यदि $n$ कोई सम संख्या है तो $n^3$ भी एक एक सम संख्या ही होगी। उदाहरण के लिए

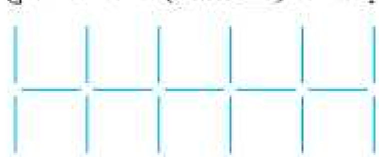
   यदि $n = 5$

   $n^3 = 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ एक विषम संख्या है।

   यदि $n = 4$ है तो

   $n^3 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ एक सम संख्या है।

माचिस की तीलियों, टुथ पिक्स (Tooth Picks) या सरकंडों के बराबर लंबाई के टुकड़ों की तरह छोटे रेखाखंडों को लीजिए। उन्हें आकृतियों में दर्शाए अनुसार प्रतिरूपों (Patterns) में जोड़िए।



इसमें 5 रेखा-खंडों से बने हुए आकार H को दोहराया गया है। जब हम बने हुए H की संख्या और आवश्यक रेखा-खंडों की संख्या की तरह ध्यान देते हैं, तो हमें निम्नलिखित तालिका प्राप्त होती है।

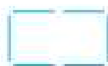
| बने हुए आकारों की गिनती | आवश्यक रेखा-खंडों की संख्या |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 8 |
| 3 | 11 |
| 4 | 14 |
| .... | .... |

अर्थात यदि बने हुए आकारों (अक्षरों) की संख्या $n$ है तो आवश्यक रेखा-खंडों को दर्शाने के लिए बीजीय व्यंजक $3n + 2$ है।

हम इसकी जाँच $n$ के भिन्न-भिन्न मान लेकर कर सकते हैं। जैसे कि $n = 1, 2, 3,$ ............ आदि।

**उदाहरण के लिए :** यदि बने हुए अक्षर 5 हों तो आवश्यक रेखाखंड $3n + 2 = 3(5) + 2 = 15 + 2 = 17$ हैं। जैसे कि आकृति में दर्शाया गया है।

**आयत आकृतियों का नमूना :**

इस में 6 रेखा खंडों से बनी हुई आकृति  को दोहराया जा रहा है। हम बनी हुई आकृतियों की संख्या और आवश्यक रेखा खंडों की संख्या की तरफ ध्यान देते हैं। हमें निम्नलिखित तालिका प्राप्त करते हैं।

| आकृतियों की संख्या | आवश्यक रेखा-खंड़ों की संख्या |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 2 | 11 |
| 3 | 16 |
| 4 | 21 |
| ... | ... |

अर्थात यदि आकृतियों की संख्या $n$ है तो आवश्यक रेखा-खंड़ों को दर्शाने के लिए बीजीय व्यंजक $5n + 1$ है।

**उदाहरण के लिए,** यदि आकृतियों की संख्या 3 है तो आवश्यक रेखा-खंड $5(3) + 1 = 15 + 1 = 16$ हैं। जैसे कि आकृति से भी देखा जा सकता है।

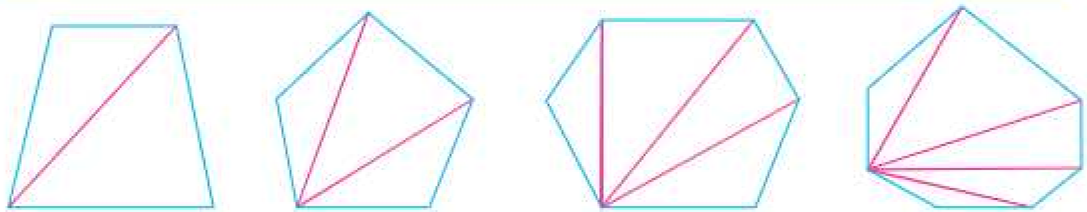
**ज्यामिति में पैटर्न :** यहाँ हम किसी बहुभुज के एक शीर्ष से खींचे जा सकने वाले विकर्णों की गिनती करेंगें। चार बहुभुजों-एक चतुर्भुज एक पंचभुज, एक षट्भुज और एक सप्तभुज लें।

चतुर्भुज के एक शीर्ष से खींचे गए विकर्णों की संख्या = 1

पंचभुज के एक शीर्ष से खींचे गए विकर्णों की संख्या = 2

षटभुज के एक शीर्ष से खींचे गए विकर्णों की संख्या = 3

सप्तभुज के एक शीर्ष से खींचे गए विकर्णों की संख्या = 4



हम देखते है $n$ भुजाओं वाले बहुभुज के एक शीर्ष कुल $(n-3)$ विकर्ण खींचे जा सकते हैं। अष्टभुज में इसकी जाँच करें। आकृति बनाकर त्रिभुज के विकर्णों की संख्या पता करें।

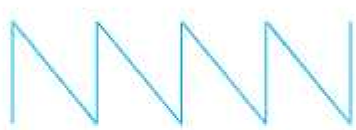
**उदाहरण के लिए,** यदि बहुभुज की 12 भुजाएँ हैं, अर्थात् $n = 12$ हैं तो विकर्णों की संख्या जो कि एक शीर्ष से खींचे जा सकते हैं $= n - 3 = 12 - 3 = 9$

## प्रश्नावली - 12.3

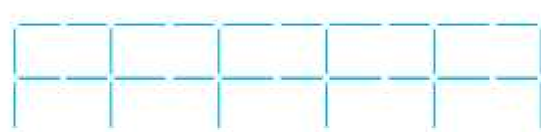
**1. दिए गए व्यंजकों में मान भर कर तालिका को पूरा करें।**

| व्यंजक | व्यंजक का मान | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $x = 1$ | $x = -2$ | $x = 3$ | $x = 10$ |
| (i) $3x + 7$ | | | | |
| (ii) $x^2 - 2x + 3$ | | | | |
| (iii) $8x^3 - 3x^2$ | | | | |
| (iv) $-10x^2 + 20x$ | | | | |

2. यदि $a = 1, b = -2$ है तो निम्नलिखित व्यंजकों का मान ज्ञात करें।
   (i) $a^2 - b^2$
   (ii) $a + 2\,ab - b^2$
   (iii) $a^2b + 2ab^2 + 5$
3. निम्नलिखित व्यंजकों को हल करें और $m = 1, n = 2, p = -1$ के लिए इनका मान ज्ञात करें।
   (i) $2m + 3n - p + 7m - 2n$ (ii) $3p + n - m + 2n$
   (iii) $m + p - 2p + 3m$ (iv) $3n + 2m - 5p - 3m - 2n + p$
4. यदि $b = 2$ भरने पर $2a + b^2 = 10$ है तो $a$ का मान ज्ञात करें।
5. $x$ का मान ज्ञात करें यदि $y = 1$ हो और $-3x + 7y^2 = 1$ है।
6. समान लंबाई वाले रेखाखंडों से बनाए गए अक्षरों के नमूनों को देखें।



(i)



(iii)

यदि बनाए गए अक्षरों की संख्या $n$ ली जाए, तो उसके लिए आवश्यक रेखाखंडों की संख्या को दर्शाता हुआ बीजीय व्यंजक प्रत्येक के लिए लिखें।

7. बिंदुओं के प्रयोग से बनाए गए वर्गों के नमूने देखें।

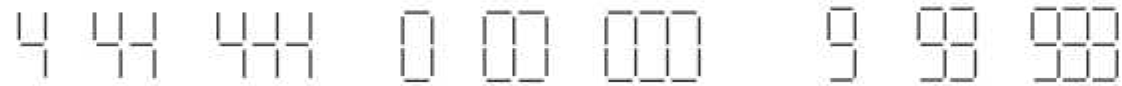
1 4 9 16 25

यदि एक पंक्ति में बिंदुओं की संख्या $n$ मान लें तो $n$ आकृति के लिए आवश्यक बिंदुओं के लिए बीजीय व्यंजक ढूँढ़ें। बिदुओं की संख्या भी ढूँढ़ें यदि :

(*i*) $n = 3$ (*ii*) $n = 7$

(*iii*) $n = 10$

8. बराबर लंम्बाई के रेखाखंडों द्वारा बनाए गए अंकों के पैटर्न को देखिए।



4 7 10 6 10 14 6 11 16

यदि बनाए गए अंकों की संख्या $n$ ली जाए तो उसके लिए आवश्यक रेखाखंडों को दर्शाता हुआ बीजीय व्यंजक लिखें।

9. बहुवैकल्पिक प्रश्न

(*i*) यदि समपंचभुज की एक भुजा की लंबाई $l$ है तो समपंचभुज का परिमाप है :

(*a*) $3\,l$ (*b*) $4\,l$ (*c*) $5\,l$ (*d*) $8\,l$

(*ii*) $n = 2$ भरने पर व्यंजक $5n–2$ का मान है :

(*a*) 12 (*b*) –12 (*c*) 8 (*d*) 3

(*iii*) यदि $x = 1$ है तो व्यंजक $3x^2 - 5x + 6$ का मान है :

(*a*) 3 (*b*) 4 (*c*) –8 (*d*) 14

## हमने क्या चर्चा की ?

1. जिस राशि का संख्यात्मक मान स्थिर रहता है, वह अचर संख्या कहलाती है।
2. जो राशि भिन्न-भिन्न संख्यात्मक मान ले सकती है, वह चर कहलाती है।
3. बीजीय व्यजक; चर और अचर को गुणा, भाग योग और व्यवकलन करके बनाए जाते हैं।
4. व्यंजक पदों से मिलकर बनते हैं। पद धनात्मक (+) और ऋणात्मक (–) दोनों प्रकार के हो सकते हैं।
5. संख्यात्मक गुणनखंड को पद का संख्यात्मक गुणांक कहा जाता है।
6. समान बीजीय गुणनखंडों वाले पदों को समान पद कहा जाता है और भिन्न-भिन्न बीजीय गुणनखंडों वाले पदों को असमान पद कहा जाता है।
7. एक पदी, द्विपदी और त्रिपदी में क्रमशः एक दो और तीन (असमान) पद होते हैं।
8. दो या दो से अधिक बीजीय व्यंजकों को क्रमशः क्रमानुसार लिखकर और समान पदों को इकट्ठा करके जोड़ा जा सकता है।
9. किसी बीजीय व्यंजक का मान ज्ञात करने के लिए, चर संख्या को उस मान के साथ बदल दिया जाता है।
10. बीजीय व्यंजकों का प्रयोग भिन्न-भिन्न ज्यामितीय आकृतियों के परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात करने और उनके पैटर्न आदि तैयार करने के लिए किया जाता है।

## सीखने के परिणाम

**अध्याय के पूर्ण होने पर विद्यार्थी :**

1. चर और अचर में अंतर करने के योग्य हैं।
2. बीजीय व्यंजक बना सकते हैं।
3. बीजीय व्यंजकों के योग और व्यवकलन करने के योग्य हैं।
4. चर के किसी मान के लिए व्यंजक का मान ज्ञात करने के योग्य हैं।
5. पैटर्न के लिए बीजीय व्यंजक रुप लिखने के योग्य हैं।
6. बीजीय व्यंजकों की जानकारी को दैनिक जीवन में प्रयोग करने के योग्य हैं।

# उत्तरमाला

## प्रश्नावली 12.1

**1.** (*i*) $a + b$ (*ii*) $z^2$ (*iii*) $xy + mn$

(*iv*) $\frac{p}{5}q$ (*v*) $2t + \frac{z}{2}$ (*vi*) $x^2 + z^2$

(*vii*) $xy - (x + y)$

**2.** अचर पद, 7

चर पद $xy$, $\frac{3x^2}{2}$, $\frac{72}{3}z$, $\frac{-8z}{3x^2}$

**3.**

| व्यंजक | पद | गुणनखंड |
|---|---|---|
| (*a*) $2x^2 + 3xy$ | $2x^2$ | 2, $x$, $x$ |
| | $3xy$ | 3, $x$, $y$ |
| (*b*) $15x^2 y + 3xy^2$ | $15x^2y$ | 15, $x$, $x$ $y$ |
| | $3xy^2$ | 3, $x$, $y$, $y$ |
| (*c*) $-7x\,y\,z^2$ | $-7xy\,z^2$ | $-7$, $x$, $y$, $z$, $z$ |
| (*d*) $100pq + 10p^2q^2$ | $100pq$ | 100, $p$, $q$ |
| | $10p^2q^2$ | 10, $p$, $p$, $q$, $q$ |
| (*e*) $xy + 3x^2y^2$ | $xy$ | $x$,$y$ |
| | $3x^2y^2$ | 3, $x$, $x$, $y$, $y$ |
| (*f*) $-7x^2yz + 3xy^2z$ | $-7x^2\,yz$ | $-7$, $x$, $x$, $y$, $z$ |
| $+2xy\,z^2$ | $3xy^2z$ | 3, $x$, $y$, $y$, $z$ |
| | $2xyz^2$ | 2, $x$, $y$, $z$, $z$ |

**4.** (*a*) द्विपदी (*b*) द्विपदी (*c*) त्रिपदी

(*d*) एकपदी (*e*) द्विपदी (*f*) एक पदी

(*g*) द्विपदी

**5.** (*a*) 2 (*b*) $\frac{-3}{2}$ (*c*) $\frac{7}{2}$

(*d*) –1 (*e*) –5

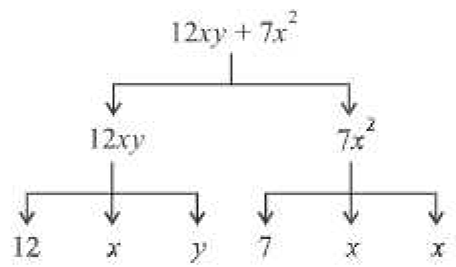
**6.** (a) समान (*b*) असमान (*c*) असमान

(*d*) असमान (*e*) असमान (*f*) समान

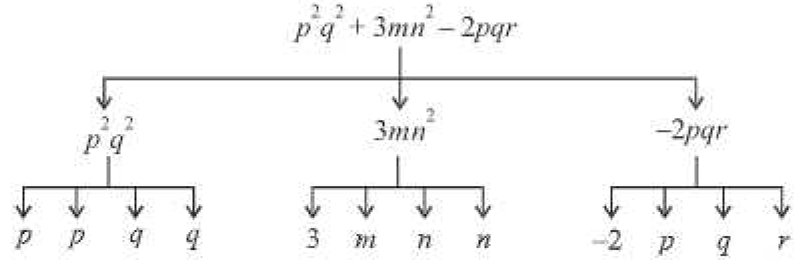
**7.** (*a*) $xy$ (*b*) $15x$ (*c*) $pr^2$

(*d*) 1 (*e*) $xy$

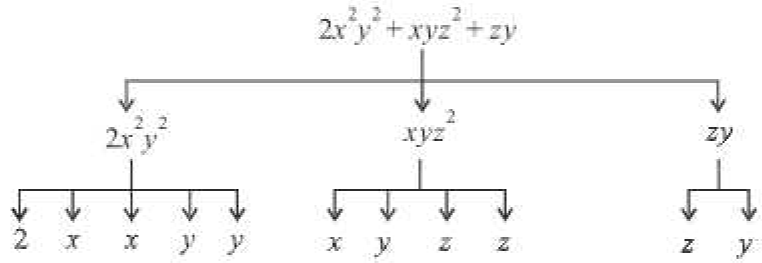
**8.** (*a*)



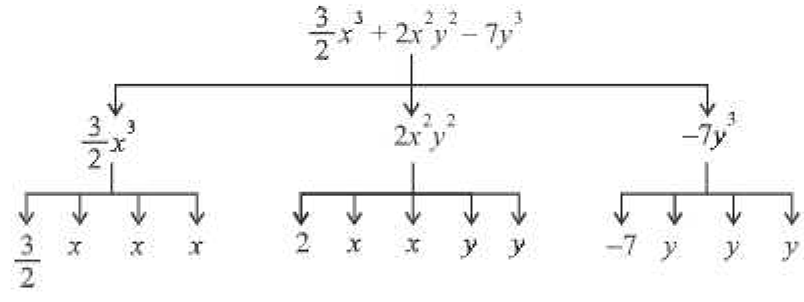

(*b*)




(*c*)




(*d*)




**9.** (*i*) *a* (*ii*) *a*

(*iii*) *b* (*iv*) *a*

## प्रश्नावली 12.2

1. (i) $12y$ (ii) $5xy$
   (iii) $5a^2$ (iv) $5mn^2$
2. (a) $10xy^2$ (b) $6x$
   (c) $10p^2q$ (d) $3x^2$
3. (a) $3x - 2y$ (b) $8a + 5b$
   (c) $12m - 7n$ (d) $8x^2 - 5x + 1$
   (e) $2m^2 + 0n^2 + 6p^2$ (f) $5xy + 9x^2$
4. (a) $-13ax + 5xy$ (b) $5m + 6n$
   (c) $-2pq - 13r^2 - 2l^2m^2$ (d) $2x^3 + 5x^2 + 4x - 1$
5. (a) $4x^2$ (b) $13ab$
   (c) $-2b$ (d) $-13m - 26n$
   (e) $-5x - 6y + 4z$ (f) $-15m^2 - 5n^2 + 10mn - 8m + 11$
6. $-l + m + n$
7. $-2x^2 - 9xy + 4y^2$
8. $b^2 - 3ab + 2$
9. $x^2 + 2xy - 2y^2$
10. (i) $a$ (ii) $a$
    (iii) $a$

## प्रश्नावली 12.3

1. (i) 10, 1, 16, 37 (ii) 2, 11, 6, 83
   (iii) 5, –76, 189, 7700 (iv) 10, –80, –30, –800
2. (i) –3 (ii) –7
   (iii) 11
3. (i) 12 (ii) 2
   (iii) 5 (iv) 5
4. $a = 3$
5. $x = 2$
6. (i) $2n + 1$ (ii) $6n + 2$
7. $n^2$
   (i) 9 (ii) 49
   (iii) 100
8. (i) $3n + 1$ (ii) $4n + 2$
   (iii) $5n + 1$
9. (i) $c$ (ii) $c$
   (iii) $b$

अध्याय

# 13

J5W5J5

# घातांक और घात

**उद्देश्य :-**

**इस अध्याय में आप सीखेंगे :-**

1. आधार और घातांक की पहचान करना।
2. संख्याओं को घातांक में परिवर्तित करना।
3. संख्याओं को घातांक के रूप में लिखना।
4. घातांकों के नियमों का प्रयोग करना।
5. संख्या को मानक रूप में व्यक्त करना।

## हमारे देश का गौरव (Our Nation's Pride)

'आपस्तम्ब' को भारत के सब से जटिल गणितज्ञ के रूप में जाना जाता है जो कि 600 BC की अवधि के लगभग माने जाते हैं। हिन्दू परंपरा के अनुसार, वह बौधायन के शिष्य थे। आपस्तम्ब द्वारा दिए गए शुल्बसूत्र में सूत्र, पूरे गणित विश्व में सब से प्राचीन सूत्र माने जाते हैं। पाइथागोरस प्रमेय का संख्यात्मक हल उनके द्वारा गणित की दुनिया में, सबसे बड़ा योगदान है। आपस्तम्ब के वेदिका निर्माण के नियमों ने अपरिमेय संख्याओं के आविष्कार का नेतृत्व किया परन्तु उन्हें इस कार्य के लिए कभी श्रेय नहीं दिया गया।

## भूमिका

दैनिक जीवन में हमें बहुत सारी स्थितियों में बहुत बड़ी संख्याएँ और बहुत छोटी संख्याएँ देखने को मिलती हैं। उदाहरण के तौर पर ब्रह्माण्ड की आयु वर्षों में, धरती का भार टनों में, धरती और सूर्य के बीच की दूरी किलोमीटरों में तथा बैक्टीरिया का आकार आदि, ऐसी संख्याएँ है जो या तो बहुत छोटी हैं या बहुत बड़ी। ऐसी संख्याएँ है जो या तो बहुत छोटी हैं या बहुत बड़ी। ऐसी संख्याएँ संभवत: अनुमानित मूल्य होती हैं (क्योंकि इन्हें मापना मुश्किल है।) इसलिए इन्हें दर्शाने के लिए घातांक का प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, ब्रह्माण्ड की आयु लगभग 8,000,000,000 वर्ष और धरती का भार लगभग 5980000000000000 मैट्रिक टन है। इस प्रकार की संख्याओं को अकसर घातांक के प्रयोग से ही लिखा जाता है। उदाहरण के लिए, संख्या 8000000000 को $8\times10^9$ या $80\times10^8$ या $800\times10^7$ भी लिखा जा सकता है। इसी प्रकार $5980000000000000000000 = 598\times10^{19}$ को इस प्रकार घातांक के रूप में लिखा जा सकता है। घातांक हमें बहुत बड़ी संख्याओं और बहुत छोटी संख्याओं को आसानी से लिखने में सहायता करता है।

## घातांकीय रूप (Exponential form)

हम संख्या 125 को, $125 = 5 \times 5 \times 5$ भी लिख सकते हैं। इसी प्रकार $125 = 5^3$, $5^3$ संख्या 125 का घातांक रूप है। यहाँ '5' आधार और '3' घातांक कहलाता है। संख्या $5^3$ को 5 की घात 3 या 5 का धन भी कहा जाता है। एक अन्य संख्या $\frac{16}{81}$ तो

$$\frac{16}{81} = \frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

इस प्रकार $\frac{16}{81}$ का घातांकीय रूप $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ है।

यहाँ $\frac{2}{3}$ आधार और 4 घातांक है।

उपरोक्त सभी उदाहरणों से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचे हैं कि यदि '$a$' एक परिमेय संख्या है और $n$ एक प्राकृतिक संख्या है तो $a^n = a \times a \times a$ .... ($n$ बार गुणा) है। यहाँ '$a$' को आधार और $n$ को घातांक कहा जाता है और $a^n$ इस प्रकार घातांकीय रूप है। हम, $a^n$ को '$a$' की घात $n$ पढ़ सकते हैं। विशेष रूप में, $a^1 = a$

उदाहरण के लिए : $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$

अर्थात् $10^4 = 10000$ यहाँ आधार = 10, और घातांक = 4 है, $10^4$ संख्या 10000 का घातांकीय रूप है।

**उदाहरण-1 : निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।**

**(i)** $(-3)^4$ **(ii)** $2^6$ **(iii)** $(-1)^5$ **(iv)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

हल : (i) $(-3)^4$ का अर्थ है कि $-3$ को 4 बार गुणा करना।

इस प्रकार, $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$
$= (+9) \times (+9) = 81$

(ii) $2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

(iii) $(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

(iv) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{4}$

**उदाहरण-2 : निम्नलिखित को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।**

**(i)** **343** **(ii)** **3125**

हल : (i) 343

$343 = 7 \times 7 \times 7 = 7^3$

| | |
|---|---|
| 7 | 343 |
| 7 | 49 |
| 7 | 7 |
| | 1 |

(ii) 3125

$3125 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$
$= 5^5$

| | |
|---|---|
| 5 | 3125 |
| 5 | 625 |
| 5 | 125 |
| 5 | 25 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

**उदाहरण-3 : $5^3$ तथा $3^5$ में से कौन सा बड़ा है ?**

हल :

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$
$$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$$
$$243 > 125$$
$$\therefore \quad 3^5 > 5^3$$

**उदाहरण-4 : 540 को अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।**

हल : 540

$540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$

$= 2^2 \times 3^3 \times 5$

| | |
|---|---|
| 2 | 540 |
| 2 | 270 |
| 3 | 135 |
| 3 | 45 |
| 3 | 15 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

**उदाहरण-5 : सरल कीजिए : (*i*) $5^2 \times 3^3$ (*ii*) $0 \times 10^2$**

हल : (*i*) $5^2 \times 3^3 = 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 25 \times 27 = 675$

(*ii*) $0 \times 10^2 = 0 \times 10 \times 10$

$= 0 \times 100 = 0$

**उदाहरण-6 : यदि $3^x = 729$ हो तो $x$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।**

हल :

$3^x = 729$

$3^x = 3^6$

$\therefore \quad x = 6$

| | |
|---|---|
| 3 | 729 |
| 3 | 243 |
| 3 | 81 |
| 3 | 27 |
| 3 | 9 |
| 3 | 3 |
| | 1 |

**उदाहरण-7 : निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :-**

(*i*) $(1)^5$ (*ii*) $(-1)^3$ (*iii*) $(-1)^4$ (*iv*) $(-10)^3$ (*v*) $(-5)^4$

हल : (*i*) $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$

> वास्तव में, 1 की कोई भी घात हो, तो वह 1 के बराबर होती है।

(*ii*) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$ $[(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1]$

(*iii*) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$ $[(-1)^{\text{सम संख्या}} = +1]$

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि $(-1)$ की कोई भी विषम घात $(-1)$ के बराबर होती है तथा $(-1)$ की कोई भी सम घात $(+1)$ के बराबर होती है।

(*iv*) $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(*v*) $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

$$(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$$
$$(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$$

## प्रश्नावली - 13.1

**1.** रिक्त स्थान भरो :

(*i*) घातांकीय रूप $3^7$ में, आधार = _________ तथा घात = _________

(*ii*) घातांकीय रूप $\left(\frac{2}{5}\right)^{11}$ में, आधार = _________ तथा घात = _________

**2.** निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(*i*) $2^6$ (*ii*) $9^3$ (*iii*) $5^5$

(*iv*) $(-6)^4$ (*v*) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$

**3.** निम्नलिखित को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(*i*) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (*ii*) $b \times b \times b \times b$ (*iii*) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

**4.** सरल करो।

(*i*) $2 \times 10^3$ (*ii*) $5^2 \times 3^2$ (*iii*) $3^2 \times 10^4$

**5.** सरल करो।

(*i*) $(-3) \times (-2)^3$ (*ii*) $(-4)^3 \times 5^2$ (*iii*) $(-1)^{99}$

(*iv*) $(-3)^2 \times (-5)^2$ (*v*) $(-1)^{132}$

**6.** निम्नलिखित में से प्रत्येक भाग में, बड़ी संख्या को पहचानिए।

(*i*) $4^3$ या $3^4$ (*ii*) $5^3$ या $3^2$ (*iii*) $2^3$ या $8^2$

(*iv*) $4^5$ या $5^4$ (*v*) $2^{10}$ या $10^2$

**7.** निम्नलिखित को 2 के घातांकीय रूप में व्यक्त करो।

(*i*) 8 (*ii*) 128 (*iii*) 1024

**8.** निम्नलिखित को 3 के घातांकीय रूप में व्यक्त करो।

(*i*) 27 (*ii*) 2187

**9.** निम्नलिखित में प्रत्येक में $x$ का मान ज्ञात कीजिए।

(*i*) $7^x = 343$ (*ii*) $9^x = 729$ (*iii*) $(-8)^x = -512$

**10.** $(-2)$ की कितनी घात से हमें 16 प्राप्त होगा ?

**11.** निम्नलिखित में से प्रत्येक को उनके अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप व्यक्त करो।

(*i*) 72 (*ii*) 360 (*iii*) 405

(*iv*) 648 (*v*) 3600

## घातांकों के नियम (Laws of Exponents)

हम घातांकीय रूप मे लिखी संख्याओं को गुणा तथा भाग कर सकते हैं।

### एक ही आधार वाली भिन्न-भिन्न घातों का गुणन

आइए $2^4 \times 2^3$ को परिकलित करें।

$$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$$

अब हम, $(-3)^2 \times (-3)^3$ को परिकलित करें।

$$[(-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3) \times (-3)]$$
$$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^5$$

ध्यान दीजिए $(-3)^2 \times (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$

**नियम 1 :** यदि '$a$' कोई एक परिमेय संख्या है और $m, n$ पूर्णांक है तो $a^m \times a^n = a^{m+n}$

### एक ही आधार वाली भिन्न-भिन्न घातों का विभाजन

$$\text{आइए } 5^7 \div 5^4 \text{ को सरल करें} = \frac{5^7}{5^4} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times 5 \times 5 \times 5}{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5}}$$
$$= 5 \times 5 \times 5 = 5^3$$
$$\text{इस प्रकार } 5^7 \div 5^4 = \frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3$$

**नियम 2 :** यदि '$a$' कोई शून्येतर परिमेय संख्या है और $m, n$ पूर्णांक है यहां $m > n$ हो तो

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

### शून्य घातांक

आइए $\frac{3^3}{3^3}$ को परिकलित करें

$$\frac{3^3}{3^3} = \frac{3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = \frac{27}{27} = 1$$

$$\text{दूसरी विधि से, } \frac{3^3}{3^3} = 3^{3-3} = 3^0 = 1$$

अर्थात कि, हमने यहाँ दो अलग-अलग विधियों के साथ $\frac{3^3}{3^3}$ की गणना की है, पर उत्तर दोनों विधियों के साथ एक ही है। इस से, प्रमाणित होता है कि $3^0 = 1$.

**नियम 3 :** यदि $a$ कोई शून्येतर परिमेय संख्या है तो $a^0 = 1$

### एक घात की घात

$$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3}$$
$$= 2^6 = 2^{3 \times 2}$$

इसी तरह $(2^3)^2 = 2^{3 \times 2}$

वास्तव में, हम कह सकते हैं कि

**नियम 4 :** यदि $a$ कोई परिमेय संख्या है और $m, n$ पूर्णांक हों तो $(a^m)^n = a^{m \times n}$

**समान घातांको और भिन्न-भिन्न आधार वाली घातों का गुणा**

आइए, $3^4 \times 5^4$ की गणना करें।

$$= (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5)$$
$$= (3 \times 5) \times (3 \times 5) \times (3 \times 5) \times (3 \times 5)$$
$$= (3 \times 5)^4$$

**नियम 5 :** यदि $a, b$ कोई परिमेय संख्याएँ हैं और $n$ पूर्णांक है तो, $a^n \times b^n = (ab)^n$

**समान घातांकों और भिन्न-भिन्न आधार वाली घातों का विभाजन**

आइए, $\frac{2^4}{7^4}$ की गणना करें कि $= \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{7 \times 7 \times 7 \times 7} = \left(\frac{2}{7}\right)^4$

**नियम 6 :** यदि $a, (b \neq 0)$ परिमेय संख्याएँ है और $n$ कोई पूर्णांक है तो $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ या

$$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

## ऋणात्मक घातांक (Negative Exponent)

यदि a शून्येतर परिमेय संख्या है और $n$ कोई प्राकृतिक संख्या है तो

$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$, इस प्रकार $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

**नियम 7 :** यदि $a$ कोई शून्येतर परिमेय संख्या है और $n$ कोई पूर्णांक है तो $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

विशेष रूप में $a^{-1} = \frac{1}{a}$

**उदाहरण-1 : सरल करो और घातांकीय रूप में लिखो।**

**(a) $2^3 \times 2^2$ (b) $4^2 \times 4^3$ (c) $3^2 \times 3^3 \times 3^4$ (d) $(-4)^3 \times (-4)^2$**

हल : (a) $2^3 \times 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$

(b) $4^2 \times 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$

(c) $3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9$

(d) $(-4)^3 \times (-4)^2 = (-4)^{3+2} = (-4)^5$

**उदाहरण-2 : सरल करो और घातांकीय रूप में लिखो।**

**(a) $13^6 \div 13^4$ (b) $10^4 \div 10$ (c) $18^{16} \div 18^{10}$ (d) $(-5)^6 \div (-5)^2$**

हल : (a) $13^6 \div 13^4 = 13^{6-4} = 13^2$

(b) $10^4 \div 10 = 10^{4-1} = 10^3$

(c) $18^{16} \div 18^{10} = 18^{16-10} = 18^6$

(d) $(-5)^6 \div (-5)^2 = (-5)^{6-2} = (-5)^4$

**उदाहरण-3 : सरल करो और घातांकीय रूप में दर्शाओ।**

(*a*) $(3^2)^3$ (*b*) $(4^3)^2$ (*c*) $[(10)^2]^3$ (*d*) $(2^{100})^2$

हल : (*a*) $(3^2)^3 = 3^{2\times3} = 3^6$

(*b*) $(4^3)^2 = 4^{3\times2} = 4^6$

(*c*) $[(10)^2]^3 = (10)^{2\times3} = (10)^6$

(*d*) $(2^{100})^2 = 2^{100\times2} = 2^{200}$

**उदाहरण-4 : सरल करें :** (*a*) $\left(\frac{2}{5}\right)^4$ (*b*) $\left(\frac{-1}{3}\right)^3$ (*c*) $\left(\frac{-6}{7}\right)^2$

हल : (*a*) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4} = \frac{2\times2\times2\times2}{5\times5\times5\times5} = \frac{16}{625}$

(*b*) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{(-1)^3}{3^3} = \frac{(-1)\times(-1)\times(-1)}{3\times3\times3} = -\frac{1}{27}$

(*c*) $\left(\frac{-6}{7}\right)^2 = \frac{(-6)^2}{7^2} = \frac{(-6)\times(-6)}{7\times7} = \frac{36}{49}$

**उदाहरण-5 : निम्नलिखित को सरल करो और घातांकीय रूप में दर्शाओ।**

(*a*) $[(5^2)^3\times5^4]\div5^7$ (*b*) $125^4\div5^3$ (*c*) $[(2^2)^3\times3^6]\times5^6$

हल : (*a*) $[(5^2)^3\times5^4]\div5^7$

$= (5^{2\times3}\times5^4)\div5^7$

$= (5^6\times5^4)\div5^7$

$= 5^{6+4}\div5^7$

$= 5^{10}\div5^7$

$= 5^{10-7} = 5^3$

(*b*) $125^4\div5^3$

$125^4 = (5\times5\times5)^4 = (5^3)^4 = 5^{12}$

$125^4\div5^3 = 5^{12}\div5^3 = 5^{12-3} = 5^9$

(*c*) $[(2^2)^3\times3^6]\times5^6 = (2^{2\times3}\times3^6)\times5^6$

$= (2\times3)^6\times5^6$

$= 6^6\times5^6$

$= (6\times5)^6$

$= 30^6$

**उदाहरण-6 : निम्नलिखित को सरल करो और घातांकीय रूप में दर्शाओ।**

(*i*) $\frac{2^3\times3^4\times4}{3\times32}$ (*ii*) $(3^0+2^0)\times5^0$ (*iii*) $\frac{25\times5^2\times a^8}{10^3\times a^4}$

हल : (*i*) $4 = 2\times2 = 2^2$ और $32 = 2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^5$

$\therefore \quad \frac{2^3\times3^4\times4}{3\times32} = \frac{2^3\times3^4\times2^2}{3\times2^5} = \frac{2^5\times3^4}{3^1\times2^5}$

$= 2^{5-5}\times3^{4-1}$

$= 2^0\times3^3 = 1\times3^3 = 3^3$

(*ii*) $(3^0 + 2^0) \times 5^0 = (1 + 1) \times 1 = 2 \times 1 = 2 = 2^1$

(*iii*) $$\frac{25 \times 5^2 \times a^8}{10^3 \times a^4} = \frac{5^2 \times 5^2 \times a^8}{(2 \times 5)^3 \times a^4} = \frac{5^2 \times 5^2 \times a^8}{2^3 \times 5^3 \times a^4}$$

$$= \frac{5^{2+2-3} \times a^{8-4}}{2^3} = \frac{5a^4}{2^3}$$

**उदाहरण-7 : निम्नलिखित में प्रत्येक परिमेय संख्या को घातांकीय रूप में दर्शाओ।**

(*i*) $\frac{64}{343}$ (*ii*) $\frac{-27}{125}$ (*iii*) $\frac{-1}{243}$

हल : (*i*) $\frac{64}{343} = \frac{4^3}{7^3} = \left(\frac{4}{7}\right)^3$

(*ii*) $\frac{-27}{125} = \frac{(-3)^3}{5^3} = \left(\frac{-3}{5}\right)^3$

(*iii*) $\frac{-1}{243} = \frac{-1}{243} = \frac{(-1)^5}{3^5} = \left(\frac{-1}{3}\right)^5$

**उदाहरण-8 : $(3^0 + 2^0 - 6^0) \div (100)^0$ को हल करो और उत्तर को 5 की घात रूप में लिखो।**

हल : $(3^0 + 2^0 - 6^0) \div (100)^0$

$= (1 + 1 - 1) \div 1$ ($\because a^0 = 1$)

$= 1 \div 1 = 1 = 5^0$ ($\because 5^0 = 1$)

## प्रश्नावली - 13.2

1. घातांकों के नियमों का प्रयोग करते हुए, सरल करो और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए :
   (*i*) $2^7 \times 2^4$ (*ii*) $p^5 \times p^3$
   (*iii*) $(-7)^5 \times (-7)^{11}$ (*iv*) $20^{15} \div 20^{13}$
   (*v*) $(-6)^7 \div (-6)^3$ (*vi*) $7^x \times 7^3$
2. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल करके घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।
   (*i*) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$ (*ii*) $a^5 \times a^3 \times a^7$
3. निम्नलिखित मे से प्रत्येक को सरल करके घातांकीय रूप में व्यक्य कीजिए।
   (*i*) $(2^2)^{100}$ (ii) $(5^3)^7$
4. सरल करो और घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।
   (*i*) $(2^3)^4 \div 2^5$ (*ii*) $2^3 \times 2^2 \times 5^5$
   (*iii*) $[(2^2)^3 \times 3^6] \times 5^6$
5. सरल करो और घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।
   (*i*) $5^4 \times 8^4$ (*ii*) $(-3)^6 \times (-5)^6$

**6.** निम्नलिखित में प्रत्येक को सरल करो और घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(*i*) $\dfrac{\left(3^2\right)^3 \times (-2)^5}{(-2)^3}$ (*ii*) $\dfrac{3^7}{3^4 \times 3^3}$

(*iii*) $\dfrac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3}$ (*iv*) $3^0 \times 4^0 \times 5^0$

**7.** निम्नलिखित में प्रत्येक परिमेय संख्याओं को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(*i*) $\dfrac{25}{64}$ (*ii*) $\dfrac{-64}{125}$

(*iii*) $\dfrac{-125}{216}$ (*iv*) $\dfrac{-343}{729}$

**8.** सरल करो।

(*i*) $\dfrac{(2^5)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7}$ (*ii*) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$

**9.** निम्नलिखित में से प्रत्येक को केवल अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

(*i*) $384 \times 147$ (*ii*) $729 \times 64$

(*iii*) $108 \times 92$

**10.** सरल कीजिए और प्रत्येक को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(*i*) $3^3 \times 2^2 + 2^2 \times 5^0$ (*ii*) $\left(\dfrac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5$

(*iii*) $8^2 \div 2^3$

**11. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) $\left(\dfrac{-5}{8}\right)^0$ समान है :

(*a*) 0 (*b*) 1

(*c*) $\dfrac{-5}{8}$ (*d*) $\dfrac{-8}{5}$

(*ii*) $(5^2)^3$ समान है :

(*a*) $5^6$ (*b*) $5^5$

(*c*) $5^9$ (*d*) $10^3$

(*iii*) $a \times a \times a \times b \times b \times b$ समान है :

(*a*) $a^3 b^2$ (*b*) $a^2 b^3$

(*c*) $(ab)^3$ (*d*) $a^6 b^6$

(*iv*) $(-5)^2 \times (-1)^1$ समान है :

(*a*) 25 (*b*) –25

(*c*) 10 (*d*) –10

## दशमलव संख्या पद्धति (Decimal Number System)

आइए 753015 के निम्नलिखित प्रसार को देखें, जिससे हम पहले से ही परिचित है :

$$753015 = 7 \times 100000 + 5 \times 10000 + 3 \times 1000 + 0 \times 100 + 1 \times 10 + 5 \times 1$$

हम इसे 10 की घातों का प्रयोग करते हुए, घातांकीय रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$753015 = 7 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$
$$= 7 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

वास्तव में, प्रत्येक संख्या के प्रसार को 10 के घातांक का प्रयोग करते हुऐ घातांकीय रूप में लिखा जा सकता है।

## संख्याओं का मानक रुप (Standard form of Numbers)

किसी संख्या का मानक रुप $k \times 10^n$ होता है जिसमें $k$ का मूल्य 1 से 10 के बीच कोई संख्या होता है और $n$ एक पूर्णांक है।

निम्न को पढ़ें :-

$$76 = 7.6 \times 10 = 7.6 \times 10^1$$
$$763 = 7.63 \times 100 = 7.63 \times 10^2$$
$$7630 = 7.63 \times 1000 = 7.63 \times 10^3$$
$$76300 = 7.63 \times 10000 = 7.63 \times 10^4$$ इत्यादि।

## वैज्ञानिक संकेतन (Scientific Notation)

वैज्ञानिक संकेत बहुत बड़ी संख्याओं को सरल तारीके से मानक रूप में लिखने की एक विधि है।

वैज्ञानिक संकेत में प्रत्येक संख्या को $k \times 10^n$ के रूप में लिखा जाता है। जिसमें $k$, 1 से 10 के बीच कोई दशमलव संख्या है और $n$ एक पूर्णांक है। दशमलव संख्या $k$ संकेतक (significand) कहलाती है। वैज्ञानिक संकेतन को मानक रूप भी कहा जाता है।

| साधारण दशमलव रुप | वैज्ञानिक संकेतन |
|---|---|
| 500 | $5 \times 10^2$ |
| 47,000 | $4.7 \times 10^4$ |
| 9,830,000,000 | $9.83 \times 10^9$ |

**उदाहरण-1 : निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :**

**(*i*) 763.4 (*ii*) 83,500 (*iii*) 573,000**

हल : (*i*) $763.4 = 7.634 \times 10^2$

(*ii*) $83500 = 8.3500 \times 10^4 = 8.35 \times 10^4$

(*iii*) $573000 = 5.73000 \times 10^5 = 5.73 \times 10^5$

**उदाहरण-2 : निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :**

**(*i*) $5.37 \times 10^4$ (*ii*) $7.501 \times 10^7$ (*iii*) $2.3049 \times 10^{11}$**

हल : (*i*) $5.37 \times 10^4 = 53700$

(*ii*) $7.501 \times 10^7 = 75010000$

(*iii*) $2.3049 \times 10^{11} = 230490000000$.

**उदाहरण-3 : निम्नलिखित कथनों में प्रकट होने वाली संख्याओं को मानक रुप में व्यक्त कीजिए।**

**(*i*) धरती की त्रिज्या 6366000 m है।**

**(*ii*) धरती और सूर्य के बीच की दूरी 149, 600, 000, 000 m है।**

**(*iii*) निर्वात स्थान में प्रकाश की चाल ( या वेग ) 299, 800, 000 m/s है।**

**(*iv*) पृथ्वी का द्रव्यमान 5, 976, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 kg है।**

हल : (*i*) धरती की त्रिज्या = 6366000 = $6.366 \times 10^6\ m$

(*ii*) धरती और सूर्य के बीच की दूरी = 149, 600, 000, 000 $m$ = $1.496 \times 10^{11}$ m

(*iii*) निर्वात स्थान में प्रकाश की चाल = 299, 800. 000 m/s

= $2.998 \times 10^8$ m/s

(*iv*) पृथ्वी का द्रव्यमान = 5, 976. 000,000,000,000,000,000, 000 kg

= $5.976 \times 10^{24}$ kg

**उदाहरण-4 : निम्नलिखित संख्याओं की तुलना कीजिए।**

**(*i*) $2.7 \times 10^{12}$ ; $1.5 \times 10^8$ (*ii*) $3.547 \times 10^9$; $6.02 \times 10^9$**

हल : (*i*) हमें, $2.7 \times 10^{12}$ तथा $1.5 \times 10^8$ की तुलना करनी है।

ध्यान दीजिए, दोनों संख्याएँ मानक रूप में हैं। $2.7 \times 10^{12}$ में 10 की घात, $1.5 \times 10^8$ में 10 की घात से अधिक है,

∴ $2.7 \times 10^{12} > 1.5 \times 10^8$

(*ii*) हमें, $3.54 \times 10^9$ और $6.02 \times 10^9$ की तुलना करनी है। ध्यान कीजिए, दोनों संख्याएँ मानक रूप में है। दोनों संख्याओं में 10 की घात बराबर है। इसलिए, हम संकेतक की तुलना करेंगे,

$3.547 \times 10^9$ का संकेतक 3.547 है और $6.02 \times 10^9$ का संकेतक 6.02 है।

क्योंकि $6.02 > 3.547$, इसलिए, $6.02 \times 10^9 > 3.547 \times 10^9$

## प्रश्नावली - 13.3

**1. निम्नलिखित संख्याओं को प्रसारित घातांकीय रूप में लिखिए :**

(*i*) 104278 (*ii*) 20068

(*iii*) 120719 (*iv*) 3006194

(*v*) 28061906

**2. निम्नलिखित प्रसारित रूपों में से प्रत्येक के लिए संख्या ज्ञात कीजिए :**

(*i*) $4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

(*ii*) $3 \times 10^4 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^0$

(*iii*) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$

(*iv*) $8 \times 10^7 + 3 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 8 \times 10^1$

**3. निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।**

(*i*) 3, 43,000 (*ii*) 70,00,000

(*iii*) 3, 18,65,00,000 (*iv*) 530.7

(*v*) 5985.3 (*vi*) 3908.78

**4. निम्नलिखित कथनों में प्रकट होने वाली ( आने वाली ) संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।**

(*i*) पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी 384, 000,000 m है।

(*ii*) पृथ्वी का व्यास 1,27, 56,000 m है।

(*iii*) सूर्य का व्यास 1,400,000,000 m है।

(*vi*) विश्व मंडल (या सौर मंडल) 12,000,000,000 years पुराना आकलित किया गया है।

(*v*) यूरेनस ग्रह का द्रव्यमान 86,800,000, 000,000,000,000,000,000 kg है।

**5. निम्नलिखित संख्याओं की तुलना कीजिए।**

(*i*) $4.3 \times 10^{14}$ और $3.01 \times 10^{17}$.

(*ii*) $1.439 \times 10^{12}$ और $1.4335 \times 10^{12}$

## हमने क्या चर्चा की ?

**1. यदि $a$ कोई परिमेय संख्या है और $n$ एक पूर्णांक है तो**

$a^n = a \times a \times a$ .................. n बार गुणा।

यहाँ $a$ को आधार और $n$ को घातांक कहा जाता है और $a^n$ घातांकीय रुप है। $a^n$ को $a$ की घात $n$ या $a$ की $n$ वीं घात भी पढ़ा जा सकता है।

विशेष रूप से, $a^1 = a$

$(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$

और $(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$

**2. घातांक के नियम**

**नियम 1. :** यदि $a$ कोई परिमेय संख्या है और $m, n$ पूर्णांक है तो $a^m \times a^n = a^{m+n}$

**नियम 2. :** यदि $a$ कोई (शून्येतर) परिमेय संख्या है और $m, n$ पूर्णाक है, यहाँ $m > n$ है तो $a^m \div a^n = a^{m-n}$

**नियम 3. :** यदि $a$ कोई शून्येतर परिमेय संख्या है तो $a^0 = 1$

**नियम 4. :** यदि $a$ कोई परिमेय संख्या है और $m, n$ पूर्णांक है तो $(a^m)^n = a^{m \times n}$

**नियम 5. :** यदि $a, b$ कोई परिमेय संख्याएँ हैं और $n$ कोई पूर्णांक है तो $a^n \times b^n = (ab)^n$

**नियम 6.:** यदि $a, b$ $(b \neq 0)$ कोई परिमेय संख्या है और कोई पूर्णांक है तो $a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ या $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

**नियम 7. :** यदि $a$ कोई (शून्येतर) परिमेय संख्या है और $n$ कोई पूर्णांक है तो $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

**3. मानक रुप या वैज्ञानिक संकेतन**

एक संख्या को उस के मानक रूप या वैज्ञानिक संकेतन में कहा जाता है जब वह $k \times 10^n$ के रूप में लिखी हो, यहाँ $k$ एक दशमलव संख्या है तथा $1 \leq k < 10$ और $n$ एक पूर्णांक है।

किसी संख्या के मानक रूप को वैज्ञानिक संकेतन के रूप में भी जाना जाता है दशमलव संखया $k$ को संकेतक (significand) कहा जाता है।

**4. दशमलव संख्या को मानक रुप में लिखना**

(*i*) दशमलव बिंदु को बाएँ और तब तक आगे बढ़ाओ जब तक बाएँ और दशमलव बिंदु से पहले एक अंक न रह जाए।

(*ii*) दी हुई संख्या को भाग (*i*) में प्राप्त हुई संख्या और $10^n$ के गुणनफल के रूप में लिखो यहाँ कि $n$ वह संख्या है, जितने अंक हम ने दशमलव को बाईं ओर बढ़ाया है।

**5. मानक रूप को साधारण रूप में लिखना :**

संकेतक को लीजिए और दशमलव बिंदु को उतने स्थान दाईं ओर बढ़ाएँ जितने कि $10^n$ में संख्या $n$ हो और अगर आवश्यक हो तो शून्य लगाएँ।

**6. मानक रूप में संख्याओं की तुलना :**

(*i*) 10 की अधिक घात वाली संख्या बड़ी होती है।

(*ii*) यदि 10 की घात बराबर हो तो संकेतक की तुलना करते हैं। बड़े संकेतक वाली संख्या बड़ी होती है।

## सीखने के परिणाम

**अध्याय के पूर्ण होने पर विद्यार्थी :-**

1. आधार और घात अंक को समझने के योग्य हैं।
2. घातांक के नियमों के प्रयोग करने के योग्य है जिसमें समान आधार वाली घातों की गुणा और विभाजन शामिल है।
3. शून्य घातांक को हल करने के योग्य हैं।
4. समझने के योग्य है कि विभिन्न आधार वाले घातांक वाली संख्याओं की गुणा और भाग, नियम से नहीं की जा सकती।
5. संख्याओं को मानक रूप में लिखने के योग्य हैं।
6. बहुत बड़ी संख्याओं की गुणा और भाग को हल करने के लिए घातांकीय रूप का प्रयोग करने के योग्य हैं।

# उत्तरमाला

## प्रश्नावली 13.1

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | (*i*) | 3, 7 | (*ii*) | $\frac{2}{5}, 11$ | | |
| **2.** | (*i*) | 64 | (*ii*) | 729 | (*iii*) | 3125 |
| | (*iv*) | 1296 | (*v*) | $\frac{-32}{243}$ | | |
| **3.** | (*i*) | $6^4$ | (*ii*) | $b^4$ | (*iii*) | $5^2 \times 7^3$ |
| **4.** | (*i*) | 2000 | (*ii*) | 225 | (*iii*) | 90000 |
| **5.** | (*i*) | 24 | (*ii*) | –1600 | (*iii*) | –1 |
| | (*iv*) | 225 | (*v*) | 1 | | |
| **6.** | (*i*) | $3^4$ | (*ii*) | $5^3$ | (*iii*) | $8^2$ |
| | (*iv*) | $4^5$ | (*v*) | $2^{10}$ | | |
| **7.** | (*i*) | $2^3$ | (*ii*) | $2^7$ | (*iii*) | $2^{10}$ |
| **8.** | (*i*) | $3^3$ | (*ii*) | $3^7$ | | |
| **9.** | (i) | 3 | (*ii*) | 3 | (*iii*) | 3 |
| **10.** | 4 | | | | | |
| **11.** | (*i*) | $2^3 \times 3^2$ | (*ii*) | $2^3 \times 3^2 \times 5^1$ | (*iii*) | $5^1 \times 3^4$ |
| | (*iv*) | $2^3 \times 3^4$ | (*v*) | $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ | | |

## प्रश्नावली 13.2

**1.** (*i*) $2^{11}$ (*ii*) $p^8$ (*iii*) $(-7)^{16}$
(*iv*) $20^2$ (*v*) $(-6)^4$ (*vi*) $7^{x+3}$

**2.** (*i*) $5^{22}$ (*ii*) $a^{15}$

**3.** (*i*) $2^{200}$ (*ii*) $5^{21}$

**4.** (*i*) $2^7$ (*ii*) $10^5$ (*iii*) $30^6$

**5.** (*i*) $40^4$ (*ii*) $15^6$

**6.** (*i*) $3^6 \times 2^2$ (*ii*) $1^1$ (*iii*) $(2a)^2$
(*iv*) $1^1$

**7.** (*i*) $\left(\frac{5}{8}\right)^2$ (*ii*) $\left(\frac{-4}{5}\right)^3$ (*iii*) $\left(\frac{-5}{6}\right)^3$ (*iv*) $\left(\frac{-7}{9}\right)^3$

**8.** (*i*) 98 (*ii*) 36

**9.** (*i*) $2^7 \times 3^2 \times 7^2$ (*ii*) $3^6 \times 2^6$ (*iii*) $2^4 \times 3^3 \times 23$

**10.** (*i*) $2^4 \times 7^1$ (*ii*) $3^{10}$ (*iii*) $2^3$

**11.** (*i*) (*a*) (*ii*) (*a*)
(*iii*) (*c*) (*iv*) (*b*)

## प्रश्नावली 13.3

**1.** (*i*) $104278 = 1 \times 10^5 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$
(*ii*) $20068 = 2 \times 10^4 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0$
(*iii*) $120719 = 1 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0$
(*iv*) $3006194 = 3 \times 10^6 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
(*v*) $28061906 = 2 \times 10^7 + 8 \times 10^6 + 6 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 6 \times 10^0$

**2.** (*i*) 47561 (*ii*) 30705 (*iii*) 405302
(*iv*) 80037580

**3.** (*i*) $3.43 \times 10^5$ (*ii*) $7.0 \times 10^6$ (*iii*) $3.1865 \times 10^9$
(*iv*) $5.307 \times 10^2$ (*v*) $5.9853 \times 10^3$ (*vi*) $3.90878 \times 10^3$

**4.** (*i*) $3.84 \times 10^8$ (*ii*) $1.2756 \times 10^7 m$ (*iii*) $1.40 \times 10^9 m$.
(*iv*) $1.2 \times 10^{10}$ years (*v*) $8.68 \times 10^{25}$ kg.

**5.** (*i*) $3.01 \times 10^{17} > 4.3 \times 10^{14}$ (*ii*) $1.439 \times 10^{12} > 1.4335 \times 10^{12}$.

अध्याय

# 14

W4L2M7

# सममिति

## उद्देश्य :-

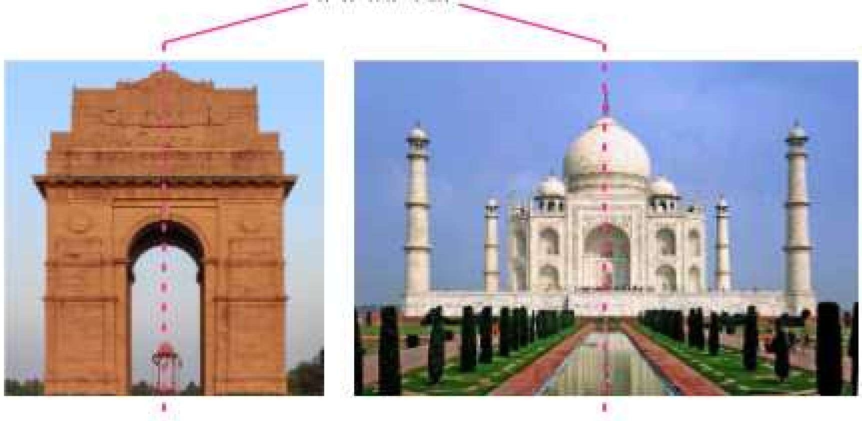
**इस अध्याय में आप सीखेंगे :-**

1. आकृतियों में सममिति और असममिति में अंतर ज्ञात करना।
2. सममिति रेखाएँ खींचना।
3. घूर्णन सममिति की धारणा, घूर्णन केन्द्र, घूर्णन कोण और घूर्णन के क्रम को समझना।
4. उन चित्रों (आकृतियों) के बारे में जिनमें सममिति और घूर्णन सममिति दोनों हों।
5. अधूरे सममिति चित्रों को पूरा करना।
6. दैनिक जीवन में सममिति का प्रयोग करना।

## भूमिका

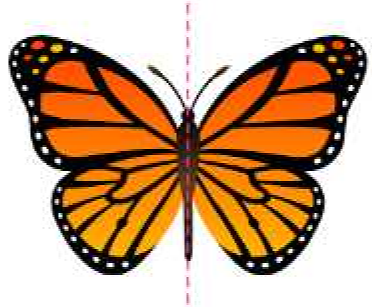
सममिति एक महत्वपूर्ण ज्यामितीय अवधारणा है, जिसके दैनिक जीवन में बहुत प्रयोग है। भिन्न-भिन्न क्षेत्रों में जैसे कार उतपदान, नक्शे और डिज़ाइनों में इसका प्रयोग किया जाता है। छठी कक्षा में हम ने रैखिक सममिति के बारे में अध्ययन किया है, जो कि एक आकृति को दो बराबर भागों में बाँटती है। हम इसान द्वारा और कुदरत द्वारा बनाई वस्तुओं में सममिति रेखाओं को देखते हैं जैसे फूलों में, पेड़ की पत्तियों में, धार्मिक चिह्नों में, इमारतों में आदि।

सममिति रेखा

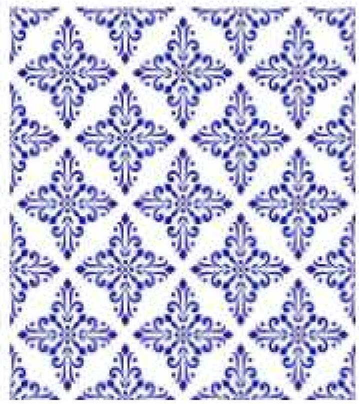


आर्किटेक्चर

इंडिया गेट और ताज महल के उपरोक्त चित्र, सममिति के कारण बहुत सुन्दर लगते हैं।



प्रकृति में सममिति

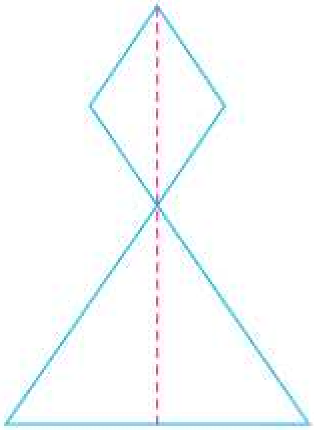


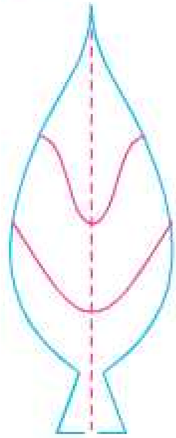
कपड़ों के डिज़ाइन में सममिति

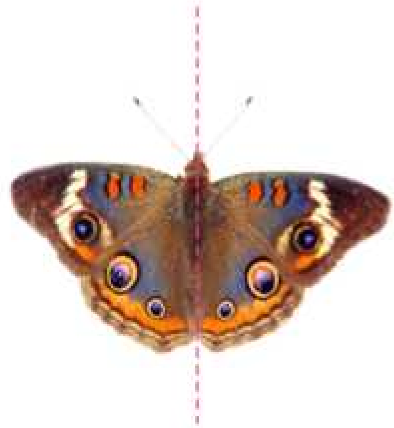
इंजीनियरिंग मे सममिति

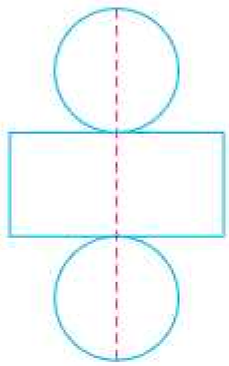
**असममिति आकृतियाँ (Asymmetrical figures) :** वे वस्तुएँ या आकृतियाँ जिनमें कोई सममिति रेखा न हो, असममिति वस्तुएँ आकृतियाँ कहलाती हैं।

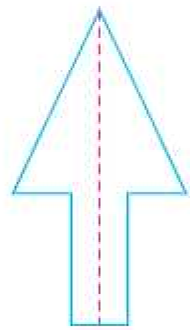
**सममिति रेखा (Line of symmetry) :** निम्न दी वस्तुओं के चित्रों को देखो :-


(i)


(ii)


(iii)

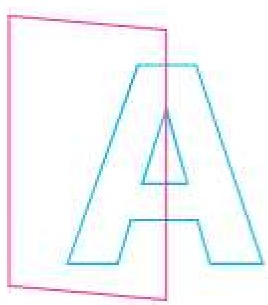

(iv)

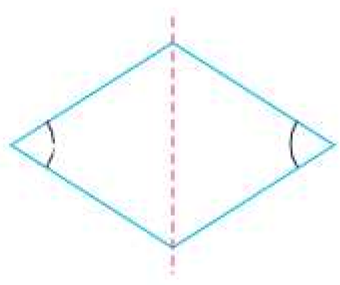

(v)

हम देखते हैं कि अगर आकृतियों में बिंदुकित रेखाओं द्वारा मोड़ने पर, बिंदुकित रेखा के दाईं तथा बाईं ओर एक जैसे चित्र होते हैं तो इसका अर्थ यह है कि प्रत्येक आकृति एक बिंदुकित रेखा द्वारा दो बराबर भागों में बाँटी जाती है।

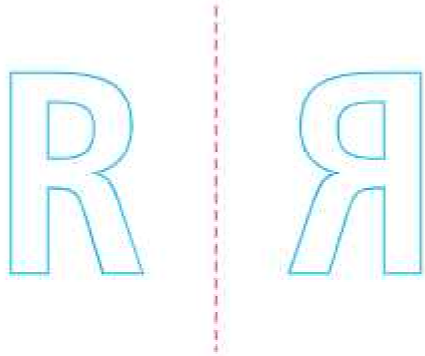
इस प्रकार, यदि एक आकृति को एक रेखा के द्वारा दो समान भागों में बाँटा जाता है तो वह उस रेखा के आस-पास समरूप कहे जाते हैं और उस रेखा को सममिति रेखा या सममिति का अक्ष कहा जाता है।

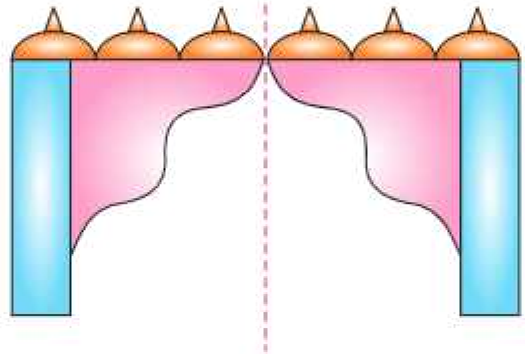
**दर्पण प्रतिबिंब (Mirror reflection) :** रैखिक सममिति की अवधारण का दर्पण परावर्तन से निकट का संबंध है। एक आकार में रैखिक सममिति तब होती है, जब उसका एक आधा भाग दूसरे आधे भाग का दर्पण प्रतिबिंब हो। इस प्रकार एक दर्पण रेखा हमें एक सममिति रेखा देखने या ज्ञात करने में सहायता करती है।


(i)


(ii)

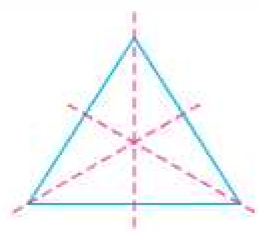
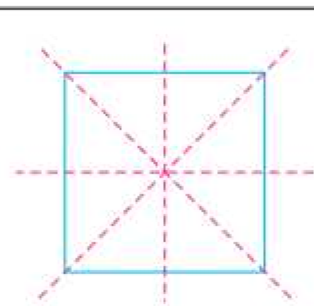
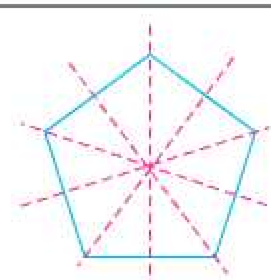
दर्पण परावर्तन के साथ कार्य करते समय, यह ध्यान रखना चाहिए कि एक आकृति के अभिमुखों में दाएँ–बाएँ परिवर्तन हो जाता है और आकृति बिल्कुल उलटी हो जाती है। दर्पण परावर्तन की कुछ उदाहरण निम्नलिखित अनुसार हैं।



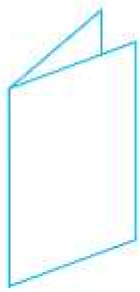


**सम बहुभुज के लिए सममिति रेखाएँ :** बहुभुज एक ऐसी बंद आकृति हैं, जो अनेक रेखाखंड़ों से बनी होती है। एक बहुभुज, सम बहुभुज कहलाता है, यदि इसकी सभी भुजाओं की लंबाइयाँ बराबर हों तथा सभी कोणों के माप बराबर हों। सम बहुभुज, सममित आकृतियाँ होती हैं और उनकी एक से अधिक सममिति रेखाएँ होती हैं। **वास्तव में समबहुभुज की उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं, जितनी उसकी भुजाएँ हैं।**

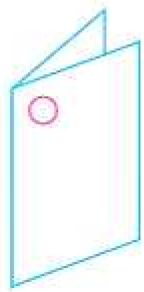
## कुछ समबहुभुज और उनकी सममिति रेखाएँ

| क्रम संख्या | समबहुभुज एवं उसकी विशेषताएं | आकृति और सममिति रेखाएँ | सममिति रेखाओं की गिनती |
|---|---|---|---|
| 1. | **समबाहु त्रिभुज :** वह त्रिभुज जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर होती हैं और प्रत्येक कोण 60° होता है। |  | 3 |
| 2. | **वर्ग :** वह चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएँ बराबर होती हैं और प्रत्येक कोण 90° होता है। इसके विकर्ण एक दूसरे को 90° पर समद्विभाजित करते हैं। |  | 4 |
| 3. | **सम पंचभुज :** पाँच भुजाओं वाला बहुभुज जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर होती है और प्रत्येक कोण 108° होता है। |  | 5 |

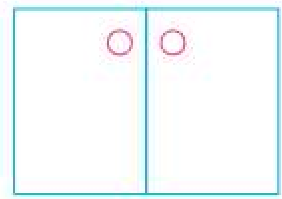
**पेपर में छेद करना :** एक कागज़ को बीच में से मोड़कर किसी भी स्थान पर छेद करके उसे खोलने पर जो क्रीज़ बनती है, उसे सममिति रेखा कहते हैं। फोल्ड क्रीज़ खोलने पर प्राप्त छेदों का डिज़ाइन सममित डिज़ाइन है।



एक कागज़ को 2 आधों में मोड़िए

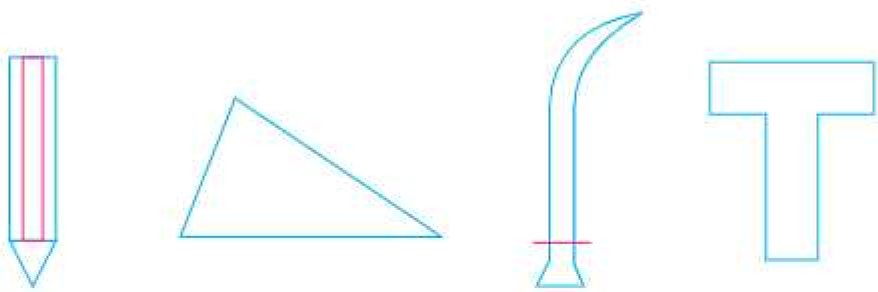


एक छेद करिए



सममिति रेखा के अनुदिश दो छेद

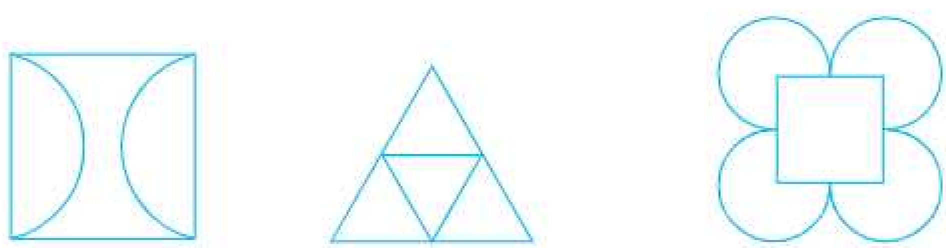
**उदाहरण-1 : निम्न आकृतियों में से कौन सी आकृति असममित है ?**



(a) (b) (c) (d)

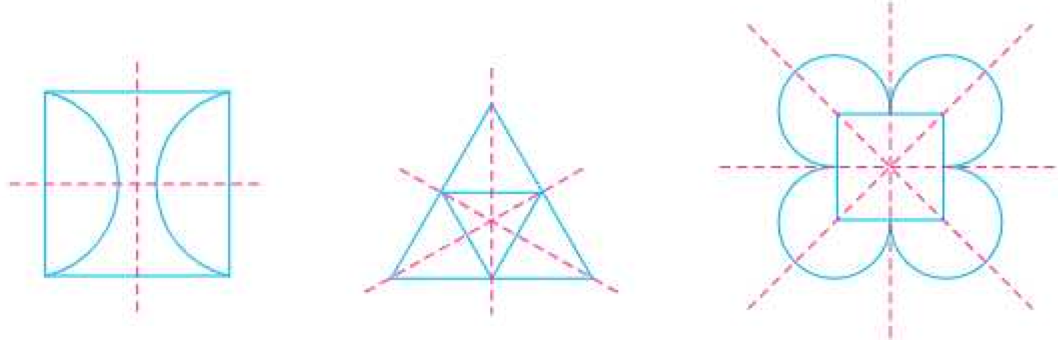
**हल :** $(b)$ और $(c)$ असममित तथा $(a)$ और $(d)$ सममित आकृतियाँ हैं।

**उदाहरण-2 : सममिति रेखाएँ खींचो यदि दिए हुए चित्रों में कोई सममिति रेखा हो।**

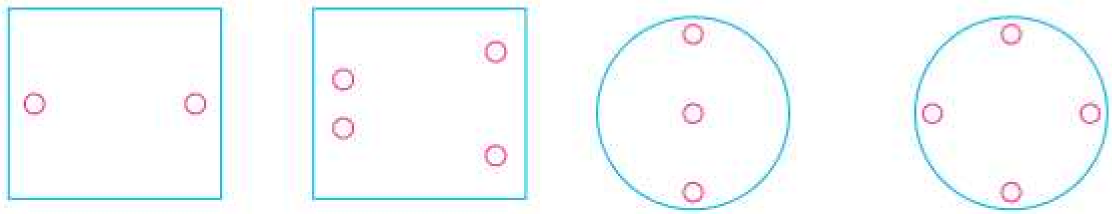


(a) (b) (c)

**हल :**

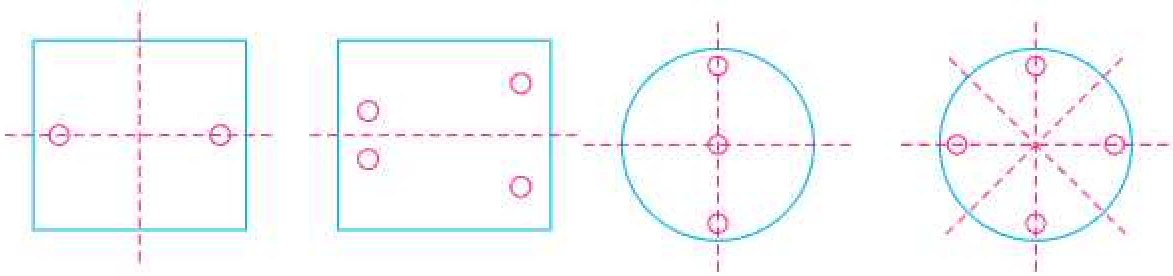


**उदाहरण-3 :** निम्न दी आकृतियों में छेद के अनुसार प्रत्येक में सममिति रेखा खींचो।

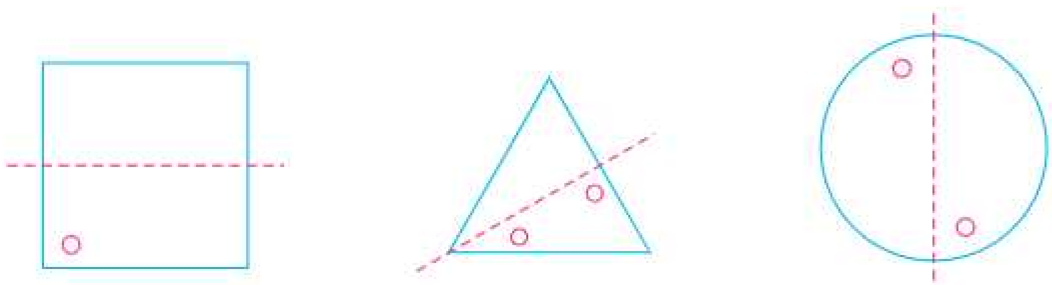


(a) (b) (c) (d)

**हल :**

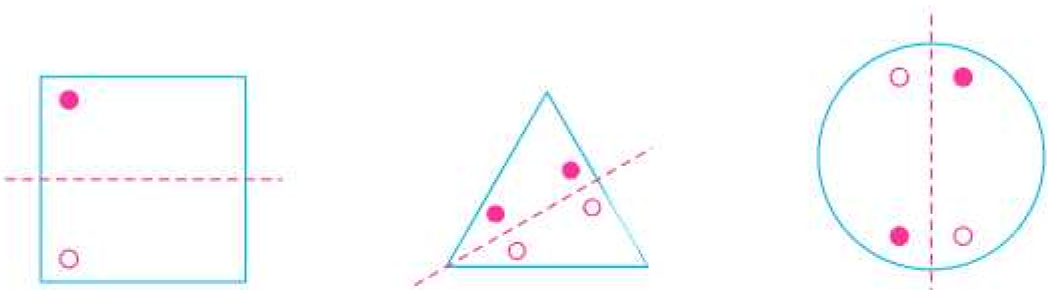


**उदाहरण-4 :** दिए गए चित्रों में, दी गई बिंदुकित रेखानुसार सममिति बनाने के लिए छेद लगाएँ।

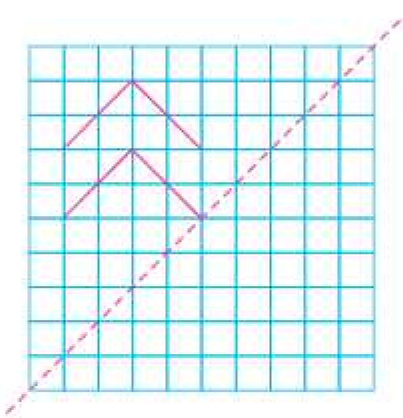


(a) (b) (c)

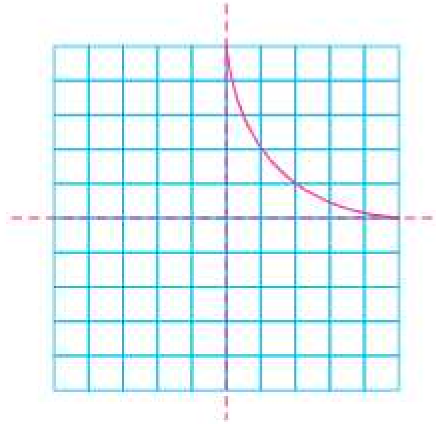
**हल :** सममिति वाले छेद को लाल रंग के चक्र द्वारा दिखाया गया है।



**उदाहरण-5 : प्रत्येक आकृति को ग्राफ पेपर पर बनाओ और प्रत्येक आकृति को दर्पण प्रतिबिंब के अनुसार पूरा करो।**

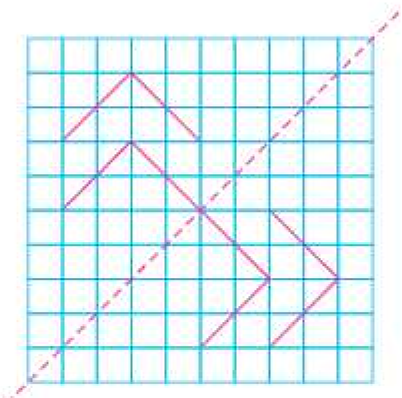


(a)

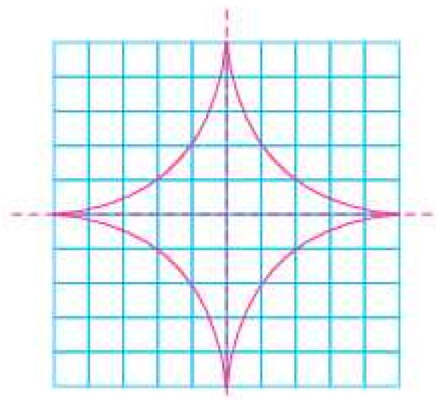


(b)

**हल :** पूरी की आकृतियाँ, निम्न अनुसार है :



(a)

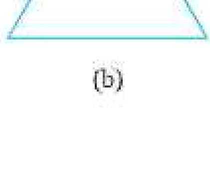


(b)

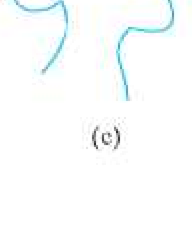
## प्रश्नावली - 14.1

**1.** निम्नलिखित में से कौन सी आकृति सममित नहीं हैं।

(a)



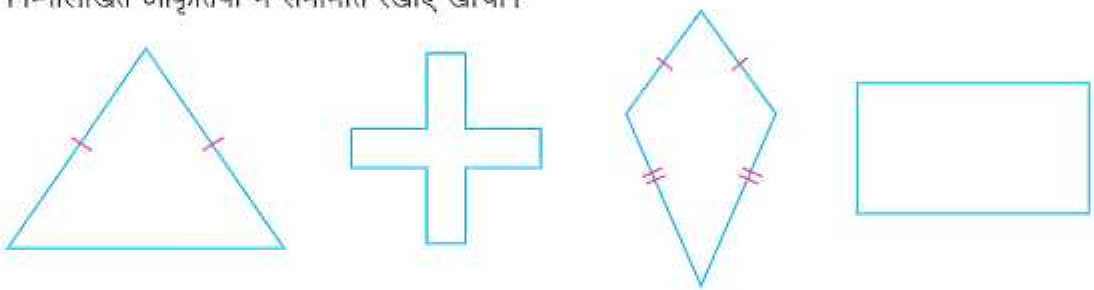
(b)



(c)

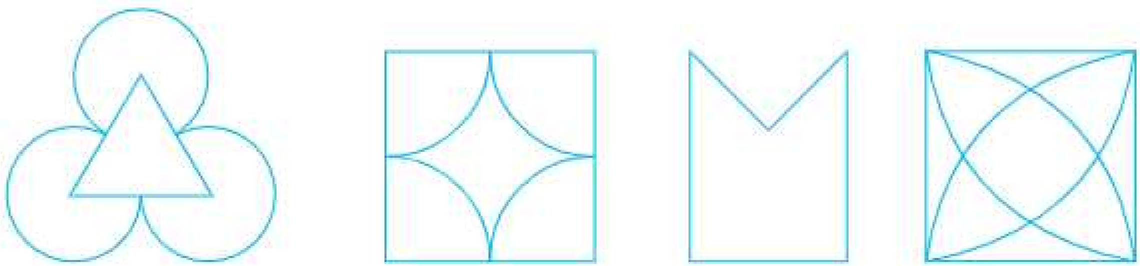
(d)

**2.** निम्नलिखित आकृतियों में सममिति रेखाएँ खींचो।



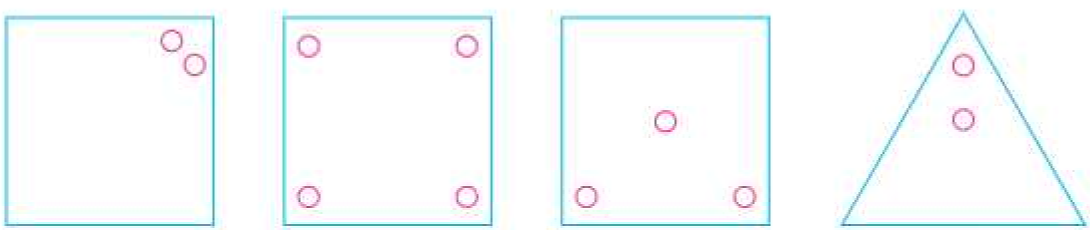
(a) (b) (c) (d)

**3.** निम्नलिखित आकृतियों में सभी सममिति रेखाएँ खींचो।

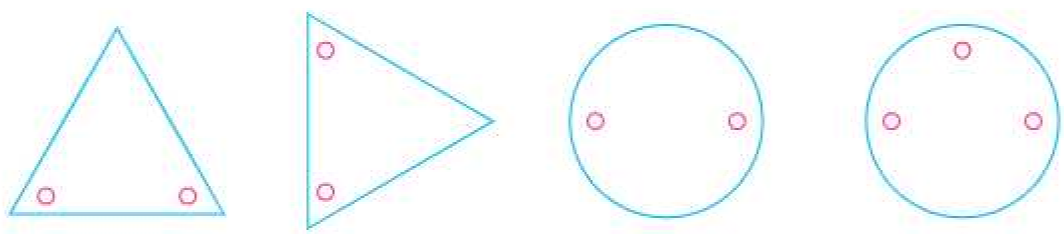


(a) (b) (c) (d)

**4.** निम्नलिखित में छेद के अनुसार, सममिति रेखाएँ ढूँढ़ें।

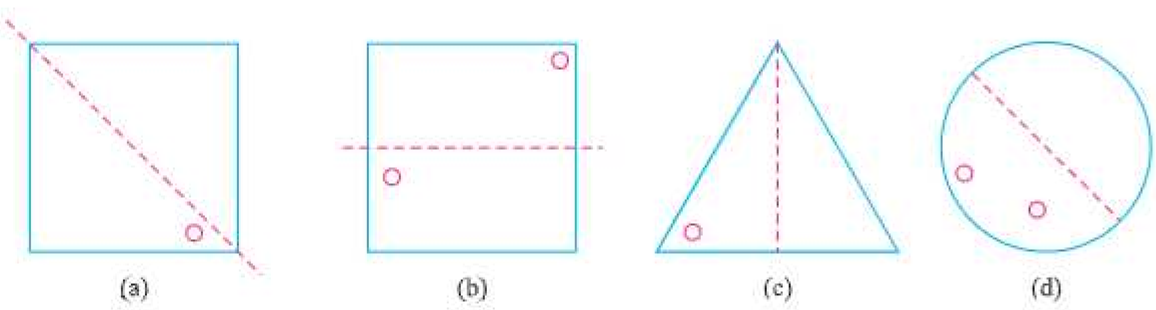


(a) (b) (c) (d)



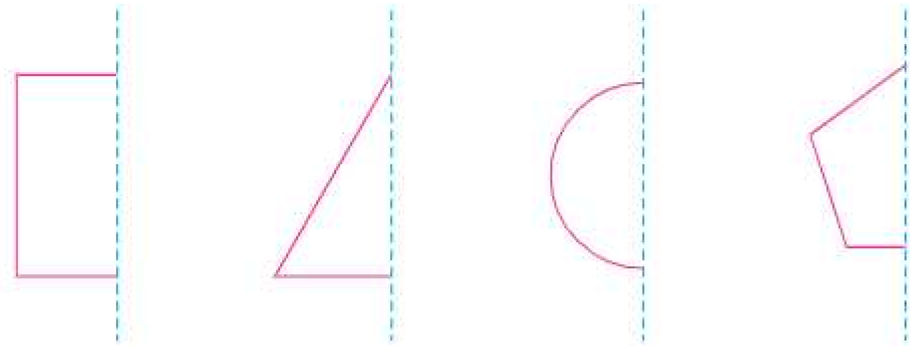
(e) (f) (g) (h)

**5.** निम्न आकृतियों मे दी बिंदुकित रेखा के द्वारा सममिति बनाने के लिए छेद लगाएँ।



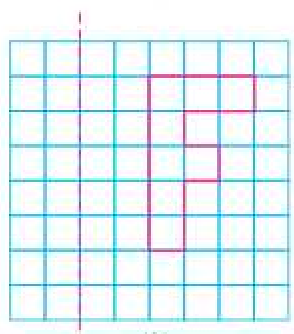
(a) (b) (c) (d)

**6.** निम्नलिखित आकृतियों में, दर्पण रेखा (अर्थात् सममिति रेखा) बिंदुकित रेखा के रूप में दी गई है। बिंदुकित रेखा में प्रत्येक आकृति का परावर्तन करके, प्रत्येक आकृति को पूरा कीजिए। (आप बिंदुकित रेखा के अनुदिश एक दर्पण रख सकते हैं और फिर प्रतिबिंब के लिए दर्पण मे देख सकते हैं) क्या आप आकृति का नाम बता सकते हो।

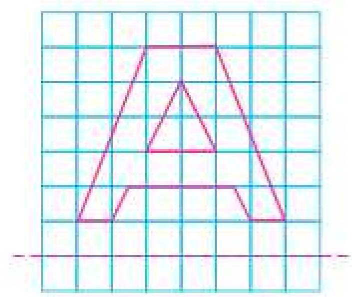


(a) (b) (c) (d)

**7.** दी गई दर्पण रेखा में अक्षर का प्रतिबिंब बनाइए।

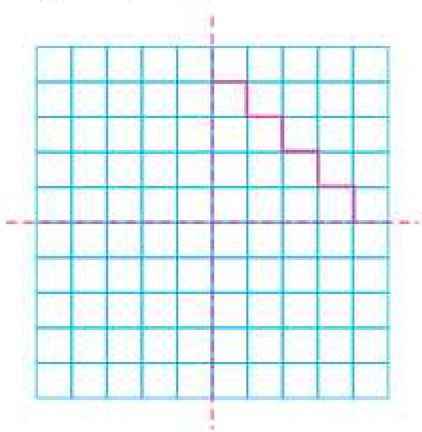


(a)

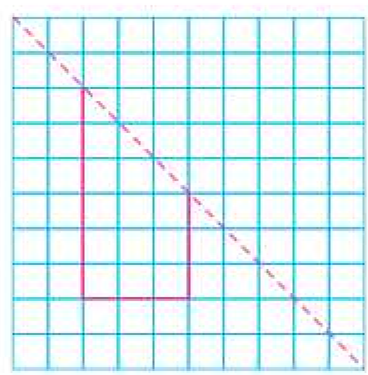


(b)

**8.** प्रत्येक आकृति को ग्राफ पेपर पर बनाओ और प्रत्येक आकार को इस तरह पूरा कीजिए ताकि वह आकार दर्पण रेखा के अनुदिश सममित हो।



(a)



(b)

**9.** निम्नलिखित आकृतियों के लिए सममिति रेखाओं की संख्याएँ बताइए :

(*a*) एक विषमबाहु त्रिभुज (*b*) एक आयत

(*c*) एक समचतुर्भुज (*d*) एक समांतर चतुर्भुज

(*e*) एक सम षड्भुज (*f*) एक वृत्त

**10. बहुवैकल्पिक प्रश्न—**

(*i*) निम्नलिखित में से कौन से त्रिभुज की कोई भी सममिति रेखा नही है।

(*a*) समबाहु त्रिभुज (*b*) समद्विबाहु त्रिभुज

(*c*) विषमबाहु त्रिभुज (*d*) उपरोक्त सभी

(*ii*) वृत की सममिति रेखा का दूसरा नाम क्या है ?

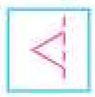
(*a*) चाप (*b*) त्रिज्यखंड

(*c*) व्यास (*d*) त्रिज्या

(*iii*) एक समबहुभुज की कितनी सममिति रेखाएँ होती है ?

(*a*) अनगिनत (*b*) जितनी भुजाओं की गिनती हो।

(*c*) एक (*d*) शुन्य

(*iv*) दिए गए चित्र में एक बिंदुकित रेखा है यदि वह सममिति रेखा हो तो आकृति के पूरा करने पर वह कौन सी आकृति बनेगी ? 

(*a*) वर्ग (*b*) समचतुर्भुज

(*c*) त्रिभुज (*d*) पंचभुज

(*v*) समद्विबाहु त्रिभुज की सममिति रेखा का दूसरा नाम क्या है ?

(*a*) भुजा (*b*) माध्यिका

(*c*) त्रिज्या (*d*) कोण

(*vi*) निम्नलिखित अक्षरों में से किस की लंबवत सममिति रेखा है ?

(*a*) M (*b*) Q

(*c*) E (*d*) B

(*vii*) निम्नलिखित अक्षरों में से किस की क्षैतिज सममिति रेखा है ?

(*a*) C (*b*) D

(*c*) K (*d*) उपरोक्त सभी

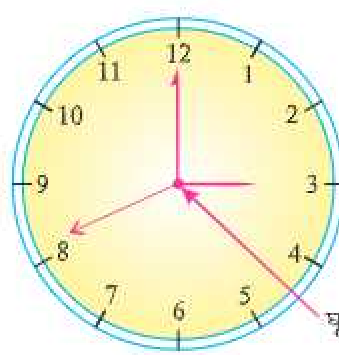
(*viii*) कौन से अक्षर की कोई सममिति रेखा नहीं हैं?

(*a*) A (*b*) B

(*c*) P (*d*) O

**घूर्णन सममिति (Rotational symmetry) :**हम अपने दैनिक जीवन में ऐसी बहुत सी वस्तुऐं देखते हैं जो घूमती हैं। घूर्णन किसी वस्तु का एक निशान बिंदु के आस-पास वृत्ताकार गति है। यह दोनों ही दिशाओं अर्थात् दक्षिणावर्त और वामावर्त में हो सकती हैं। जैसे कि हम एक बोतल का ढक्कन वामावर्त दिशा में घुमाकर खोलते हैं और उस बंद करने के लिए दक्षिणावर्त दिशा में घुमाते हैं।

**घूर्णन का केंद्र (Centre of rotation) :** वह निश्चित बिन्दु जिस के चारों ओर कोई वस्तु घूमती है, को उसका घूर्णन केंद्र कहते हैं। जैसे कि एक घड़ी में तीन सुइयाँ जहाँ होती हैं वह घड़ी का घूर्णन केंद्र है जैसे आकृति में दिखाया गया है।



घूर्णन का केंद्र

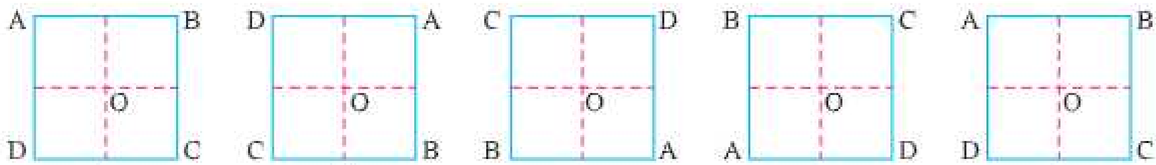
**घूर्णन कोण (Angle of rotation) :** वह छोटे से छोटा कोण, जिस के अनुसार किसी वस्तु को घूर्णन के दौरान घुमाया जाए, और इस तरह वह आकृति या वस्तु अपनी पहली स्थिति में आ जाए, घूर्णन कोण कहलाता है। आप जानते है कि एक पूरे चक्कर में $360°$ का घूर्णन होता है। एक आधे चक्कर का अर्थ $180°$ का घूर्णन है तथा एक चौथाई चक्कर का अर्थ $90°$ का घूर्णन कोण है।

**घूर्णन सममिति का क्रम (Order of rotational symmetry) :** $A°$ वह छोटे से छोटा कोण है जिस अनुसार वह वस्तु या आकृति ''अपनी पहले जैसी स्थिति में आ जाए, तो उस घूर्णन सममिति का क्रम = $\frac{360}{A°}$ होगा।

किसी आकृति की घूर्णन सममिति के लिए $A°$, $180°$ के बराबर या इस से कम होना चाहिए। ($A° \leq 180°$)

## घूर्णन सममिति के उदाहरण (Example of rotation symmetry)

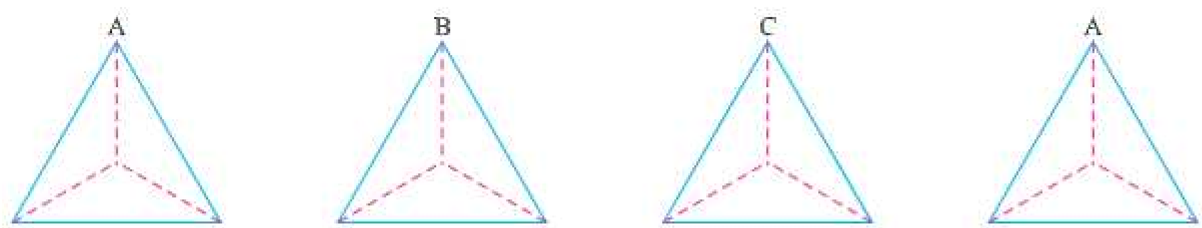
(*i*) **वर्ग की घूर्णन सममिति :** एक वर्ग ABCD (चित्र *a*) को पूरा घुमाने पर अर्थात चार स्थितियां $90°$ (चित्र *b*), $180°$ (चित्र *c*), $270°$ (चित्र *d*) और $360°$ (चित्र *e*) के अनुसार वह वास्तविक स्थिति में ही है।




(a) वास्तविक स्थिति | (b) 90° पर घूमने पर | (c) 180° पर घूमने पर | (d) 270° पर घूमने पर | (e) 360° पर घूमने पर

इस तरह, वर्ग चार बार घुमाने पर अपनी पहले जैसी स्थिति में आ जाता है। इसलिए, इसका घूर्णन सममिति का क्रम 4 है।

(*ii*) **समबाहु त्रिभुज की घूर्णन सममिति :** एक समबाहु त्रिभुज को $120°$ के कोण पर घुमाओ। हम देखते है कि एक पूरे चक्कर में तीन ऐसी स्थितियाँ है ($120°$, $240°$ अते $360°$) जब वह वास्तविक स्थिति में दिखाई देता है। इस तरह, समबाहु त्रिभुज की घूर्णन सममिति का क्रम 3 हैं।




(a) वास्तविक स्थिति | (b) 120° पर घूमने पर | (c) 240° पर घूमने पर | (d) 360° पर घूमने पर

इस स्थिति में,

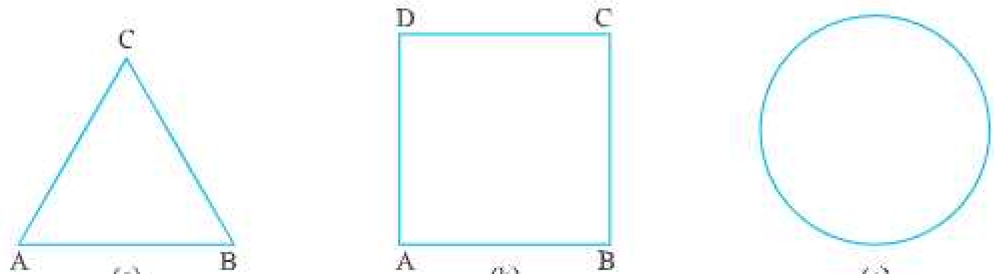
(*i*) घूर्णन केंद्र, त्रिभुज के कोणों का समद्विभाजक का संपाती बिंदु है।

(*ii*) घूर्णन कोण $120°$ है।

(*iii*) घूर्णन की दिशा दक्षिणावर्त है।

(*iv*) घूर्णन सममिति का क्रम 3 है।

**उदाहरण-1 : निम्न आकृत्तियों के लिए सममिति का क्रम लिखो।**

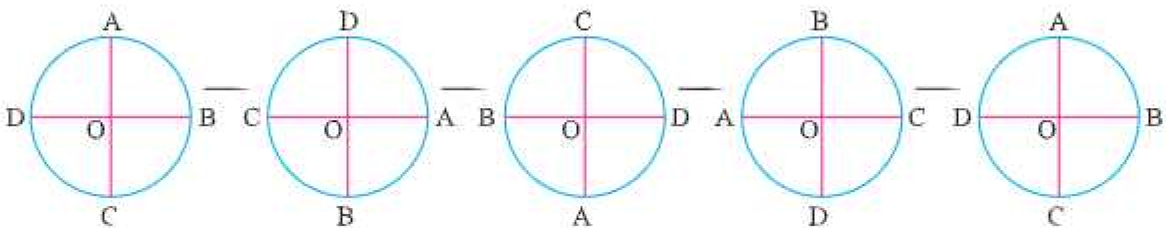



(a) समबाहु त्रिभुज (b) वर्ग (c) वृत

हल :

| क्रमांक | आकृति का नाम | सममिति का क्रम |
|---|---|---|
| 1. | समबाहु त्रिभुज | 3 |
| 2. | वर्ग | 4 |
| 3. | वृत्त | अनंत |

**उदाहरण-2 : निम्न के लिए, घूर्णन केंद्र, घूर्णन दिशा, घूर्णन कोण तथा घूर्णन सममिति का क्रम बताओ।**



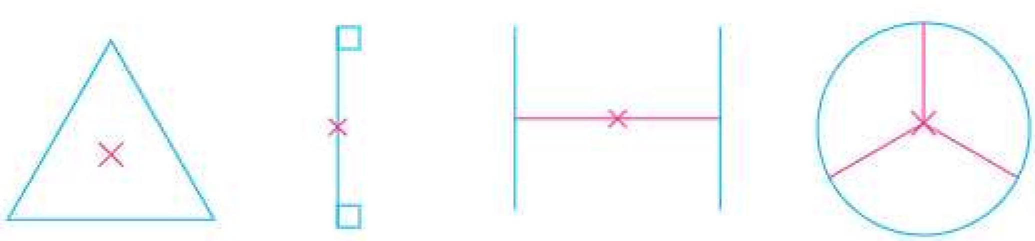

हल : (*i*) घूर्णन केंद्र O है।

(*ii*) घूर्णन दिशा दक्षिणावर्त है।

(*iii*) घूर्णन कोण 90° है।

(*iv*) घूर्णन सममिति का क्रम 4 है।

**उदाहरण-3 : दिऐ बिंदु (X) के अनुसार, किस आकृति में घूर्णन सममिति है। घूर्णन कोण और घूर्णन सममिति का क्रम भी बताएँ।**



(a) (b) (c) (d)

**हल :** आकृति (*a*) में, (×) के अनुसार घूर्णन सममिति का क्रम 3 है और घूर्णन कोण 120° है।

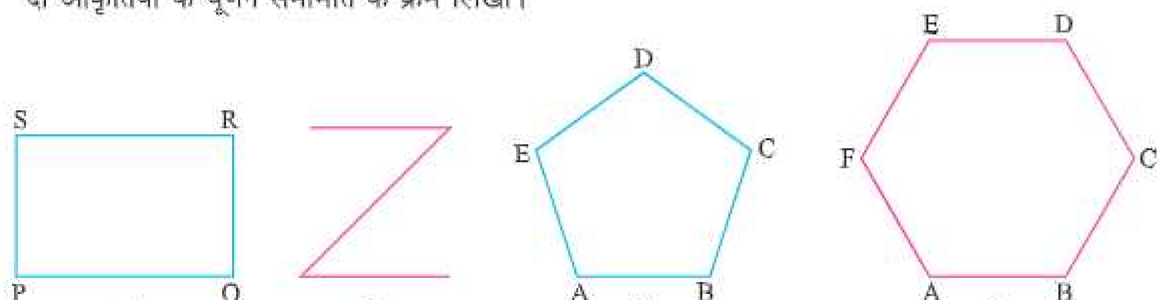
आकृति (*b*) में, (×) के अनुसार घूर्णन सममिति नहीं है।

आकृति (*c*) में, (×) के अनुसार घूर्णन सममिति का क्रम 2 है और घूर्णन कोण 180° है।

आकृति (*d*) में, (×) के अनुसार घूर्णन सममिति का क्रम 3 है और घूर्णन कोण 120° है।

## प्रश्नावली - 14.2

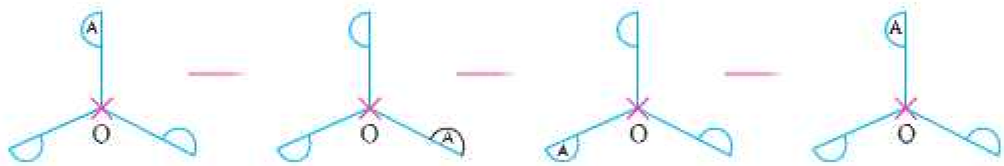
**1.** दी आकृतियों के घूर्णन सममिति के क्रम लिखो।



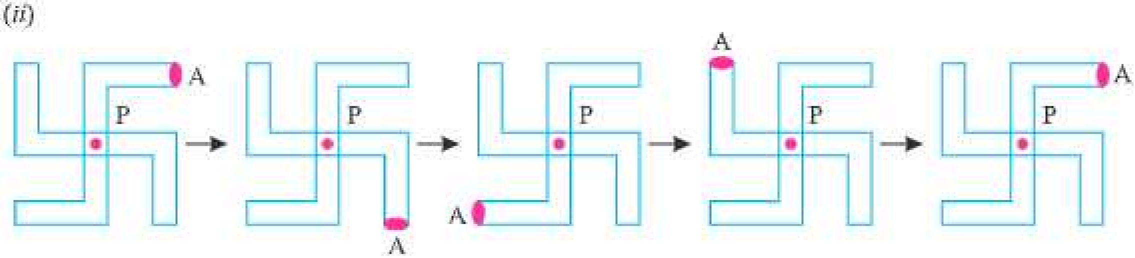

(a) (b) (c) (d)

**2.** दी आकृतियों का घूर्णन केंद्र, घूर्णन दिशा, घूर्णन कोण तथा घूर्णन सममिति का क्रम बताएँ।

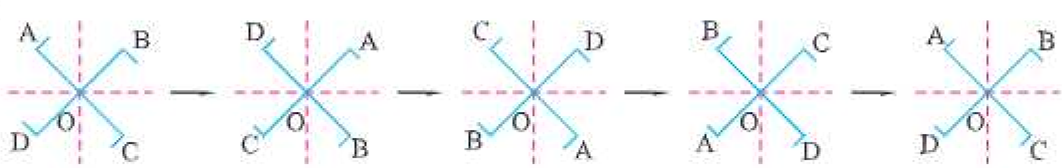
(*i*)



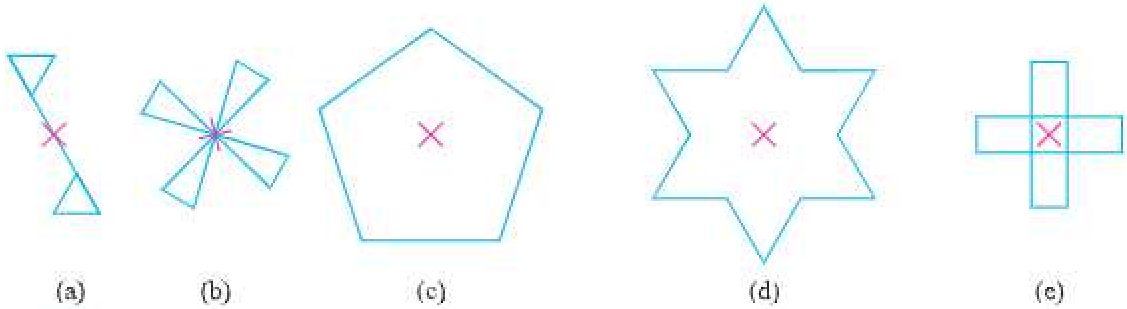

(*ii*)




(*iii*)



**3.** निम्न आकृतियों में, दिऐ बिंदु (×) के अनुसार घूर्णन सममिति है या नहीं, पता करो। और घूर्णन कोण और घूर्णन सममिति का क्रम भी बताओ।




**4. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) समबाहु त्रिभुज का घूर्णन कोण है :

(*a*) 60° (*b*) 70°

(*c*) 90° (*d*) 120°

(*ii*) एक वर्ग का अपने केंद्र पर घूर्णन सममिति का क्रम 4 है। इसका घूर्णन केंद्र क्या होगा ?

(*a*) 45° (*b*) 90°

(*c*) 180° (*d*) 270°

(*iii*) अंग्रेज़ी के अक्षर Z की घूर्णन सममिति का क्रम क्या है ?

(*a*) 0 (*b*) 1

(*c*) 2 (*d*) 3

(*iv*) निम्नलिखित अक्षरों में से किस की घूर्णन सममिति है ?

(*a*) S (*b*) E

(*c*) B (*d*) P

(*v*) यदि घूर्णन कोण 90° है तो घूर्णन सममिति का क्रम क्या होगा ?

(*a*) 1 (*b*) 3

(*c*) 4 (*d*) 2

**रैखिक सममिति और घूर्णन सममिति :** आप अभी तक अनेक आकारों और उनकी सममितियों को देखते आ रहे हैं। कुछ आकारों में केवल रैखिक सममिति होती है, कुछ में केवल घूर्णन सममिति होती है तथा कुछ आकारों में रैखिक और घूर्णन दोनों प्रकार की सममितियाँ होती है।

(*i*) एक समबाहु त्रिभुज की एक सममिति रेखा होती है परन्तु घूर्णन सममिति नहीं होती।

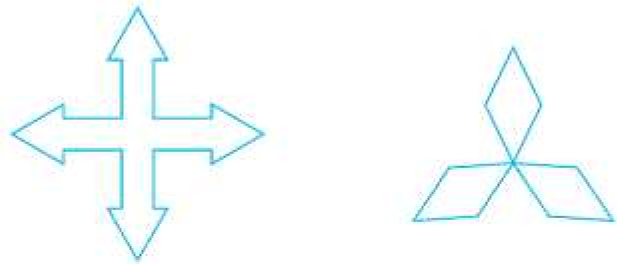
(*ii*) एक समांतर चतुर्भुज की घूर्णन सममिति होती है परन्तु रैखिक सममिति नहीं होती।

(*iii*) एक वर्ग की रैखिक सममिति और घूर्णन सममिति दोनों होती है। वर्ग की 4 सममिति रेखाएँ होती है और घूर्णन सममिति का क्रम 4 है।

(iv) एक वृत्त सबसे अधिक पूर्ण सममित आकृति है क्योंकि इसकी अनंत सममिति रेखाएँ है और इसे केंद्र के परित किसी भी कोण पर घुमाया जा सकता है।

**नोट :** यदि किसी आकार की दो या दो से अधिक सममिति रेखाऐं हों तो उसकी घूर्णन सममिति भी होती है।

**उदाहरण-1 :** **निम्न आकृतियों में सममिति रेखाओं की गिनती और घूर्णन कोण ज्ञात करो।**



(a) (b)

हल : (*a*) सममिति रेखाओं की गिनती = 2

घूर्णन कोण = 90°

(*b*) सममिति रेखों की गिनती = 3

घूर्णन कोण = 120°

**उदाहरण-2 :** **निम्नलिखित आकृतियों में रैखिक सममिति और घूर्णन सममिति दोनों है। सममिति रेखाओं की गिनती, घूर्णन केंद्र और घूर्णन सममिति का क्रम बताओ।**

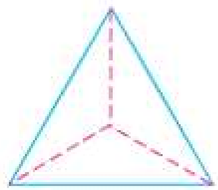
(a) (b) (c)

हल :

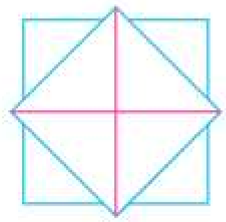
| क्रम संख्या | आकृति का नाम | सममिति रेखाओं की गिनती | घूर्णन केंद्र | घूर्णन सममिति का क्रम |
|---|---|---|---|---|
| 1. | वर्ग | 4 | विकर्णों का प्रतिच्छेद-बिंदु | 4 |
| 2. | आयत | 2 | विकर्णों का प्रतिच्छेद-बिंदु | 2 |
| 3. | वृत्त | अनंत | केंद्र | अनंत |

## प्रश्नावली - 14.3

1. निम्न आकृतियों में, सममिति रेखाओं की कितनी तथा घूर्णन सममिति कोण ज्ञात करो।

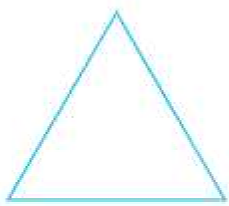


(a)



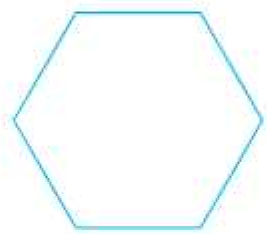
(b)

2. किन्हीं दो आकृतियों के नाम लिखो, जिन की रैखिक सममिति और घूर्णन सममिति दोनों हो।
3. यदि किसी आकृति में दो या दो से अधिक सममिति रेखा हो तो क्या उनकी घूर्णन सममिति का क्रम एक से अधिक होगा ?
4. निम्न आकृतियों में रैखिक सममिति और घूर्णन सममिति दोनों हैं। सममिति रेखाओं की गिनती, घूर्णन कोण और घूर्णन सममिति का क्रम ज्ञात कीजिए।



(a)

(b)



(c)

5. अंग्रेज़ी वर्णमाला के कुछ अक्षरों में अद्‌भुत एवं आकर्षक सममितीय संरचनाएँ हैं। किन बड़े अक्षरों में केवल एक ही सममिति रेखा है ? किन बड़े अक्षरों में क्रम 2 की घूर्णन सममिति है ? उपरोक्त प्रकार से सोचते हुए, आप निम्नलिखित सारणी को भरने में समर्थ हो पाएँगे :

| वर्णमाला का अक्षर | रैखिक सममिति | सममिति रेखाओं की संख्या | घूर्णन सममिति | घूर्णन सममिति का क्रम |
|---|---|---|---|---|
| Z | नहीं | | हां | |
| S | | 0 | | 2 |
| H | | 2 | | |
| O | हां | | | 4 |
| E | हां | 1 | | |
| N | | | हां | |
| C | हां | | | 1 |

6. **बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) यदि किसी आकृति का छोटे से छोटा घूर्णन कोण $60^\circ$ है तो उस आकृति का और कौन सा घूर्णन कोण होगा?

(*a*) $150^\circ$ (*b*) $180^\circ$
(*c*) $90^\circ$ (*d*) $330^\circ$

(*ii*) निम्नलिखित में से कौन सा कोण किसी भी आकृति का घूर्णन कोण नहीं हो सकता ?

(*a*) $120^\circ$ (*b*) $180^\circ$
(*c*) $17^\circ$ (*d*) $90^\circ$

(*iii*) निम्नलिखित में से किस आकृत्ति की रैखिक सममिति और घूर्णन सममिति दोनों हो सकती हैं ?

(a) समद्विबाहु त्रिभुज (b) विषमबाहु त्रिभुज
(c) वर्ग (d) समांतर चतुर्भुज

(*iv*) कौन से अक्षरों में रैखिक सममिति और घूर्णन सममिति दोनों हैं ?

(a) S (b) O
(c) H (d) L

(*v*) 'MATHS' शब्द में, कौन से अक्षर की घूर्णन सममिति है ?

(a) M और T (b) H और S
(c) A और S (d) T और S

## हमने क्या चर्चा की ?

1. एक आकृति की सममित रेखा एक ऐसी रेखा है जिसके इर्द-गिर्द आकृति को बराबर भागों में मोड़ा जा सकता है।
2. प्रत्येक सम बहुभुज में जितनी भुजाओं की गिनती होती हैं, उतनी ही सममिति रेखाओं की गिनती होती है।
4. घूर्णन में एक वस्तु को एक निश्चित बिंदु के परित घुमाया जाता है।
   - यह निश्चित बिंदु घूर्णन का केंद्र कहलाता है।
   - जिस कोण पर वस्तु घूमती है, उसे घूर्णन का कोण कहते हैं।
   - पूरे चक्कर का घूर्णन कोण $360^\circ$ होता है, आधे चक्कर का घूर्णन कोण $180^\circ$ होता है और वह घूर्णन दक्षिणावर्त और वामावर्त दोनों ही दिशाओं में हो सकता है।
5. एक समतल आकार की घूर्णन सममिति होती है यदि वह $180^\circ$ या उससे कम घूर्णन कोण पर घूमकर वापस अपनी वास्तविक स्थिति में आ जाए।
6. यदि किसी आकृति को $A^\circ$ ($\leq 180^\circ$) के घूर्णन कोण पर घुमाने पर वह आकृति अपनी वास्तविक स्थिति जैसी ही हो तो उस आकृति के घूर्णन का क्रम $= \dfrac{360^\circ}{A^\circ}$ होता है।
7. यदि घूर्णन सममिति का क्रम 1 हो तो इस का अर्थ है कि आकृति की घूर्णन सममिति नहीं है।
8. कुछ आकारों में केवल रैखिक सममिति होती है, कुछ आकारों में केवल घूर्णन सममिति होती है और कुछ आकारों में दोनों होती हैं।

### सीखने के परिणाम

**इस अध्याय के पूर्ण होने पर विद्यार्थी :**

1. सममिति और असममिति आकारों में अंतर बताने के योग्य हैं।
2. सममिति रेखाएँ खींचने के योग्य हैं।
3. रैखिक सममिति और घूर्णन सममिति में अंतर बताने के योग्य हैं।

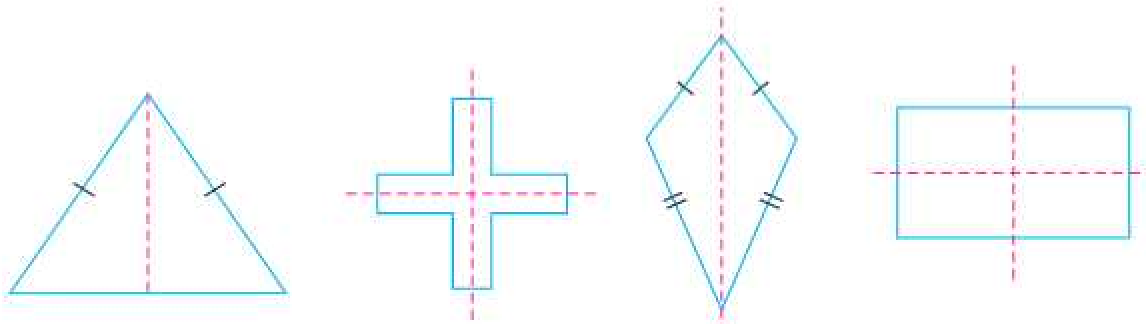
4. घूर्णन केंद्र, घूर्णन कोण, घूर्णन सममिति का क्रम ज्ञात करने के योग्य हैं।
5. दर्पण और कुछ घुमावदार स्थितियों में सममिति बताने के योग्य हैं।

# उत्तरमाला

## प्रश्नावली 14.1

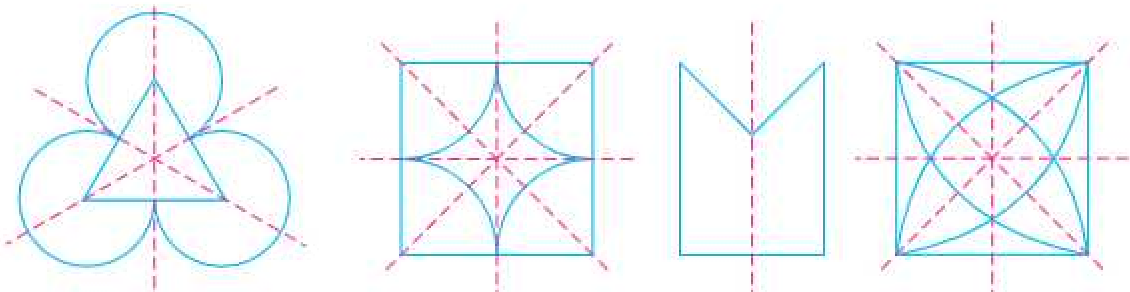
1. आकृति $(a)$ और $(c)$ में सममिति नहीं है।

2.



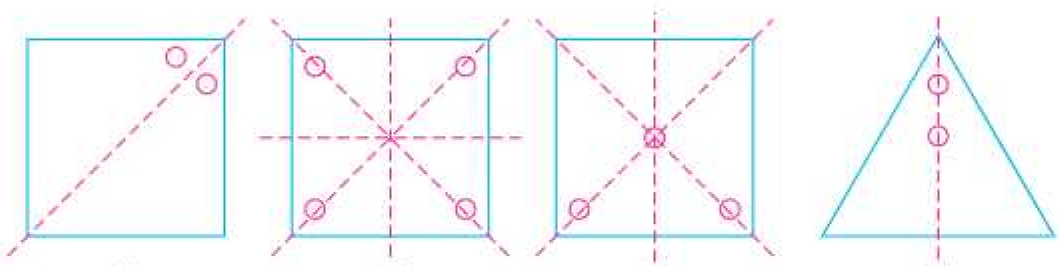
(a) (b) (c) (d)

3.

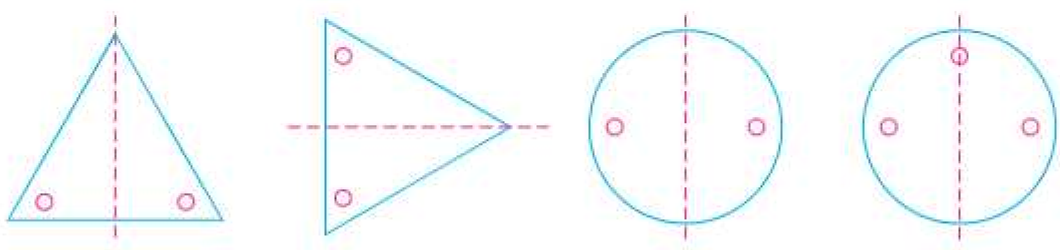


(a) (b) (c) (d)

4.

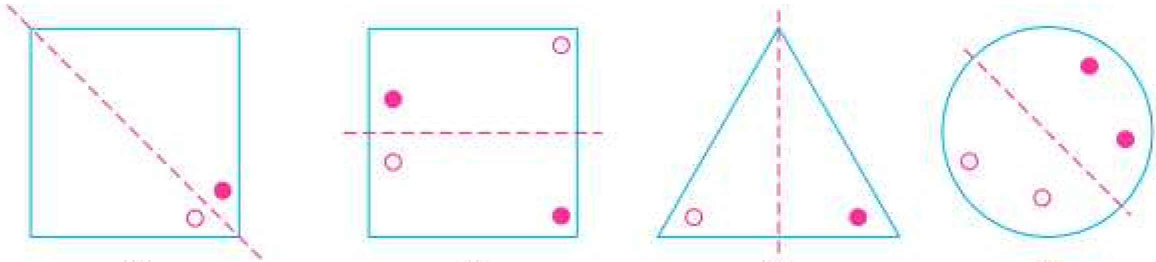


(a) (b) (c) (d)



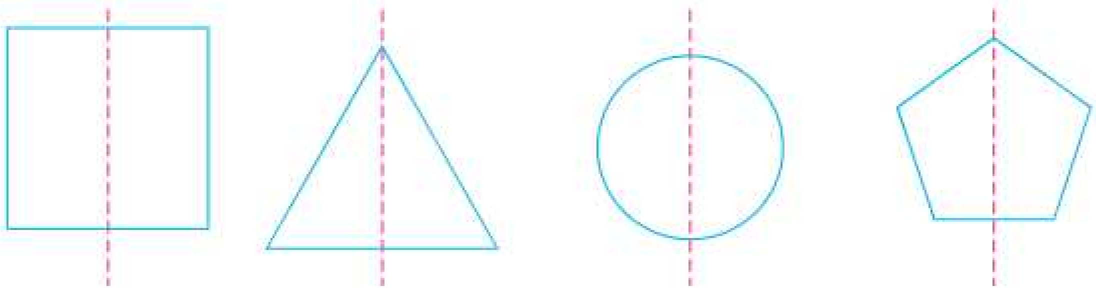
(e) (f) (g) (h)

**5.** बिंदुकित रेखा के अनुदिश खींची सममिति रेखा में छेद के साथ दर्शाई गई है।



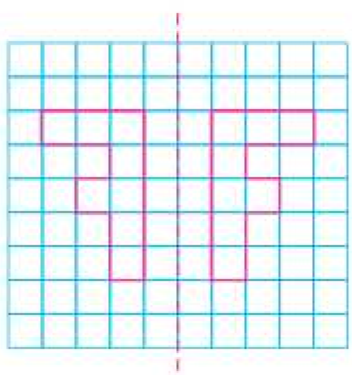
(a) (b) (c) (d)

**6.**

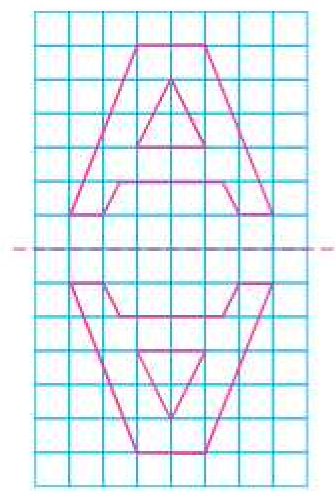


(a) वर्ग (b) त्रिभुज (c) वृत्त (d) पंचभुज

**7.**

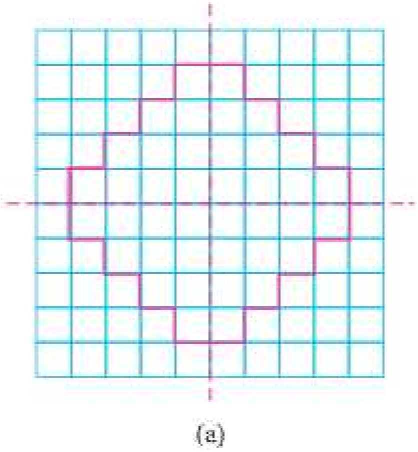


(a)

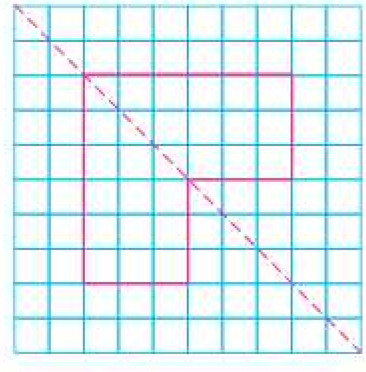


(b)

**8.**



(a)



(b)

9. (*a*) 0 (*b*) 2 (*c*) 2
(*d*) 0 (*e*) 6 (*f*) अनंत

10. (*i*) *a* (*ii*) *c* (*iii*) *b*
(*iv*) *b* (*v*) *b* (*vi*) *a*
(*vii*) *d* (*viii*) *c*

## प्रश्नावली 14.2

1. (*a*) 2 (*b*) 2
(*c*) 5 (*d*) 6

2. (*i*) घूर्णन केंद्र O है, घूर्णन दक्षिणावर्त दिशा है, घूर्णन कोण 120° है और घूर्णन सममिति का क्रम 3 है।
(*ii*) घूर्णन केंद्र P है, घूर्णन दक्षिणावर्त दिशा है, घूर्णन कोण 90° है और घूर्णन सममिति का क्रम 4 है।
(*iii*) घूर्णन सममिति O है, घूर्णन दक्षिणावर्त दिशा है, घूर्णन कोण 90° है और घूर्णन सममिति का क्रम 4 है।

3. (*a*) घूर्णन सममिति है, घूर्णन कोण 180° है और घूर्णन सममिति क्रम 2 है।
(*b*) घूर्णन सममिति है, घूर्णन कोण 90° है और घूर्णन सममिति क्रम 4 है।
(*c*) घूर्णन सममिति है, घूर्णन कोण 72° है और घूर्णन सममिति क्रम 5 है।
(*d*) घूर्णन सममिति है, घूर्णन कोण 60° है और घूर्णन सममिति क्रम 6 है।
(*e*) घूर्णन सममिति है, घूर्णन कोण 90° है और घूर्णन सममिति क्रम 4 है।

4. (*i*) *d* (*ii*) *b* (*iii*) c
(*iv*) *a* (*v*) *c*

## प्रश्नावली 14.3

1. (*a*) सममिति रेखाएँ 3, घूर्णन केंद्र 120° है।
(*b*) सममिति रेखाएँ 4, घूर्णन सममिति केंद्र 90° है।

2. समबाहु त्रिभुज और वृत्त

3. हाँ, वर्ग की 4 सममिति रेखाएँ और घूर्णन सममिति का क्रम 4 है।

4. (*a*) 3, केंद्रक , 3 (*b*) 2, विकर्णो का प्रतिच्छेद-बिंदु, 2 (c) 6, षट्भुज का केंद्र, 6

5.

| अंग्रेज़ी वर्णमाला | सममिति रेखा | सममिति रेखाओं की गिनती | घूर्णन सममिति | घूर्णन सममिति का क्रम |
|---|---|---|---|---|
| Z | नहीं | 0 | हाँ | 2 |
| S | नहीं | 0 | हाँ | 2 |
| H | हाँ | 2 | हाँ | 2 |
| O | हाँ | 2 | हाँ | 4 |
| E | हाँ | 1 | हाँ | 1 |
| N | नहीं | 0 | हाँ | 2 |
| C | हाँ | 1 | हाँ | 1 |

6. (*i*) *b* (*ii*) *c* (*iii*) *c*
(*iv*) *b* (*v*) *b*

अध्याय

# 15

Z3R9T6

# ठोस आकारों का चित्रण

## उद्देश्य :-

**इस अध्याय में, आप सीखेंगें :-**

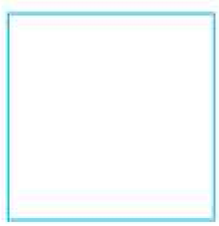
1. द्विविमीय (2-D) और त्रिविमीय (3-D) आकारों का विस्तृत अध्ययन।
2. ठोस चित्रों के शीर्षों, फलकों और किनारों की पहचान करना और उन्हें समझना।
3. त्रिविमीय (3-D) आकार के जाल की पहचान करना और उन्हें त्रिविमीय (3-D) चित्रों में परिवर्तित करना।
4. टेढ़े चित्र तथा समान दूरी के चित्र के बारे में सीखना तथा उनके बीच अंतर करना।
5. ठोस चित्रों को भिन्न-भिन्न दिशाओं से देखना और छिपे हुए फलकों का पता करना।
6. अपने दैनिक जीवन में ठोस संबंधी जानकारी का प्रयोग करना।

## भूमिका

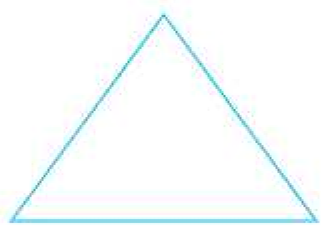
इस अध्याय में हम समतल और ठोस चित्रों का अध्ययन करेंगे।

**समतल आकृतियाँ (Plane figures) :** पिछली कक्षाओं में, हम कुछ समतल आकृतियाँ जैसे वर्ग, आयत, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त आदि बनाना सीख चुके हैं। इन आकारों की दो विमाएं हैं- लम्बाई और चौड़ाई। इन आकारों को कागज़ पर बनाया जा सकता है। इन आकारों को द्विविमीय (2-D) आकार या समतल आकार कहते हैं। कुछ समतल आकारों के उदाहरण नीचे दिए गए हैं :

(i) आयत

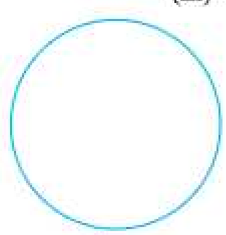


(ii) वर्ग



(iii) त्रिभुज

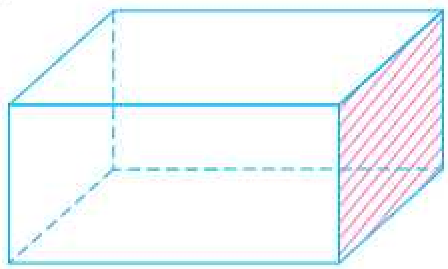
(iv) चतुर्भुज



(v) वृत्त

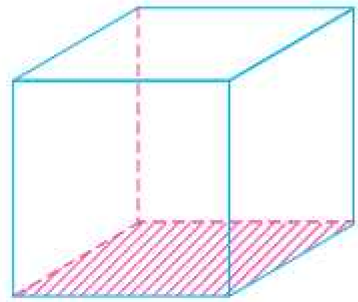
**ठोस आकार (Solid Shapes) :** अपने दैनिक जीवन में हम कई वस्तुएँ जैसे किताबें, बक्से, रोड गेंदें, आइसक्रीम आदि देखते हैं। ऐसी वस्तुओं की लम्बाई चौड़ाई और ऊंचाई होती है। इन्हें त्रिविनिमीय (3-D) या ठोस आकार कहा जाता है, क्योंकि इसका निश्चित आकार होता है और ये स्थान घेरते हैं। कुछ ठोस आकार नीचे दिए गए हैं :

(i)



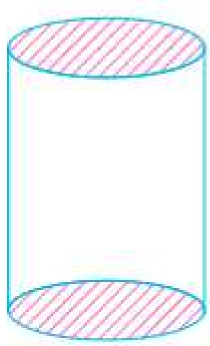
घनाभ

(ii)



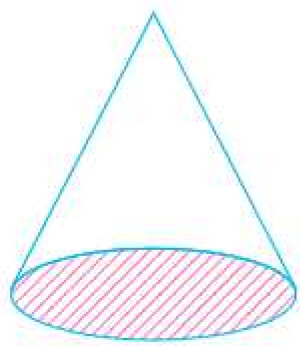
घन

(iii)



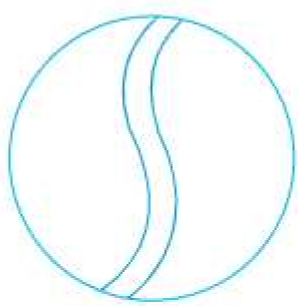
बेलन

(iv)



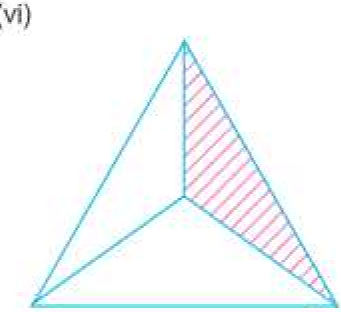
शंकु

(v)



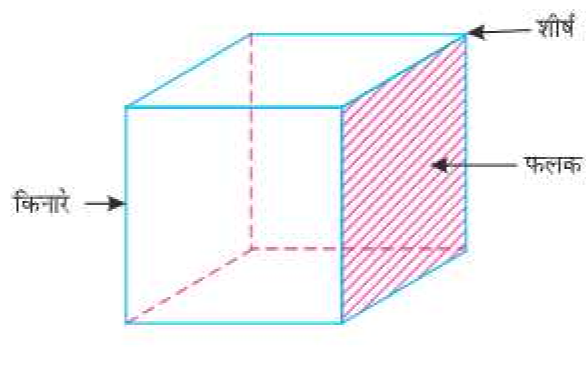
गोला

(vi)



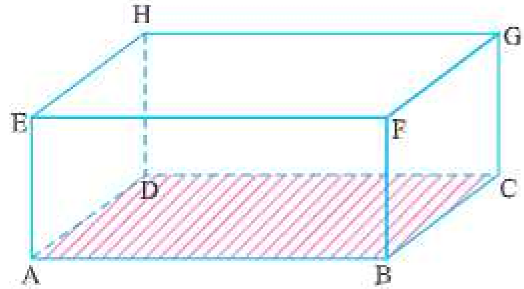
त्रिभुजाकार पिरामिड

**फलक, किनारे और शीर्ष :** आप ठोस आकारों के फलकों, किनारों और शीर्षों के बारे में पर चुके हैं। आओ! अब हम इन धारणाओं को दोहराएँ–



## भिन्न-भिन्न ( ठोस ) त्रिविमीय और उनकी विशेषताएँ (Different solid shapes and their features)

**घनाभ (Cuboid) :** एक ठोस जो 6 आयातकार फलकों (सन्मुख सर्वांगसम फलक) द्वारा घिरा है, जो एक दूसरे के साथ 90° का कोण बनाते हैं, वह घनाभ कहलाता है। आकृति ABCDEFGH घनाभ को दर्शाता है।

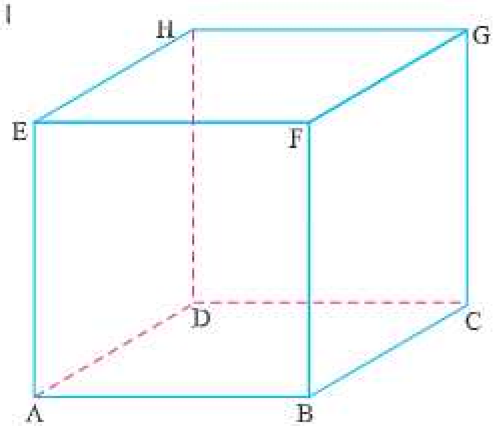



(i) **फलक (Faces) :** इसके 6 आयताकार फलक ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE और DCGH हैं। इन फलकों में से ABFE, DCGH, BCGF और ADHE घनाभ के पार्श्व फलक हैं।

(ii) **किनारे (Edges) :** इसके 12 किनारे AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, BF, CG, AE और DH हैं।

(iii) **शीर्ष (Vertices) :** इसके 8 शीर्ष A, B, C, D, E, F, G तथा H हैं।

**घन (Cube) :** एक घनाभ जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर होती है, उसे घन कहते हैं। दिया गया चित्र घन ABCDEFGH को दर्शाता है।

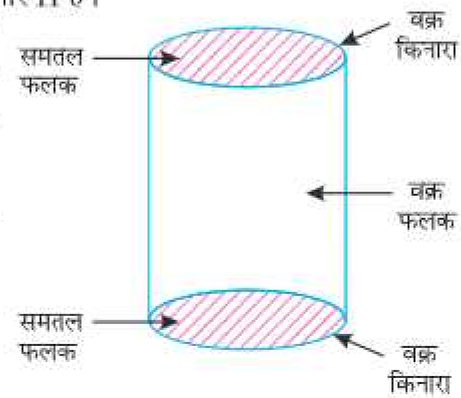



(i) **फलक (Faces) :** इसके 6 वर्गाकार फलक ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE और DCGH पार्श्व फलक ABFE, DCGH, BCGF और ADHE हैं।

(ii) **किनारे (Edges) :** इसके 12 किनारे AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, BF, CG, AE और DH हैं।

(iii) **शीर्ष (Vertices) :** इसके 8 शीर्ष A, B, C, D, E, F और H हैं।

**बेलन (Cylinder) :** बेलन एक त्रिविमीय ठोस है, जिसके दो समांतर आधार एक पार्श्व सतह के साथ जुड़े होते हैं। साधारणतया आधार वृत्तकार होते हैं। जैसे पाइप, कोल्ड ड्रिंक कोन, रोलर आदि। दी गई आकृति में बेलन दर्शाया गया है।

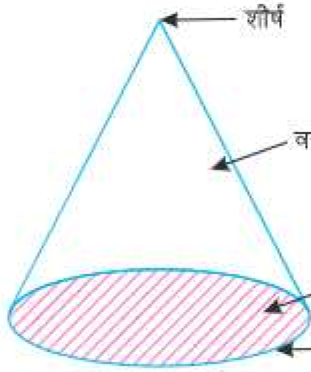



(i) **फलक (Faces) :** इसके दो समतल फलक और एक वक्र पृष्ठीय सतह (lateral surface) होती है।

(ii) **किनारे (Edges) :** इसके दो वक्राकार किनारे हैं।

(iii) **शीर्ष (Vertices) :** इसका कोई शीर्ष नहीं है।

**शंकु (Cone) :** शंकु एक त्रिविमीय ठोस है जो शीर्ष बिंदु को समतल आधार के वक्र किनारे से जोड़ने पर प्राप्त होता है। साधारणतया आधार वृतकार होता है। जैसे : आइसक्रीम कोन, कीप, शंक्वाकार टैंट इत्यादि।

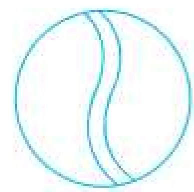



(*i*) **फलक (Faces) :** इसकी एक समतल और एक वक्र पृष्ठीय सतह होती है।

(*ii*) **किनारे (Edge) :** इसका एक वक्राकार किनारा है।

(*iii*) **शीर्ष (Vertex) :** इसका एक शीर्ष है।

**गोला (Sphere) :** एक त्रिविमीय आकृति जो गेंद की तरह गोलाकार है, उसे गोला कहते हैं। दिया गया चित्र गोले को दर्शाता है :-

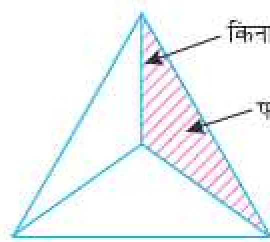


(*i*) इसकी एक वक्राकार सतह है।

(*ii*) इसका कोई किनारा नहीं है।

(*iii*) इसका कोई शीर्ष नहीं है।

**त्रिभुजाकार पिरामिड (Triangular Pyramid) :** एक त्रिभुजाकार पिरामिड वह ठोस है जिसका आधार त्रिभुज होता है। दिए गए चित्र में त्रिभुजाकार पिरामिड दर्शाया गया है :-




(*i*) इसके 4 फलक हैं।

(*ii*) इसके 6 किनारे हैं।

(*iii*) इसके 4 शीर्ष हैं।

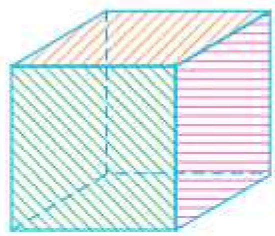
**सारणी**

| क्रमांक | ठोस का नाम | फलकों की गिनती | किनारों की गिनती | शीर्षों की गिनती |
|---|---|---|---|---|
| 1. | घनाभ | 6 | 12 | 8 |
| 2. | घन | 6 | 12 | 8 |
| 3. | बेलन | 3 | 12 | कोई नहीं |
| 4. | शंकु | 2 | 1 | 1 |
| 5. | गोला | 1 | कोई नहीं | कोई नहीं |
| 6. | त्रिभुजाकार पिरामिड | 4 | 6 | 4 |

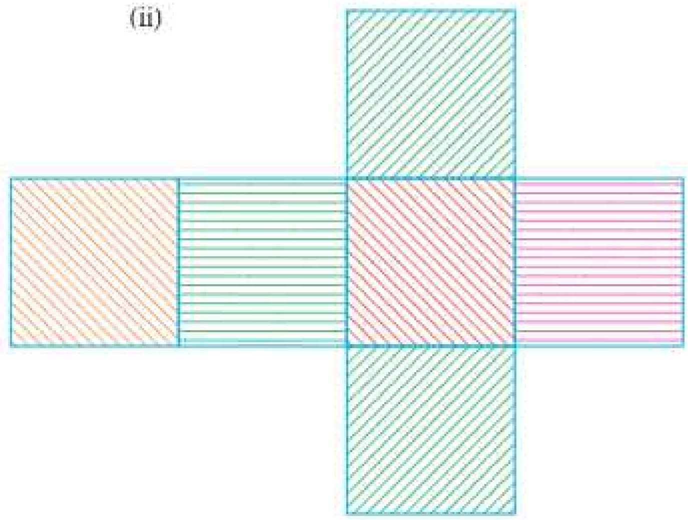
**त्रिविमीय (3-D) आकार बनाने के लिए जाल :** जाल एक द्विविमीय (2D) आकार है, जिसे मोड़कर ठोस में बदला जा सकता है। एक ठोस के भिन्न-भिन्न जाल हो सकते हैं-

आकृति (*i*) घन और (*ii*) घन के जाल को दर्शाती हैं।

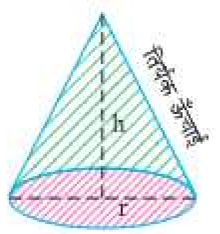
(i)

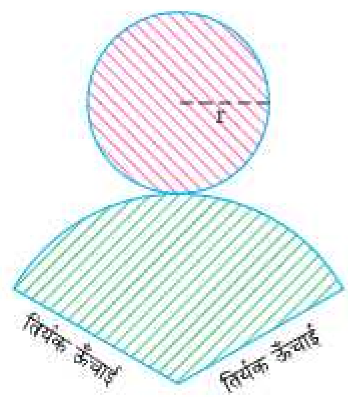


(ii)

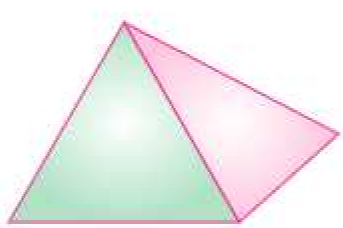


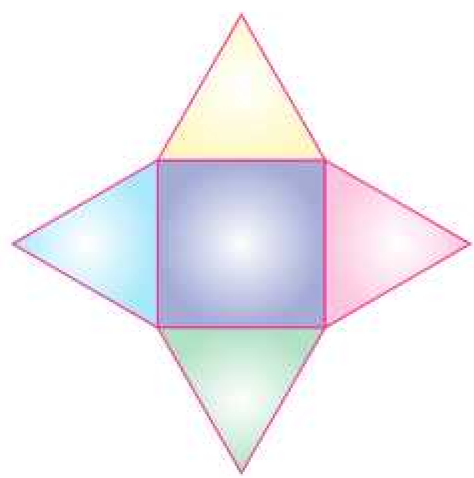
इसी प्रकार आप शंकु की पृष्ठीय सतह को काटकर उसका जाल प्राप्त कर सकते हैं।



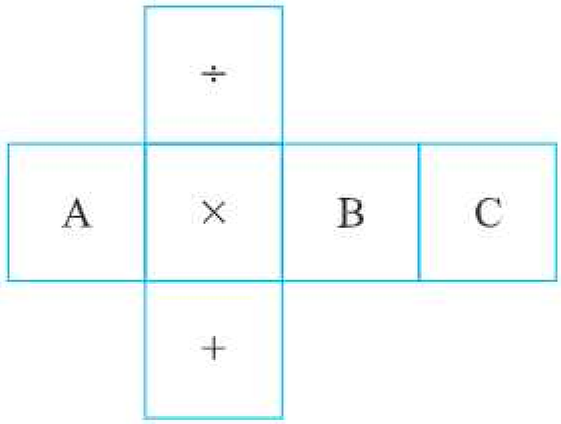

मिस्र के महान पिरामिड जिनके आधार वर्गाकार होते हैं और त्रिभुजाकार होते हैं, उनके जाल नीचे दर्शाये गए हैं :-



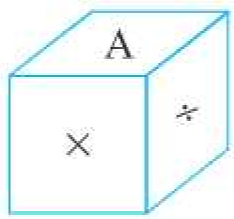


हम भिन्न-भिन्न जालों से 3-D आकृतियाँ बना सकते हैं।

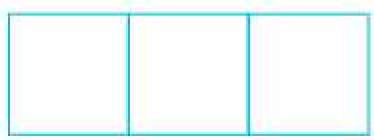
**उदाहरण-1 :** दिए गए जाल को मोड़कर ठोस बनाएं।



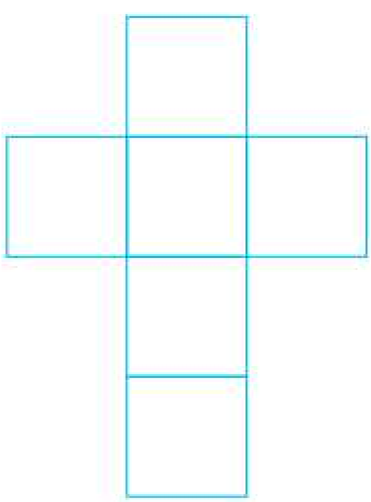

**हल :**

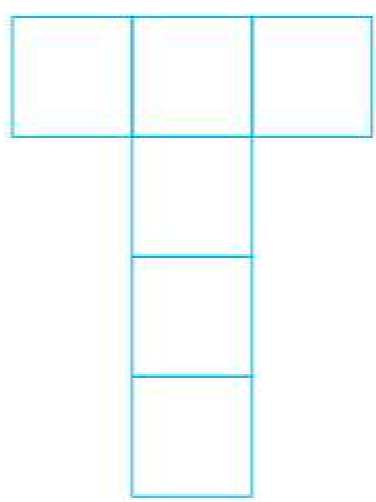



**उदाहरण-2 :** घन को बनाने के लिए दिया गया जाल अधूरा है। इसे कम से कम 2 विधियों द्वारा पूरा करें और स्मरण रखें कि घन के 6 फलक हैं।

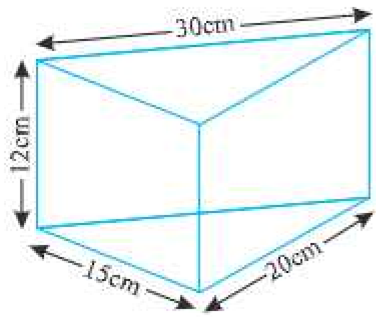


**हल :** एक घन के 6 फलक होते हैं। घन बनाने के लिए जाल की दो भिन्न-भिन्न विधियाँ निम्न प्रकार हैं :-

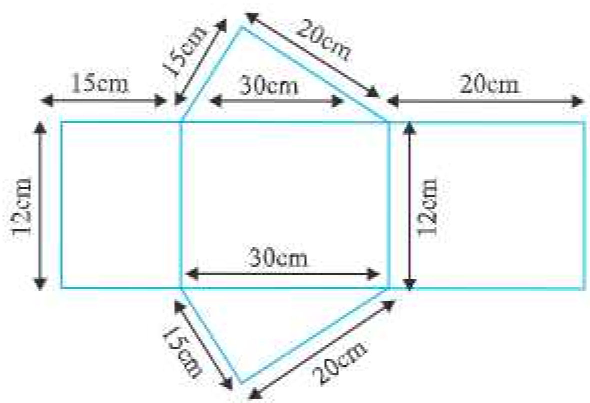




**उदाहरण-5 :** दिए गए चित्र में ठोस का जाल बनाएँ।

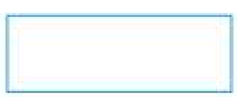


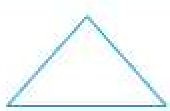

**हल :** दिए ठोस चित्र का जाल

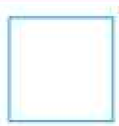


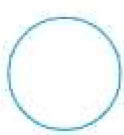

## प्रश्नावली - 15.1

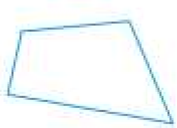
**1.** द्विविमीय आकृतियों का उनके नामों के साथ मिलान करें :-

(*i*)  (*a*) वर्ग

(*ii*)  (*b*) वृत्त

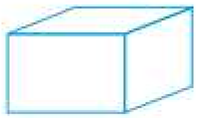
(*iii*)  (*c*) चतुर्भुज

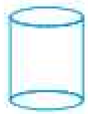
(*iv*)  (*d*) त्रिभुज

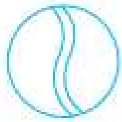
(*v*)  (*e*) आयत

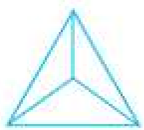
**2.** 3-D आकृतियों का उनके नामों के साथ मिलान करें।

(*i*) (*a*) बेलन

(*ii*)  (*b*) त्रिभुजाकार पिरामिड

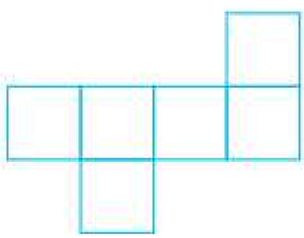
(*iii*)  (*c*) गोला

(*iv*)  (*d*) शंकु

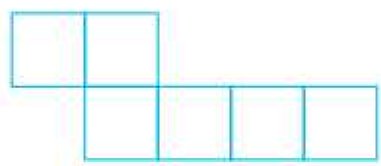
(*v*)  (*e*) घनाभ

**3.** घन बनाने के लिए दिए गए जालों में से उपयुक्त जाल की पहचान करें :-

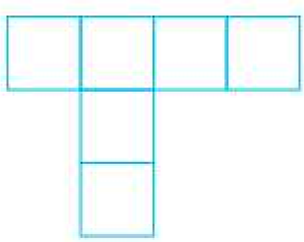
(i)



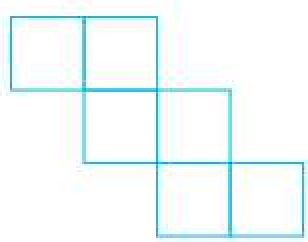
(ii)



(iii)

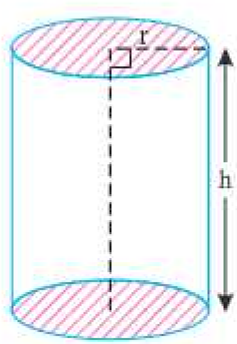


(iv)

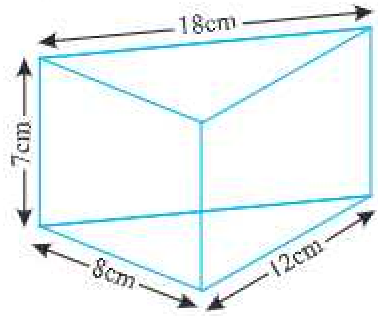


**4.** वर्गाकार पिरामिड के जाल की रचना करें जिसमें वर्गाकार आधार की भुजा 5cm और तिर्यक किनारा 7cm है।

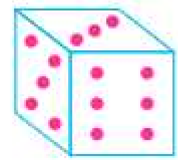
**5.** दिए गए बेलन का जाल बनाएँ।



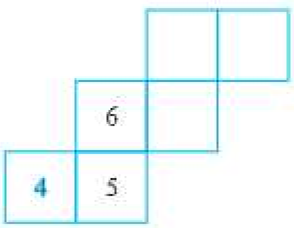
**6.** दिए गए चित्र में ठोस का जाल बनाएँ।



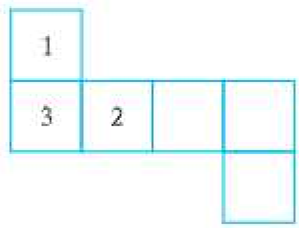

**7.** पासा (Dice) एक ऐसा घन होता है, जिसके चारों तरफ बिंदु लगे होते हैं। (पासे के सन्मुख फलक और अंकित संख्या का जोड़ 7 होता है) नीचे 2 जाल दिए गए हैं। पासे के अनुसार उनके फलकों में सही संख्या भरें :-



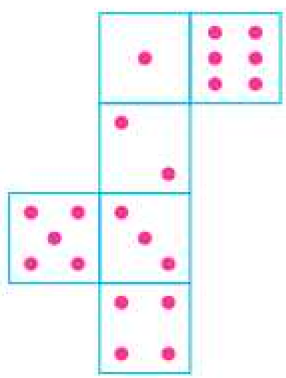
(i)



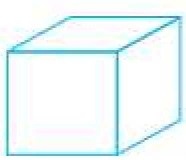

(ii)



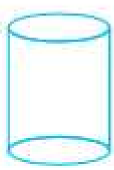

**8.** निम्न दर्शाए गए जाल को मोड़ने पर कौन सा ठोस बनता है ?



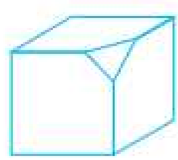
**9.** नीचे दी गई तालिका को पूरा करें :-



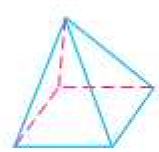
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| फलक | | 3 | | |
| किनारे | 12 | | | 8 |
| शीर्ष | 8 | | 10 | |

**10. बहुवैकल्पिक प्रश्न :**

(*i*) नीचे दिए गए विकल्पों में से कौन सा 3–D चित्र है ?

(*a*) वर्ग (*b*) त्रिभुज

(*c*) गोला (*d*) वृत्त

(*ii*) एक बेलन के कितने फलक होते हैं ?

(*a*) 0 (*b*) 2

(*c*) 1 (*d*) 3

(*iii*) एक वर्गाकार पिरामिड में कितने किनारे होते हैं ?

(*a*) 5 (*b*) 8

(*c*) 7 (*d*) 4

(*iv*) एक पासे (Dice) के सन्मुख फलकों पर अंकित संख्याओं का जोड़ ............. है।

(*a*) 8 (*b*) 7

(*c*) 9 (*d*) 6

(*v*) दिए गए चित्रों में से कौन सा चित्र ठोस (त्रिविमीय) नहीं हैं ?

(*a*) घनाभ (*b*) गोला

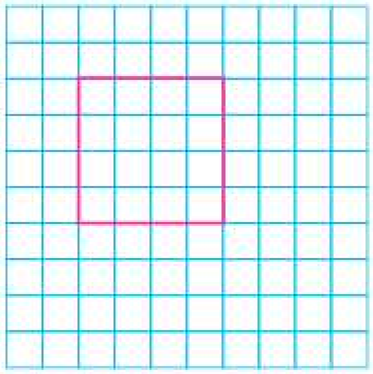
(*c*) चतुर्भुज (*d*) पिरामिड

## समतल पृष्ठ पर ठोस बनाना (Drawing solids on a flat surface)

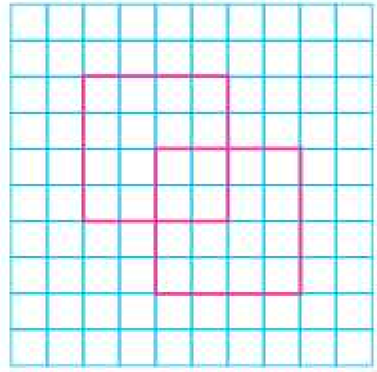
जब हम किसी ठोस चित्र को बनाते हैं, तो हमें उसे बनाने में कठिनाई का समना करना पड़ता है, क्योंकि हमारी ड्राइंग सतह का पृष्ठ एक कागज़/बोर्ड द्विवमीय (2-D) होता है। इन्हें 3–D बनाने की दो विधियाँ हैं–

1. तिर्यक/अनियमित (Oblique) चित्र
2. समदूरीक (Isometric) चित्र/बराबर दूरी वाले चित्र

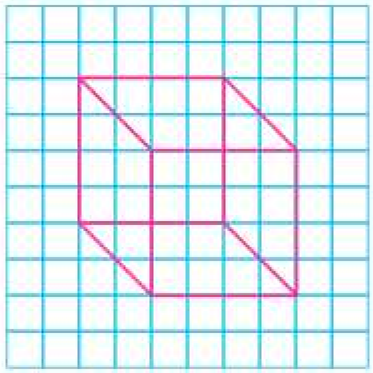
**तिर्यक (Oblique) स्कैच :** तिर्यक चित्र किसी वस्तु का वह रेखा चित्र है, जिसमें उस वस्तु का त्रिविनिमीय (3-D) रुप दर्शाया जाता है। नीचे दिए गए घन को तिर्यक चित्र द्वारा दर्शाए जाने के 2 चरण हैं।



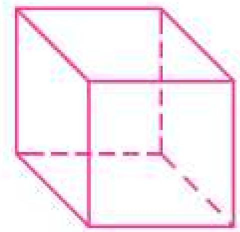
चरण 1
वर्ग बनाएं



चरण 2
दूसरा वर्ग बनाएं जहाँ दोनों वर्गों के मध्य बिंदु मिलते हैं।



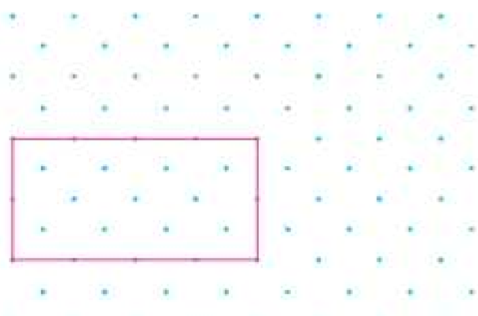
चरण 3
दोनों वर्गों के संगत शीर्षों
को मिलाएं।



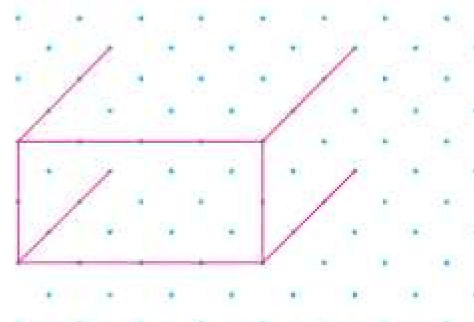
चरण 4
छिपे हुए किनारों को बिंदुकित
रेखाओं का प्रयोग करके दर्शाएं।

इस प्रकार हम घनाभ का तिर्यक चित्र बना सकते हैं। (स्मरण रखें कि घनाभ के फलक आयाताकार होते हैं)

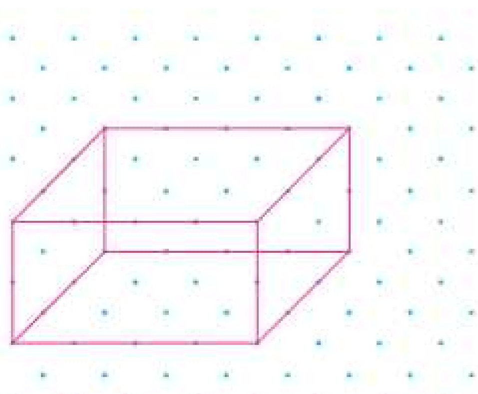
***(ii)* समदूरीक चित्र (Isometric sketches) :** एक समदूरीक (बिंदुकित) शीट वह शीट होती है जिसमें पूरा कागज बिंदुकित रेखाओं से बने छोटे-छोटे समबाहु त्रिभुजों में बंट जाता है। समदूरीक चित्र में मापों को अनुपात में दर्शाया जाता है। एक 4 × 3 × 3 घनाभ को बनाने के लिए नीचे 4 चरण दिए गए हैं-



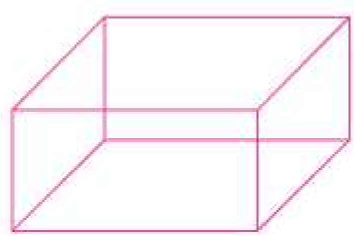
चरण 1
सामने वाला फलक दर्शाने
के लिए एक आयत खींचें।



चरण 2
आयत के चारों कोनों से चार
समांतर रेखाखंड खींचे।



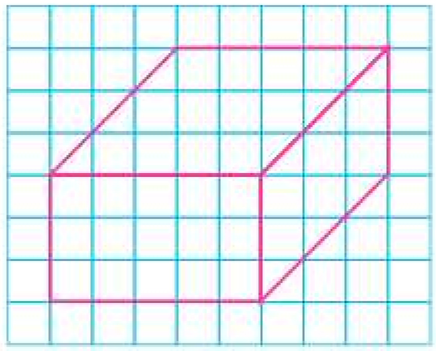
चरण 3
सुमेलित कोनों को उपयुक्त
रेखाखंडों से मिलाएं।



चरण 4
यह धनाभ का एक
समदूरीक चित्र है।

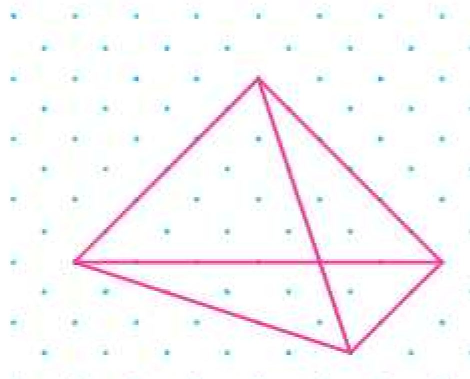
**उदाहरण-1 : घनाभ का तिर्यक चित्र बनाएं जिसकी लम्बाई 5*cm*, चौड़ाई 4*cm* और ऊँचाई 3*cm* है।**

हल : लम्बाई 5*cm*, चौड़ाई 4*cm*, ऊंचाई 3*cm* वाले घनाभ का तिर्यक चित्र निम्न अनुसार है।



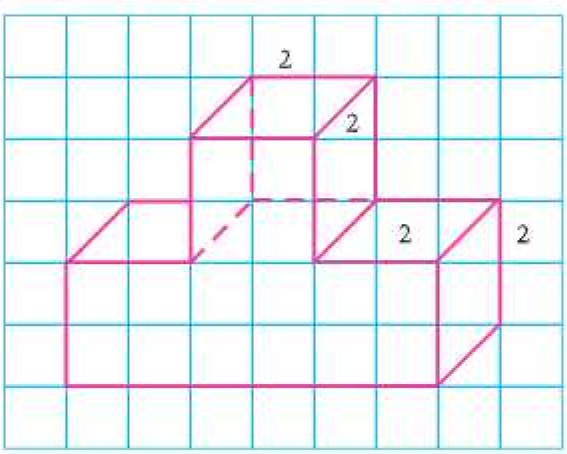
**उदाहरण-2 : त्रिभुजाकार पिरामिड का समदूरीक चित्र बनाएँ।**

हल : त्रिभुजाकार पिरामिड का समदूरीक चित्र निम्न अनुसार है।

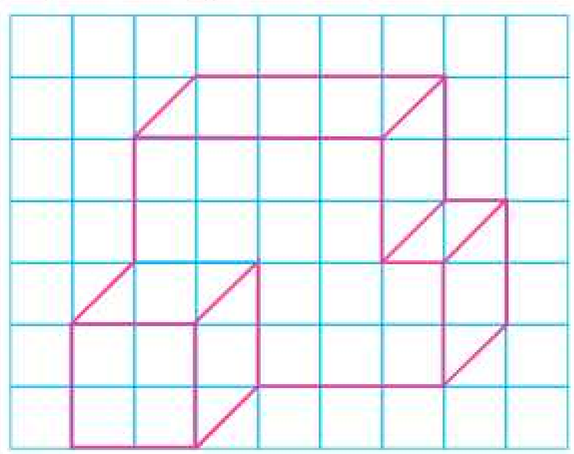


## प्रश्नावल - 15.2

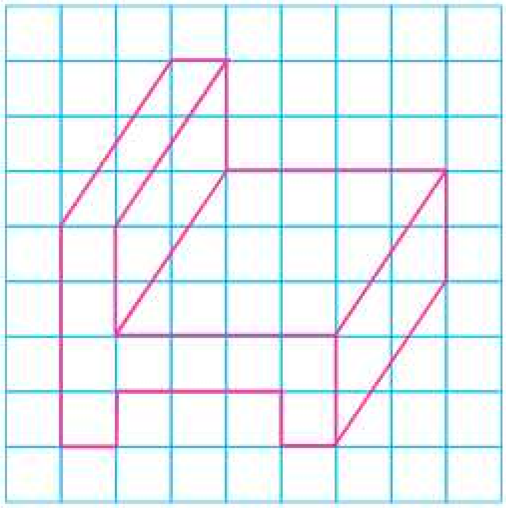
1. समदूरीक बिन्दुकित शीट का प्रयोग करते हुए निम्न दिए गए चित्रों का समदूरीक चित्र बनाएँ।

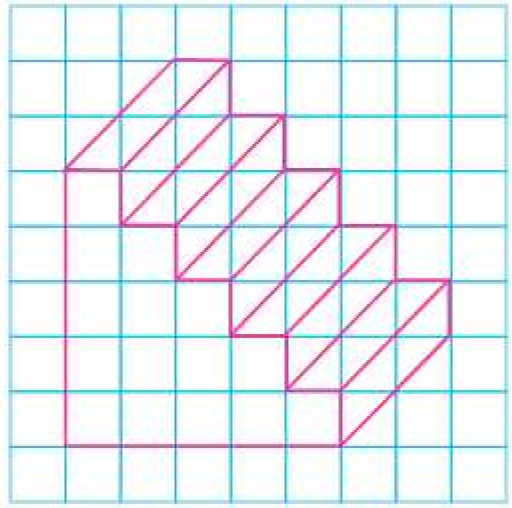



(i)

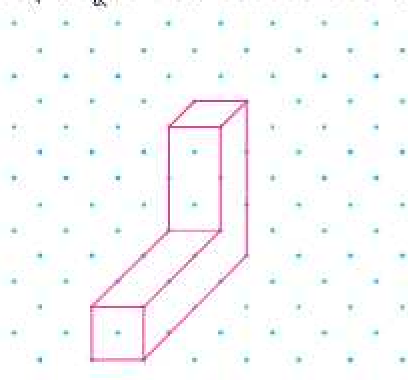


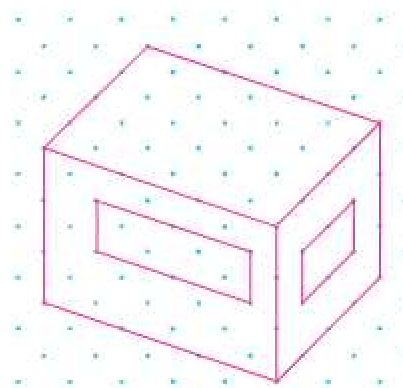
(ii)


(iii)

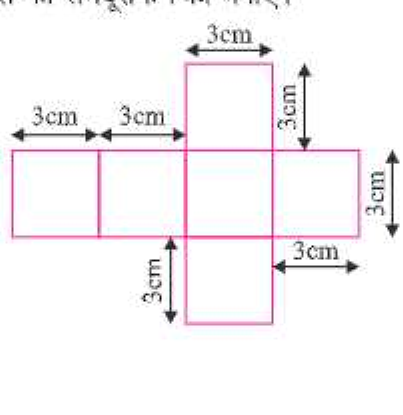

(iv)

2. (*i*) तिर्यक चित्र (*ii*) समदूरीक चित्र बनाएँ।
   (*a*) एक घन जिसका किनारा 4cm है।
   (*b*) एक घनाभ जिसकी लम्बाई 6cm , चौड़ाई 4cm और ऊँचाई 3cm है।
3. दो घन जिनके प्रत्येक किनारे की लम्बाई 3cmहै, उन्हें मिलाया गया और एक घनाभ तैयार किया गया है। इस घनाभ का तिर्यक और समदूरीक चित्र बनाएँ।
4. एक त्रिभुजाकार पिरामिड का समदूरीक चित्र बनाएं जिसका आधार 6cm भुजा वाली समबाहु त्रिभुज है और ऊँचाई 4 cm है।
5. एक वर्गाकार पिरामिड का समदूरीक चित्र बनाएँ।
6. दिए गए समदूरीक चित्रों का तिर्यक चित्र बनाएँ।


(i)


(ii)

7. दिए गए जाल द्वारा बने ठोस का समदूरीक चित्र बनाएँ।



**8. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**

(*i*) एक तिर्यक (oblique) शीट किस की बनी होती है ?

(*a*) आयत (*b*) वर्ग

(*c*) समत्रिभुज (*d*) समत्रिभुज

(*ii*) एक समदूरीक (isometric) शीट में बिंदु कौन सा चित्र बनाते हैं ?

(*a*) वर्ग (*b*) आयत

(*c*) समबाहु त्रिभुज (*d*) समकोण त्रिभुज

(*iii*) एक तिर्यक चित्र में ................ होती हैं।

(*a*) समानुपाती लम्बाइयाँ (*b*) समांतर लम्बाइयाँ

(*c*) असमानुपाती लम्बाइयाँ (*d*) लम्ब लम्बाइयाँ

(*iv*) एक समदूरीक चित्र में ................ होती हैं।

(*a*) समानुपाती लम्बाइयाँ (*b*) समांतर लम्बाइयाँ

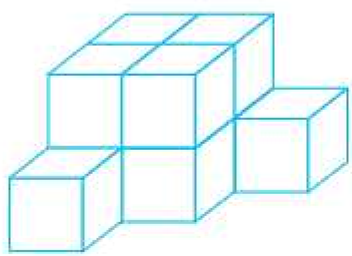
(*c*) असमानुपाती लम्बाइयाँ (*d*) लम्ब लम्बाइयाँ

(*v*) समदूरीक चित्रों में ................ वस्तुएं दर्शाई जाती हैं।

(*a*) द्विवमीय (2-D) (*b*) परछाईं

(*c*) त्रिवमीय (3-D) (*d*) विमीय

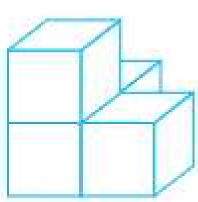
**ठोस वस्तुओं का चित्रण करना :** जब हम किसी ठोस वस्तु को देखते हैं तो यह आवश्यक नहीं कि एक स्थान से उसे पूर्णतया देखा जा सके। ठोस का दृश्य उसे देखाने की दिशा पर निर्भर करता है। जब हम किसी संयोजित या जुड़े हुए आकारों को देखते हैं तो इनमें से कुछ हमारी दृष्टि से छिप जाते हैं। ठोसों का पूर्ण रूप से चित्रण करना एक कला है, जिसमें उसके छिपे हुए हिस्सों को भी देखा जा सकता है।



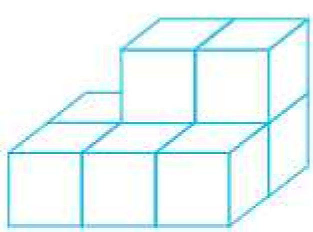
ऊपर दिए गए संयोजित चित्र को देखकर बताने का प्रयास कीजिए कि इस ढाँचा को बनाने के लिए कितने घनों का प्रयोग किया गया है ? इस ढाँचे में 10 घन हैं।

**उदाहरण-1 : नीचे दिए गए ढाँचों में घनों की संख्या पता करें।**

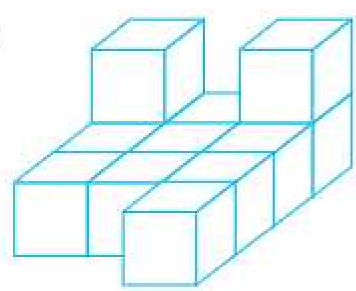
(i)



(ii)



(iii)

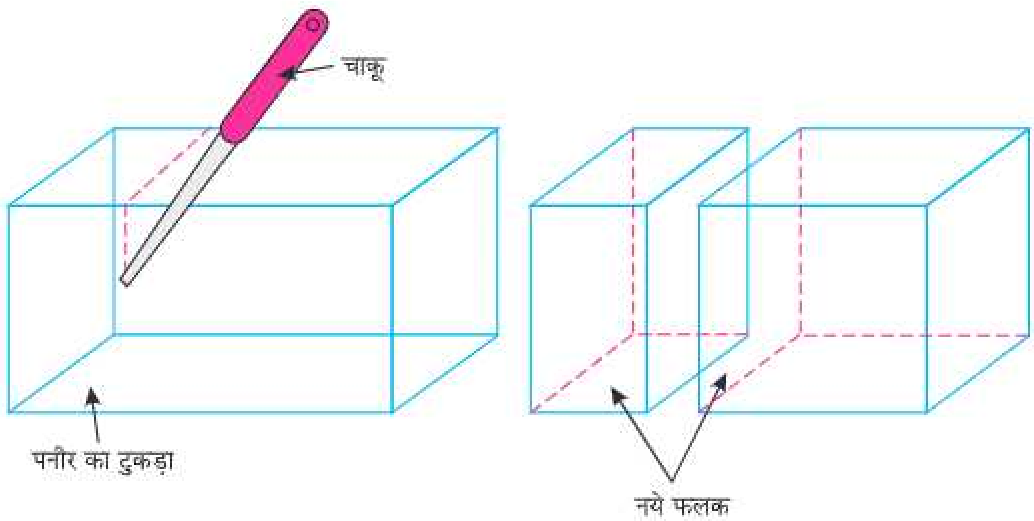


**हल :** (*i*) 4 (*ii*) 8 (*iii*) 12

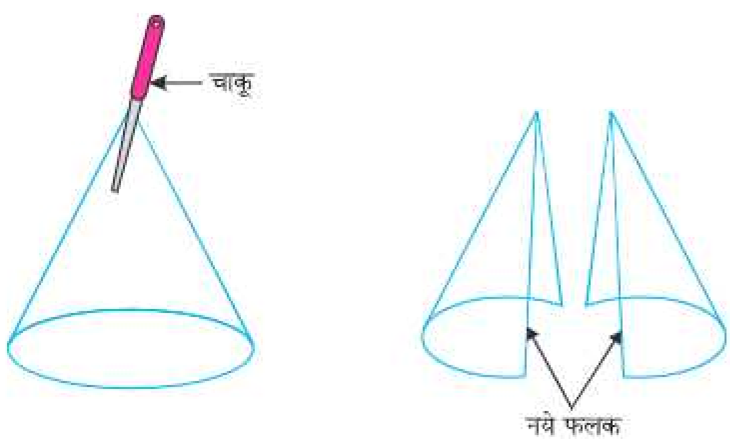
## ठोस के विभिन्न भागों को देखना (Viewing different sections of a solid)

3-D वस्तुओं को भिन्न-भिन्न विधियों द्वारा निम्नलिखित तरीकों से देखा जा सकता है।

**1. काट कर (Cutting or Slicing) :** एक ठोस को अलग-अलग हिस्सों में काटा जा सकता है। जब हम किसी ठोस को चाकू से दो हिस्सों में काटते हैं तो हम उस ठोस के दो नए फलक मिलते हैं। इन फलकों को अनुप्रस्थ काट (cross-sections) कहते हैं। जिस प्रकार पनीर के एक टुकड़े को दो हिस्सों में काटने पर दो नए फलक मिलते हैं।




इस प्रकार यदि हम किसी ठोस शंकु को ऊर्ध्वाधर (vertical) तरीके से काटते हैं तो चित्र में दर्शाये गए अनुसार हमें दो नए फलक मिलते हैं।




उपर्युक्त चर्चा से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किसी ठोस को काटने से हमें समतल फलक प्राप्त होता है। इस समतल फलक को अनुप्रस्थ काट और इसकी सीमा को समतल वक्र कहते हैं।

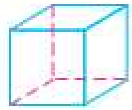
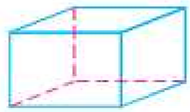
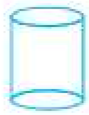
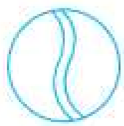
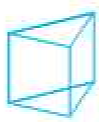
**उदाहरण-2 : निम्नलिखित ठोस में (*i*) क्षितिज काट (*ii*) ऊर्ध्वाधर काट द्वारा**

(*a*) घन (*b*) घनाभ

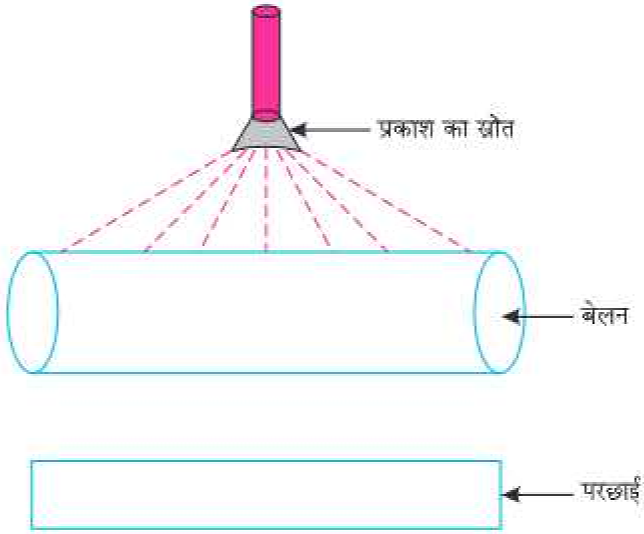
(*c*) बेलन (*d*) गोला

(*e*) शंकु (*f*) त्रिभुजाकार त्रिज्य

ठोसों के रफ़ चित्र भी खींचिए।

| | ठोस का नाम | चित्र | क्षितिज काट | ऊर्ध्वाधर काट |
|---|---|---|---|---|
| (*a*) | घन |  | वर्ग | वर्ग |
| (*b*) | घनाभ |  | आयत | आयत |
| (*c*) | बेलन |  | आयत | वृत्त |
| (*d*) | गोला |  | वृत्त | वृत्त |
| (*e*) | शंकु | | त्रिभुज | वृत्त |
| (*f*) | त्रिभुजाकार प्रिज़्म |  | आयत | त्रिभुज |

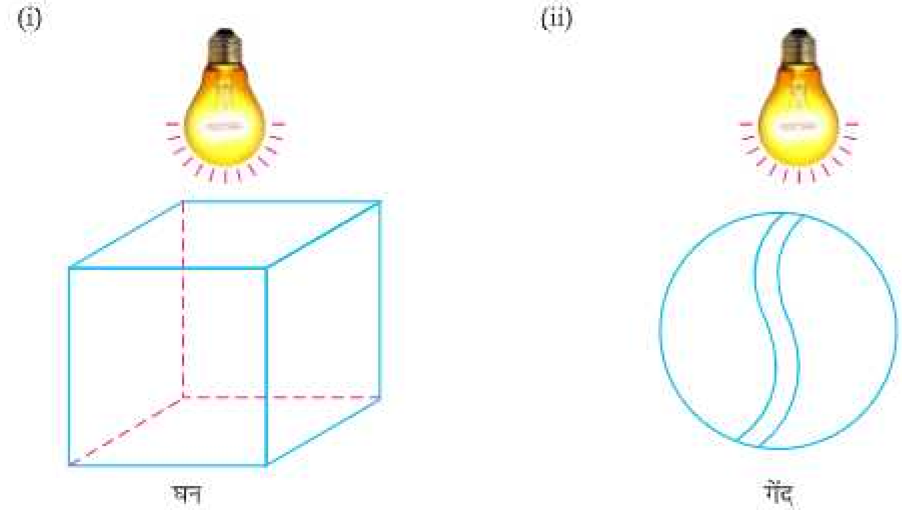
**3. (3-D) वस्तु की छाया विधि :** 3-D वस्तु की छाया 2-D चित्र है। किसी भी वस्तु की छाया सुनिश्चित नहीं होती है। प्रकाश की स्थिति बदलने के साथ-साथ छाया भी बदलती है। यदि हम बेलन के शीर्ष से प्रकाश डालेंगे तो हमें छाया आयताकार रूप में प्राप्त होगी।



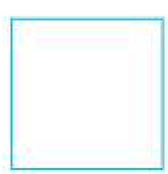
लेकिन यदि हम बेलन की बायीं तरफ से प्रकाश डालेंगें तो हमें छाया वृत्ताकार रूप में प्राप्त होगी।

हम देखते हैं कि किसी वस्तु की छाया, उसकी स्थिति परिवर्तित होने के साथ साथ प्रकाश की स्थिति परिवर्तित होने पर भी बदलती है।

**उदाहरण-3 : यदि हम नीचे दिए गए ठोसों के ऊपर शीर्ष से प्रकाश डालेंगे तो इसकी छाया का आकार क्या होगा ? और उसका एक चित्र भी बनाइए।**

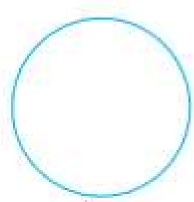



**हल :** (*i*) घन की छाया वर्गाकार रूप में है।



वर्ग

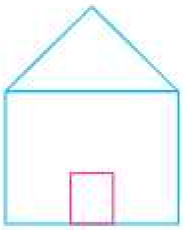
(*ii*) गेंद की छाया वृत्ताकार रूप में है।



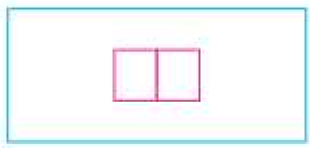
गोला

**3. ठोस को किसी निश्चित दिशा से देखना :** ठोसों को देखने का एक और विधि उन्हें भिन्न-भिन्न दिशाओं जैसे सामने से, साइड से, शीर्ष से देखना भी है, जिस द्वारा ठोस के बारे में बहुत जानकारी मिल सकती है।

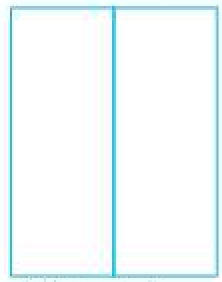
हम तीन दिशाओं से ठोस को देख सकते हैं :-शीर्ष, पार्श्व और सामने के दृश्य से।



सामने से दृश्य



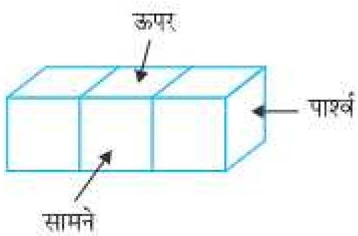
पार्श्व दृश्य



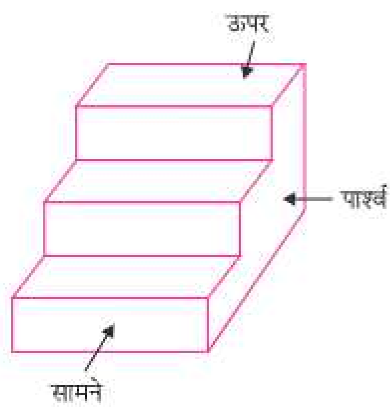
शीर्ष (ऊपर) से दृश्य

**उदाहरण-4 : दिए गए ठोसों के सामने, पार्श्व और शीर्ष ( ऊपर ) के दृश्य बनाएँ।**

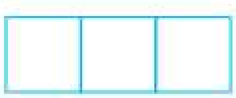
(i)



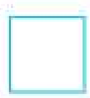

(ii)



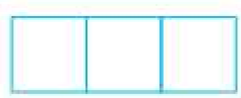

**हल :** (i)



सामने से दृश्य

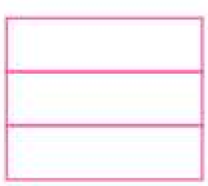


पार्श्व दृश्य

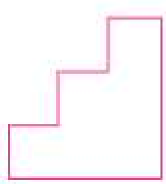


शीर्ष (ऊपर) से दृश्य

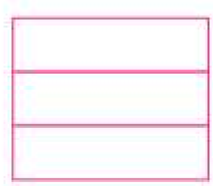
(ii)



सामने से दृश्य



पार्श्व दृश्य

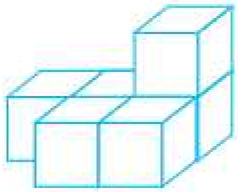


शीर्ष (ऊपर) से दृश्य

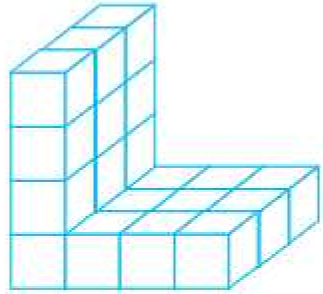
## प्रश्नावली - 15.3

**1.** दिए गए चित्रों में घनों की गिनती बताइए।

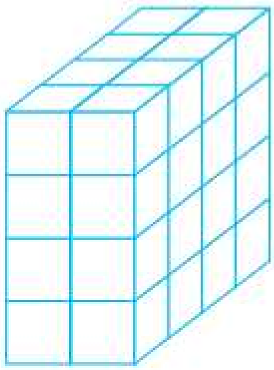
(i)



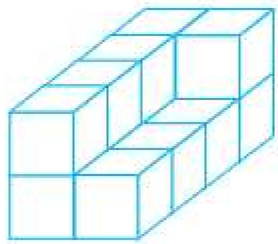
(ii)



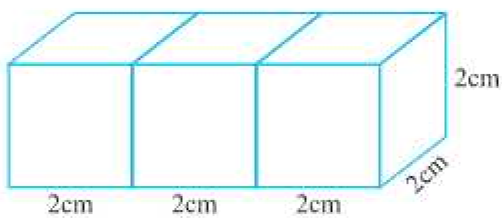
(iii)



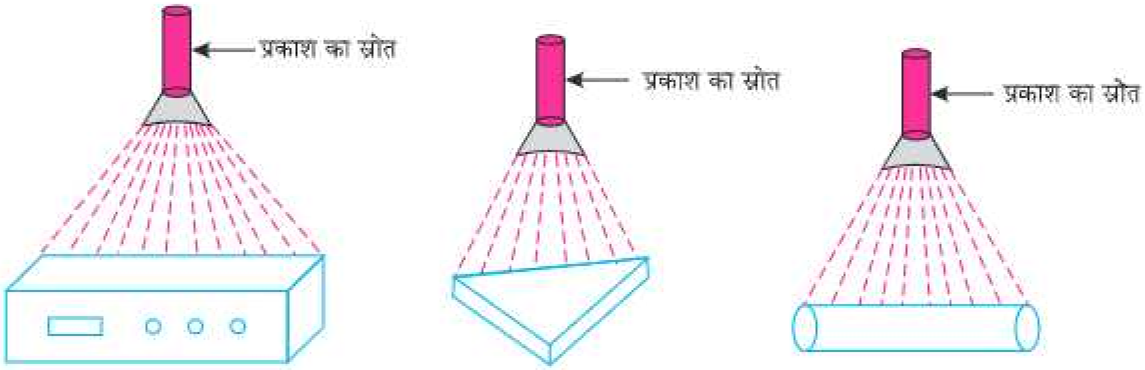
(iv)



**2.** यदि 2 सेमी किनारों वाले तीन घनों को परस्पर सटा कर रखते हुए एक घनाभ बनाया गया है। इस घनाभ का माप पता करें।




**3.** यदि हम दिए गए ठोसों के ऊपर से प्रकाश डाला जाए तो प्राप्त छाया का आकार बताएँ और एक चित्र बनाएँ।




(i) डी.वी.डी. प्लेयर (ii) सैंडविच (iii) स्ट्रॉ (Straw)

**4.** यदि किसी ठोस को

(*i*) क्षितिज रूप मे काटा (*ii*) ऊर्ध्वाधर रूप मे काटा जाता है तो

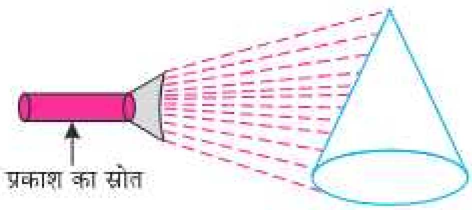
प्राप्त अनुप्रस्थ काट (cross-section) का नाम बताएँ।

(*a*) पासा (dice) (*b*) वर्गाकार पिरामिड

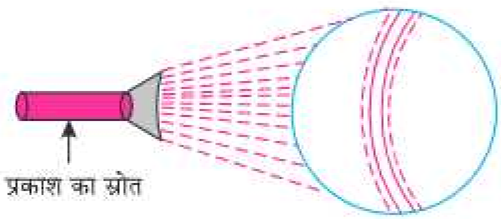
(*c*) गोल तरबूज़ (*d*) वृत्ताकार पाइप

(*e*) ईंट (*f*) आइसक्रीम कोन

**5.** यदि हम दिए गए ठोसों पर बायीं तरफ से प्रकाश डाला जाए तो प्राप्त छाया के आकार का नाम बताएँ और चित्र बनाएं।

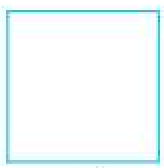


शंकु

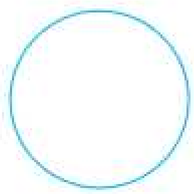


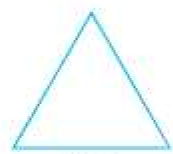
गेंद

**6.** यहाँ कुछ 3–D वस्तुओं की छायाएँ दी गई हैं जो उन्हें एक ओवरहैड प्रोजेक्ट के नीचे रखकर प्राप्त की गई हैं। प्रत्येक छाया से मिलान वाले ठोस की पहचान कीजिए। (इनमें एक से अधिक उत्तर हो सकते हैं।)


वर्ग

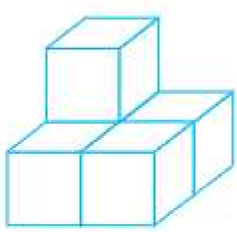
आयत


वृत

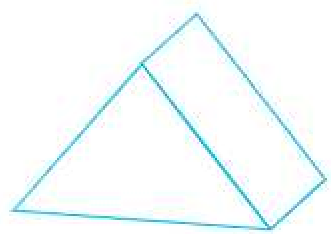

त्रिभुज

**7.** दिए गए ठोसों के सामने, पार्श्व और शीर्ष (ऊपर) के दृश्य बनाएं।

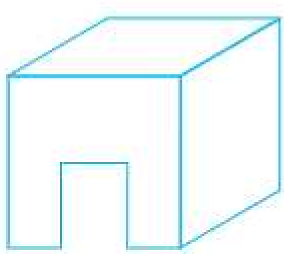
(i)



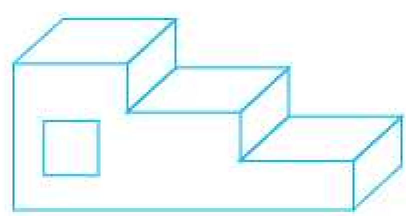
(ii)



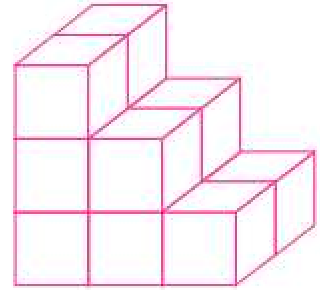
(iii)



(iv)



**8. बहुवैकल्पिक प्रश्न :-**



(*i*) दिए गए ठोस में घनों की संख्या बताएँ।

(*a*) 12
(*b*) 10
(*c*) 9
(*d*) 8

(*ii*) उपरोक्त चित्र को $4 \times 2 \times 3$ ईकाईयों का घनाभ बनाने के लिए कितने इकाई घनों की ज़रूरत पड़ेगी ?

(*a*) 11 (*b*) 12
(*c*) 13 (*d*) 14

(*iii*) घनाभ को ऊर्ध्वाधर काटने पर बने अनुप्रस्थ काट का नाम बताएँ।

(*a*) वर्ग (*b*) आयत
(*c*) वृत्त (*d*) त्रिभुज

(*iv*) शंकु क्षैतिज रूप में कट करने पर बने अनुप्रस्थ काट का नाम बताएँ।

(*a*) त्रिभुज (*b*) वृत्त
(*c*) वर्ग (*d*) आयत

(*v*) किस ठोस की छाया प्रकाश में त्रिभुज बनाती है ?

(*a*) गोला (*b*) बेलन
(*c*) शंकु (*d*) घन

## हमने क्या चर्चा की ?

1. समतल वृत्त, वर्ग, आयत, चतुर्भुज और त्रिभुज समतल आकृतियों के उदाहरण है तथा घन, घनाभ, गोला, बेलन, शंकु और पिरामिड ठोस आकारों के उदाहरण हैं।
2. समतल आकृतियों की दो विमाएं (2-D) और ठोस आकारों की तीन विमाएं (3-D) होती हैं।
3. एक फलक सपाट सतह होती है। ठोस आकार के कोने उसके शीर्ष और उसके ढाँचे के रेखाखंड उसके किनारे (कोर) होते हैं।
4. ठोस का एक जाल दो विभाओं में एक ऐसा ढाँचा है जिसे मोड़कर वह ठोस प्राप्त हो जाता है। एक ही ठोस के अनेक प्रकार के जाल हो सकते हैं।
5. वास्तविक रुप से, ठोस आकारों को सपाट पृष्ठों (जैसे कागज़) पर खींचा जा सकता है। जैसे कागज़ दो विमीय सतह है। 3-D आकृति को 2-D के रूप में दर्शाया जा सकता है। 3-D ठोस को चित्र बनाना दो तरीकों से संभव हैं।
   (*i*) **तिर्यक (Oblique) चित्र :** तिर्यक क्षेत्र में लम्बाइयां समानुपाती नही होती हैं। फिर भी वह ठोस के रुप के बारे में सभी महत्वपूर्ण जानकारी प्रदान कर देता है।
   (*ii*) **समदूरीक (Isometric) शीट :** समदूरीक शीट एक ऐसा पेपर है जिसके ऊपर बिंदुओं को समभुजी त्रिभुज के पैटर्नों में बनाया होता है। समदूरीक स्कैच में माप अनुपात में रखे जाते हैं।
6. ठोस आकारों का चित्रण एक बहुत ही उपयोगी कौशल है। आपको ठोस आकार के छिपे हुए भाग दिखाई दे जाने चाहिए। ठोस वस्तुओं को देखने के लिए निम्नलिखित विधियाँ हैं–
   (*i*) **काटकर :** एक 3-D वस्तु को दो भागों में काटा जा सकता है। इससे हमें ठोस की एक अनुप्रस्थ काट प्राप्त हो जाती है।
   (*ii*) **3-D वस्तु की छाया से :** इस विधि द्वारा 3-D वस्तु की 2-D छाया को देखा जा सकता है।
   (*iii*) **निश्चित दिशा से देखना :** इस विधि द्वारा वस्तु को विभिन्न कोणों से देखा जाता है। जैसे सामने का दृश्य, पार्श्व और ऊपर का दृश्य।

**सीखने के परिणाम :-**

**इस अध्याय के पूर्ण होने पर विद्यार्थी :**

1. (2-D) आकारों और (3-D) आकारों मे सम्बन्ध स्थापित करने के योग्य है।
2. 3-D आकृतियों के जालों की पहचान कर सकते हैं और जालों की सहायता से ठोसों को बना सकते हैं।
3. 3-D आकृतियों के शीर्ष, फलक और किनारों को गिन सकते हैं।
4. समतल सतह पर भिन्न-भिन्न विधियों द्वारा 3-D चित्र बना सकते हैं।
5. ठोस के छिपे हुए भागों को अलग-अलग विधियों द्वारा देख सकते हैं।
6. आकृतियों से संबंधित ज्ञान को व्यावहारिक जीवन में प्रयोग में ला सकते हैं।

# उत्तरमाला

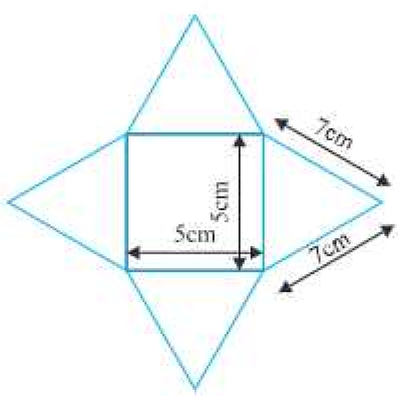
## प्रश्नावली 15.1

**1.** (*i*) *e* (*ii*) *d*
(*iii*) *a* (*iv*) *b*
(*v*) *c*

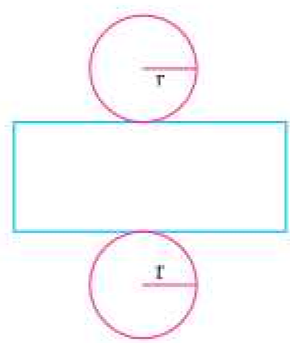
**2.** (*i*) *d* (*ii*) *e*
(*iii*) *a* (*iv*) *c*
(*v*) *b*

**3.** (*i*), (*iv*)

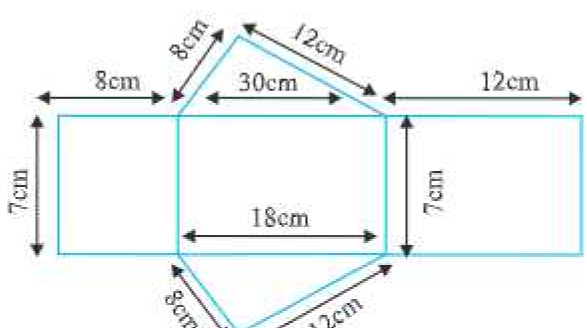
**4.**



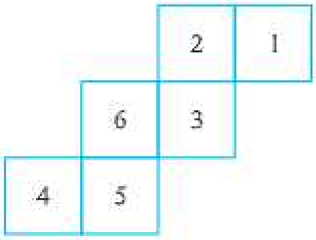

**5.**



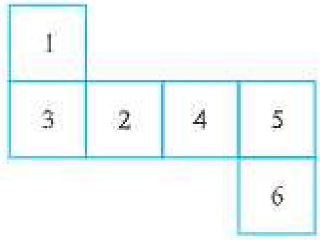

**6.**

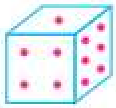


7. (i)




(ii)




**8.** पासा 

**9.** (*i*) फलक : 6 (*ii*) किनारा : 2, शीर्ष–कोई नहीं (*iii*) फलक : 7, किनारे : 15 (*iv*) फलक : 5, शीर्ष 5

**10.** (*i*) *c* (*ii*) *d* (*iii*) *b* (*iv*) *b* (*v*) *c*

## प्रश्नावली 15.2

**8.** (*i*) *b* (*ii*) *c*
(*iii*) *c* (*iv*) *d*
(*v*) *c*

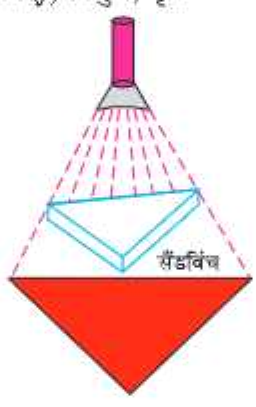
## प्रश्नावली 15.3

**1.** (*i*) 6 (*ii*) 21
(*iii*) 32 (*iv*) 13

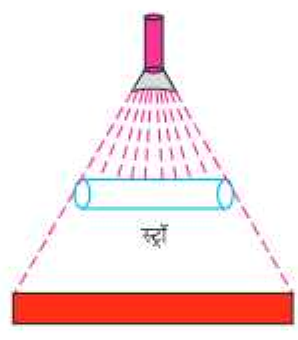
**2.** लम्बाई 6*cm*, चौड़ाई 2*cm* और ऊँचाई 2*cm* (4) (*a*) वर्ग, वर्ग (*b*) त्रिभुज, वर्ग
वृत्त, वृत्त (*d*) वृत्त, आयत (*e*) आयत, आयत (*f*) त्रिभुज, वृत्त

**3.**

(i) आयत

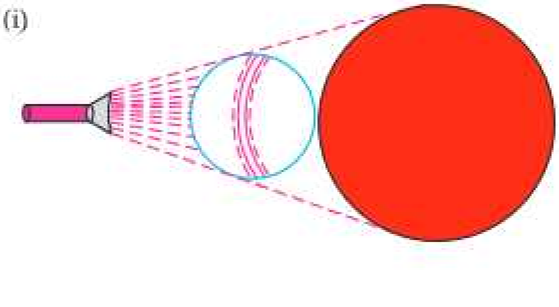



(ii) त्रिभुज

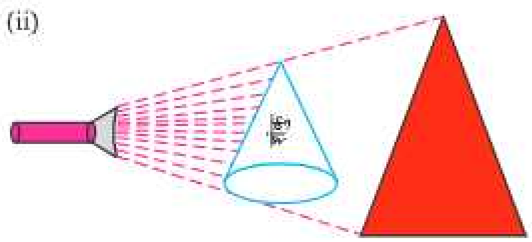



(iii) आयत

**5.** (i)



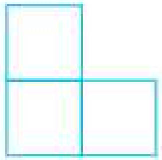
(ii)

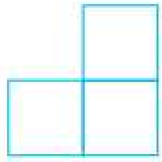


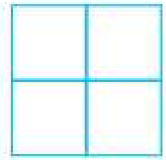
**6.** (*i*) पासा, चॉक का डिब्बा आदि। (*ii*) किताब, मोबाइल, डी.वी.डी. प्लेयर

(*iii*) क्रिकेट की गेंद (*iv*) जन्मदिन वाली टोपी, आइसक्रीम कोन इत्यादि

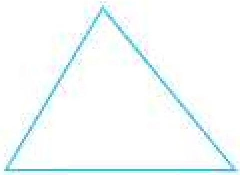
**7.** (i)

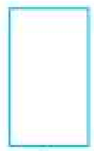

सामने का दृश्य

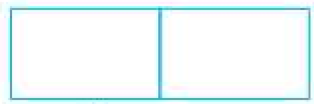

पार्श्व दृश्य


शीर्ष (ऊपर) का दृश्य

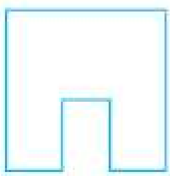
(ii)

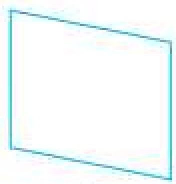

सामने का दृश्य

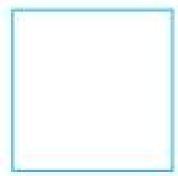

पार्श्व दृश्य


शीर्ष (ऊपर) का दृश्य

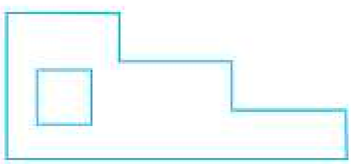
(iii)

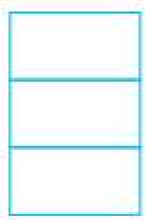

सामने का दृश्य

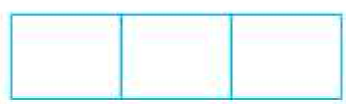

पार्श्व दृश्य


शीर्ष (ऊपर) का दृश्य

(iv)


सामने का दृश्य


पार्श्व दृश्य


शीर्ष (ऊपर) का दृश्य

**8.** (*i*) *a* (*ii*) *b* (*iii*) *b*

(*iv*) *b* (*v*) *c*

# समदूरीक शीट

# समदूरीक शीट